

Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет

В.Б. Веселовський,
А.Ю. Дреус,
А.В. Сясєв

Математичне моделювання та методи розрахунку теплотехнологічних процесів

Навчальний посібник

*Рекомендовано Вченою радою
Дніпропетровського національного університету
як навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей*

Дніпропетровськ
Видавництво
Дніпропетровського університету
2004

ББК 32.973.26 – 018я73
УДК 621.1:536.12
В 38

Рецензенти:

доктор технічних наук **Г. Т. Циганков**
(Український державний хіміко-технологічний університет)
доктор фізико-математичних наук **А. В. Павленко**
(Національна металургійна академія України)

Веселовський В. Б., Дреус А. Ю., Сясєв А. В.

В 38 Математичне моделювання та методи розрахунку теплотехнологічних процесів: Навч. посіб. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 248 с.

ISBN 966-551-138-6

Розглянуті питання, що стосуються побудови математичних моделей та методів розрахунку тепло технологічних процесів сучасного виробництва. Розглянуто приклади моделювання реальних технологічних процесів та представлені результати розрахунків, що відображають досвід досліджень, які виконані авторами.

Для студентів та аспірантів технічних спеціальностей, а також інженерно-технічних і наукових спеціалістів, що працюють у галузі теплотехнологій.

ISBN 966-551-138-6

ББК 32.973.26 – 018я73

© Веселовський В.Б., Дреус А.Ю., Сясєв А.В., 2004
© Видавництво Дніпропетровського
університету, 2004

Передмова

Особливими рисами сучасного ринку технологій є жорстка конкуренція, дефіцит та висока вартість енергоносіїв, постійно зростаючі вимоги до якості готової продукції та до екологічних показників технологічних процесів. Тому розвиток техніки обумовлюється необхідністю розробки і впровадження ресурсо- та енергозберігаючих технологій. Розв'язання названих питань неможливо без проведення всебічних наукових досліджень для вибору оптимального та обґрунтованого технічного рішення.

Світова практика доводить, що проведення такого роду досліджень багато в чому ґрунтується на методах математичного моделювання з проведенням розрахунків на ПЕОМ. Це дозволяє запобігти невиправдано великій кількості складних та дорогих експериментальних досліджень, значно скоротити час та вартість проектних робіт, проводити якісні та кількісні оцінки фізичних явищ з достатньою для інженерної практики точністю.

Практичне використання математичного моделювання і обчислювальних методів потребує певної кваліфікації дослідника, знань та вмінь. Само по собі використання комп'ютерної техніки, навіть за наявності на сьогоднішній день великої кількості спеціалізованих пакетів програм, ще абсолютно не гарантує отримання розв'язку тієї або іншої проблеми. Особливо важливим є вміння сформулювати математичну модель, яка буде адекватно описувати фізику процесу, правильно вибрати та коректно реалізувати метод розв'язання поставленої задачі, виконати аналіз та фізичну інтерпретацію одержаних результатів.

У даному посібнику відображено досвід авторів з математичного моделювання процесів термов'язкопружності, теплопровідності та конвективного теплообміну в конкретних виробничих технологіях. Увагу акцентовано на теплофізичних процесах тому, що саме вони багато в чому визначають коефіцієнт корисної дії, енергоємність і впливають на ефективність технології. Дуже важливою задачею, яка стоїть перед інженером-теплофізиком, є оптимізація такого роду процесів. Тому, на наш погляд, у процесі підготовки фахівців з даного напрямку необхідно приділяти особливу увагу цим питанням.

Посібник адресовано в першу чергу студентам старших курсів теплотехнічних, теплофізичних та теплоенергетичних спеціальностей, але може представляти інтерес для аспірантів та інших фахівців у галузі обчислювальної теплофізики. Передбачається, що читач вже знайомий з теорією тепло масообміну, теоретичною механікою, теорією чисельних методів. Автори не розглядають детально питання, які пов'язані з теоретичними аспектами побудови вихідних рівнянь, крайових умов або побудови чисельних схем і алгоритмів. З цих питань наводиться достатньо чисельний список літературних джерел. Основна мета посібника показати, як будуються і практично реалізуються обчислювальні методики при дослідженні реальних технологічних процесів.

Структурно посібник складається із вступу, восьми розділів, висновків, та списку літературних джерел.

Розділ 1 присвячено аналізу проблем енергозбереження, загальним поняттям про енергозберігаючі технології, методологічним основам їхнього проектування, розглянуті підходи до оцінки таких процесів з точки зору термодинаміки.

В розділі 2 розглядаються задачі про внутрішнє та зовнішнє нарощування порожнього кругового в'язкопружного циліндра з полімерного матеріалу, який знаходиться в умовах одноосового напруженого стану у випадку лінійного закону повзучості з метою моделювання процесу виготовлення деталей обертання методами нарощування. Проведені дослідження про формування напружено-деформованого стану в зростаючих тілах, а також про вплив на нього різних параметрів технологічного процесу показали, що запропонована модель адекватно описує реальний процес виготовлення деталей методами нарощування.

В розділі 3 приведені результати розробки математичної моделі змотки гарячекатаних смуг у рулони і розрахунку термопружного стану рулонованої сталі, алгоритму спільного розрахунку міжвиткових тисків, температурних полів і теплових напружень у рулонах. Такого роду розрахунки дуже важливі для вибору раціональної технології намотування рулонів.

Розділ 4 присвячено математичному моделюванню та методам розрахунку температурних полів у трубах при високочастотному зварюванні. Вдосконалення технології процесу високочастотного зварювання труб вимагає: встановлення взаємного зв'язку між технологічними параметрами (кутом сходження, довжиною зони оплавлення, температурою розігріву крайок, підведеною потужністю,

швидкістю переміщення труби). В розділі показано як застосовуються методи математичного моделювання для розв'язання цих питань.

В розділі 5 розглянуто дуже важливі питання, які відносяться до процесів металургійного виробництва, а саме – прогріву та відновленню залізрудних матеріалів у доменній печі. Специфіка тепломасообмінних процесів у доменних печах – наявність високорозвиненої поверхні кускового матеріалу, що піддається тепловій обробці, участь у теплообміні всіх видів теплопередачі, висока інтенсивність процесів теплообміну – визначає їхню важливу роль в ефективності технології в цілому, тим різноманітні складних процесів, що описуються теорією доменної плавки.

Високотемпературним металургійним процесам присвячено і розділ 6. Тут розглянуто аспекти математичного моделювання процесів конвективного теплообміну в рідких розплавах при виготовленні сталі. Запропоновані методики проведення чисельних експериментів, для вивчення можливостей керування гідродинамічними та тепловими полями в розплавах.

Проблеми моделювання термомеханічних процесів, які виникають при відцентровому литті деталей обертання, розглянуто в розділі 7. Адекватна постановка таких задач можлива лише в припущенні взаємного впливу температурних і механічних полів на параметри технологічного процесу. Розв'язанню цієї проблеми присвячено матеріали розділу.

Розділ 8 демонструє приклад застосування методів математичного моделювання для визначення теплового стану породоруйнуючого інструменту, при буренні гірничих пород, з метою пошуку оптимальних режимів теплових навантажень.

Розділи 1, 3, 4, 5 написано Веселовським В.Б. Розділи 2, 7 написано Сяєвим А.В. Розділи 6, 8 написано Дреусом А.Ю.

Більшість результатів впроваджені у виробництво, всі матеріали посібника пройшли багатократну апробацію на наукових конференціях та семінарах різного рівня. Автори вдячні рецензентам доктору технічних наук, професору Циганкову Г.Т., і доктору фізико-математичних наук, професору Павленко А.В. за коректні зауваження та рекомендації при рецензуванні посібника, та сподіваються, що посібник буде корисним для студентів і аспірантів відповідних спеціальностей, а також для наукових і інженерно-технічних працівників, що займаються питаннями моделювання теплотехнологічних процесів.

Р О З Д І Л 1

ОСНОВИ ПРОЕКТУВАННЯ ТА ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ТЕПЛОТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1. Сучасний стан проблеми ресурсо та енергозбереження

Енергоємність валового внутрішнього продукту за первинною енергією в Україні з 1990 р. виросла більш ніж на 40 %. Незважаючи на те, що цей показник на сьогодні більш ніж у 2 рази перевищує аналогічні показники країн Європейського Союзу і в 4,5 рази Японії, він має тенденцію до подальшого зростання [41]. Аналіз заходів, по енергозбереженню в найбільш енергозатратних галузях промисловості (чорній і кольоровій металургії, хімічній, нафтохімічній, мікробіологічній та ін.) показав, що тут відсутні рекомендації з оптимізації діючих виробництв за енергетичними критеріями. Тим часом відомо, що на заводах цих галузей частка енергоспоживання в технологічних процесах складає до 50 і більше відсотків у загальній витраті енергоресурсів. Крім того відомо, що, практично, всі виробництва цих галузей працюють у режимах далеких від оптимальних і, відповідно, мають великі резерви по скороченню енергетичних витрат. З безлічі можливих варіантів в економії, найбільш потенційною можливістю є підхід, пов'язаний з оптимізацією технологічних режимів діючих виробництв за енергетичними критеріями. Але така постановка питання приводить до часткової задачі – задачі оптимізації енерговитрат. Набагато важливішою є глобальна постановка: знайти умови проведення технологічного режиму, які дозволяють отримувати продукт із мінімальною собівартістю і заданою якістю. При оптимізації технологічних режимів у хімічних, металургійних, нафтопереробних та ін. виробництвах зручніше використовувати замість критерію «собівартість» критерій «вихід цільового продукту». Збільшення виходу приводить до відповідного скорочення витратних норм енергоресурсів, сировини, основних і допоміжних матеріалів, викидів у навколишнє середовище.

Таким чином, критерій «вихід цільового продукту» поєднує в собі енергетичний (скорочення норм по енерговитратах), економічний (скорочення витратних норм по енергетиці, сировини, відповідне скорочення собівартості продукції) і екологічний (скорочення норм по викидах у навколишнє середовище) критерії.

Для розв'язання задачі оптимізації в глобальній постановці необхідно мати математичну модель залежності комплексного критерію, що поєднує вихід продукту і вимоги до показників його якості, від параметрів технологічного режиму. Досвід використання відомих математичних методів показав, що їхнє застосування для ідентифікації й оптимізації реальних технологічних процесів приводить до, практично, нездоланих методичних і обчислювальних труднощів. Для рішення глобальної задачі – оптимального керування технологічними процесами з комплексу економічних, енергетичних, екологічних і споживчих критеріїв необхідно розробити, математично обґрунтувати, апробувати, провести експериментальну перевірку нової технології вивчення й удосконалення діючих виробництв. Сюди повинні входити методи ідентифікації, субоптимізації і технологічного аудиту. За допомогою методів ідентифікації зважується задача математичної формалізації досліджуваного об'єкта за експериментальними даними, що фіксуються в режимі нормальної експлуатації. Метод логічного програмування служить для синтезу рекомендацій з субоптимального керування процесом по заданих комплексом критеріях. За допомогою технологічного аудиту треба попередньо оцінити потенційні можливості процесу, які будуть реалізовані тільки за рахунок оптимізації технологічного режиму без додаткових витрат.

У 2001 р. на Алчевському металургійному комбінаті був проведений технологічний аудит для оцінки потенційних можливостей скорочення енерговитрат при виробництві чавуну в доменній печі № 5. Встановлено, що практично без додаткових витрат (на існуючому обладнанні, при використанні існуючих систем інформаційного забезпечення і керування) тільки за рахунок оптимізації технологічного режиму доменної плавки можуть бути досягнуті наступні показники: питома витрата коксу знижена на 36,3 кг/т чавуну (з 562,9 до 527,6 кг/т); витрата природного газу знижена на 3,6 м³ т чавуну (з 94 до 91,4 м³ т). При річному випуску 812175 т чавуну можна заощадити 28700 т коксу і 2900 тис м³ природного газу. Очікуваний прибуток заводу за рахунок економії енергоресурсів (коксу і природного газу) складає 9,5 млн. гривень на рік. У 2001 р. на Криворізькому металургійному комбінаті «Криворіжсталь» проведено технологічний аудит для оцінки потенційних можливостей скорочення енерговитрат при виробництві чавуну в доменній печі № 7. Встановлено, що тільки за рахунок оптимізації технологічного режиму доменної плавки питому витрату коксу можна знизити на 39,3 кг/т чавуну (з 470,1 до 430,8 кг/т). При річному випуску 1035000 т може бути заощаджено

40675 т коксу. Очікуваний прибуток заводу за рахунок економії коксу складає 14,2 млн. гривень на рік. Практичне застосування технології вивчення й оптимізації діючих виробництв дозволяє істотно скоротити видаткові норми по енергоспоживанню і сировині, знизити собівартість і підвищити якість продукції, збільшити продуктивність, і т. п. більш ніж у 100 діючих областях промисловості.

У зв'язку з різким спадом промислового виробництва зараз енергетична потужність ТЕС України завантажена тільки на 35 %. Це створює ілюзію про достатність запасів генеруючих потужностей. Однак працююче обладнання енергетичного комплексу використовується на грані технічних можливостей. 96 % обладнання ТЕС уже відробило свій ресурс, а 73 % досягло граничного рівня. Сьогодні з 36 млн кВт·рік установленої потужності ТЕС тільки 17 млн. кВт·рік можуть нести навантаження.

Одночасно тануть надії й на атомну енергетику. Обумовлено це двома причинами: по-перше, тим, що теплоенергетичний комплекс не в змозі забезпечити її необхідними маневровими та піковими потужностями, а по-друге, тим, що значна кількість блоків АЕС уведена в експлуатацію ще в 1980 — 1983 рр. і наближається час їхнього виходу з експлуатації. Заміна на нові пов'язана з гігантськими капітальними витратами, що перевищують 2 тис. \$ за 1 кВт встановленої потужності.

Значно погіршує ситуацію і повернення технічної політики енергозбереження країни в бік роздільного виробництва теплової та електричної енергії (теплової – в котельнях, а електричної на ТЕС), у зв'язку з чим все більше теплоенергоцентралей (ТЕЦ) перетворюються на котельні. При цьому розробляються і здійснюються на практиці проекти теплозабезпечення окремих міст і навіть великих районів, які використовують природний газ як паливо. Крім того, виростають котельні в різних організаціях і на підприємствах, у житлових кварталах і окремих багатоповерхових будинках, а в країну надходить котельне обладнання закордонного виробництва. Такий розв'язок проблеми тепло-забезпечення країни не тільки прив'язує її до імпортного виробника, але й приводить до значного зростання витрат палива.

Усе вище сказане вимагає дій як в організаційному, так і в технічному напрямках. Подальше зволікання приведе до виходу з ладу генеруючого обладнання прискореними темпами, а відповідно й до росту дефіциту енергії. За оцінкою фахівців це приведе до того, що вже в 2020 р. практично всю електроенергію Україна буде змушена імпортувати.

Оздоровлення енергетичного комплексу країни вимагає великих капіталовкладень. За попередньою оцінкою, необхідно 50 млрд \$.

Для вирішення енергетичної проблеми необхідно в найкоротший термін створити технічну базу нових технологій, які забезпечили б високу термодинамічну ефективність, високу екологічну чистоту і вимагали б порівняно низьких капітальних витрат.

В Японії після першої нафтової кризи були прийняті заходи для енергозбереження, які привели до зниження на 35 % енергоемності валового національного продукту. Однак, за останні сім років енергоспоживання збільшувалося в середньому на 3,1 % у рік. Тому японський уряд 1993 р. переглянув «Закон про енергозбереження». Відповідно до нової редакції закону, Міністерство міжнародної торгівлі і промисловості Японії (ММТП) повинно встановлювати і повідомляти основні принципи політики, спрямованої на всебічне стимулювання раціонального енерговикористання, а основні енергокористувачі повинні вжити заходів щодо раціоналізації енерговикористання відповідно до цієї політики.

Нова енергетична стратегія Російської Федерації – стратегія енергетичної безпеки – першорядне значення надає підвищенню ефективності використання паливно-енергетичних ресурсів (ПЕР) на всіх стадіях – від виробництва до споживання. В даний час мінімум 40 – 45 % усіх вироблених енергоресурсів в Російській Федерації витрачаються неефективно. При поступовому відродженні промислових підприємств з можливим перепрофілюванням і збереженням енергоемності продукції що випускається без істотного вдосконалювання технологічних процесів ростиме попит на енергоносії. Забезпечення його може виявитися неможливим ні фізично, ні економічно. В умовах промислової кризи очевидна важливість енергозбереження для подолання економічної та енергетичної кризи. Це збільшується орієнтацією промисловості на підготовку напівфабрикатів і сировини. Частка виробництва неенергоемних продуктів дуже мала. Тому енергозбереження є магістральним шляхом розвитку економіки, енергетики, промисловості і житло-побутового сектору. Енергозбереження – перший етап конструктивної перебудови економіки. Його основна теза – «Енергозбереження – це спосіб життя». В будівельній індустрії з її різноманітним підприємствам, технологій, що здебільшого застаріли і не відповідають сучасному технічному рівню, маються необмежені можливості економії енергії.

Промисловість будівельних матеріалів є одним з великих споживачів природного газу. На скляних заводах у найбільших обсягах його споживають скловарні печі. ККД при цьому часто не перевищує 35 – 40 %. На цегельних заводах і заводах з виробництва керамічних виробів широко застосовуються печі випалу і сушильні установки. Втрати теплоти з вихідними газами складають тут: у печі – 63 %, у сушильній установці – 52 %. На сьогоднішній день розроблені комплексні установки для утилізації теплоти продуктів згоряння, що впроваджені й ефективно працюють на ряді підприємств. Природний газ широко застосовується при виробництві санітарно-технічних виробів – чавунних і сталевих ванн, піддонів, раковин і т. п. Як показали теплотехнічні обстеження (енергоаудит) великої кількості підприємств такого профілю, ККД випалювальних печей не перевищує 30 %, а втрати теплоти з газами, що виходять, складають 45 – 50 %. У навколишнє середовище через теплоізоляцію «на вулицю» йде до 20 % тепла. Ресурси енергозбереження більш дешеві, ніж будівництво нових потужностей. Відомо, що на виробництво кожної тонни умовного палива потрібно в 3 – 4 рази більше інвестицій, чим на її заощадження.

За даними Центру ООН по населених пунктах використання енергії в житлово-комунальному секторі складає 40 % від загальної кількості, вироблюваної в світі. Викиди в атмосферу окислів сірки і вуглекислого газу від експлуатації житла складають 70 % і 50 % відповідно. Однак при використанні традиційних і сучасних екологічних технологій будинок може не тільки не порушувати балансу в навколишньому середовищі, але і сприяти його відновленню.

Часто ставиться два питання: де взяти енергію (електричну, теплову) і скільки це буде коштувати? Зовсім не задається питання: як раціонально й ефективно використовувати енергію? Без цього головного питання інші два часто стають просто нездоланною перешкодою. Тільки вирішивши головне питання, можна розглядати інші. Тоді вони будуть не такими нездоланними.

Перше, з чого починається **енергозбереження** – високий термічний опір зовнішніх конструкцій. Це найбільш ефективне інвестування в **енергозбереження**! Не забезпечивши цього параметра будинку, безглуздо говорити про економію енергії або використання Сонця для опалення. Передбачається, що термічний опір стін повинен бути не менше $R=6 \text{ (м}^2 \text{ К)}/\text{Вт}$. Згідно останніх змін СНіП для одноквартирного будинку в кліматичних умовах Новосибірська, він повинен бути $R=3 \text{ (м}^2 \text{ К)}/\text{Вт}$. Якщо ж побудувати будинок з термічним опором R не менш 10, то

створюються передумови опалення будинку від роботи звичайних побутових приладів, лампочок освітлення і тепла, людей, що знаходяться в ньому.

Друге. Енергію варто підрозділяти за якістю на енергію високої якості і більш низького гатунку. Наприклад, електрична енергія в стабільній мережі 220 V 50 Гц – це енергія високої якості. Її доцільно використовувати тільки там, де без неї неможливо обійтися: холодильник, комп'ютер, телевізор, насос, побутові прилади з електродвигунами. Для освітлення чи для роботи чайника й електроплити зовсім не обов'язково мати перемінний струм високої якості. Тут може бути низький гатунок електроенергії і постійний струм. Деякі побутові прилади мають колекторні двигуни (наприклад, пилосос) і тому вони можуть працювати і від 220 В постійного струму. Зовсім нераціонально використовувати електрострум для опалювання. При одержанні електричної енергії на теплових станціях коефіцієнт корисної дії (ККД) по електриці складає близько 30 %. Автономні дизель-генератори мають ККД ~ 30 %. Тому спалювати органічне паливо для вироблення електричної енергії, що використовується на опалення – нерозумно. Більш ефективним у цьому випадку буде безпосереднє спалювання органічного палива для одержання тепла на опалення.

Третє. Акумуляування енергії – теплової, електричної. Акумуляування енергії – серйозний фактор економії енергії в автономному будинку. Воно дозволяє перерозподіляти одержання і споживання енергії в часі. Наприклад, Сонце гріє вдень, а максимальне навантаження на опалення вночі (добове акумуляування), чи влітку надлишок сонячного тепла, а взимку недолік (сезонне акумуляування). Акумуляування дозволяє накопичувати енергію маленькими порціями, а віддавати – великими. Часта помилка: наприклад, максимальне споживання електричної енергії 5 кВт, і замовник говорить, що йому потрібна електрична станція потужністю 5 кВт. А це – відповідна вартість. Крім того, станція повинна працювати саме тоді, коли необхідна ця потужність. Але така потужність потрібна не увесь час, а тільки на якийсь період? Тому при наявності акумуляування електричної енергії, потужність електричної станції може бути значно меншою, отже, дешевшою. Крім цього, при споживанні електричної енергії станція може і не працювати, а включатися іншим часом. У цьому випадку, електричною станцією вже може бути гідрогенератор чи сонячний модуль, чи міні ГЕС, чи генератор із двигуном внутрішнього згоряння, що працює на біогазі.

Принцип акумулювання поширюється так само і на теплову енергію. Надлишок тепла скидається в тепловий акумулятор і споживається в міру потреби. Теплові акумулятори бувають водні, ґрунтогравійні і хімічні. Перші два являють собою частини конструкції будинку. Хімічні ж – використовують спеціальні речовини, що зберігають тепло у вигляді хімічних зв'язків. Вони прекрасно зберігають великі кількості теплової енергії багато місяців без втрат. Наприклад, у 3 м³ хімічної речовини можна за літо накопити достатню кількість тепла на весь наступний опалювальний період.

1.2. Термодинамічні критерії ефективності та основні шляхи зниження енергосировинних витрат

Ціни на сировину поступово зростають, і з кожним роком все більш актуальною стає задача зниження витрат сировини та енергоресурсів. Тому, поряд із застосуванням оцінки ефективності виробництва за питомими витратами сировини та енергії на одиницю продукту, необхідно використовувати критерії досконалості технологічних процесів і установок, що базуються на складанні теоретично необхідних і дійсних витрат.

У більшості випадків для оцінки ефективності технологічних процесів досить наслідків, що випливають з першого закону термодинаміки. І тільки для комбінованих енерготехнологічних установок, що виробляють продукцію й електроенергію, необхідні критерії, отримані на базі ексергії, тобто враховуючі наслідок другого закону термодинаміки. Але для детального аналізу технологічних процесів і виявлення всіх видів втрат необхідний ексергетичний аналіз.

З першого і другого законів термодинаміки випливає, що в будь-якому технологічному процесі енергія не губиться, але при переході деяких її видів з однієї форми в іншу неминуче погіршується її якість, що характеризується технічною працездатністю, чи ексергією, тобто максимальною кількістю корисної механічної роботи, яку можна отримати, використовуючи цю енергію. Таким чином, у будь-якому реальному процесі губиться ексергія і пропорційно цим втратам зростає ентропія. Втрати ексергії дорівнюють нулю тільки в ідеальному термодинамічно зворотньому процесі, тобто, протікаючому з нескінченно малою швидкістю і з отриманням максимально корисної роботи [4; 6; 41].

Усі технологічні процеси в більшій чи меншій мірі термодинамічно незворотні. Це відноситься і до хімічних реакцій, незалежно від ступеня хімічної зворот-

тності. Зменшити енерговитрати при здійсненні будь-якого процесу принципово можна двома шляхами: зменшуючи рушійну силу процесу (зменшення термодинамічної незворотності); поліпшуючи кінетику процесу (розвиток поверхонь контакту і теплообміну, збільшення кінетичних коефіцієнтів). Обмеження звичайно зв'язані із збільшенням розмірів апаратів, хоча мають істотні резерви економії енергії не зв'язані з розмірами. При різних методах оптимізації, заснованих на мінімізації функції приведених витрат, саме і досягається оптимальний компроміс між енерговитратами (рушійні сили) і капітальними витратами (розміри апаратів).

У багатьох хімічних виробництвах як сировиною, так і первинним енергоносієм є вуглеводні. Тому витрати на сировину і енергію можна об'єднати в одну категорію – енергосировинні витрати, які можна вимірювати в одиницях енергії, нафтового чи еквівалента умовного палива. Від їхньої величини залежить в основному економічність виробництв.

Ефективність виробництв варто оцінювати на основі загального енергосировинного балансу технологічної установки. Баланс складається на базі енергії сировини і первинного палива [6; 41]

$$G_c E_c + B E_m + \sum b_{\alpha} Q''_m \pm Q_{men} b_{men} Q''_m = \sum G_i E_i + \sum G_j E_j + Q_{nom} \quad (1.1)$$

або

$$G_c E_c + B Q'' + \sum \eta_{men} = \sum G_i E_i + \sum G_j E_j + Q_{nom}, \quad (1.1')$$

де G_c і B – витрата сировини і палива, G_i – вихід продуктів переробки, G_j – втрати продуктів, Q_{men} – підведена (+) або відведена (–) теплова енергія, E – підведена електроенергія, Q_{nom} – теплові втрати, b_e і b_{men} – питомі витрати палива на виробництво електричної і теплової енергії, η_e , $\eta_{теп}$ – ККД отримання електричної і теплової енергії.

Баланс складений на основі сповненої енергії підведених на установку потоків $E = Q'' + i$, що є сумою нижчої теплотворної здатності (Q'') і ентальпії потоку (i). Іншими складовими енергії (кінетичної і потенційної) в більшості випадків можна знехтувати.

Призначенням ряду хімічних установок є отримання з вуглеводної сировини заданих продуктів чи напівпродуктів, споживча цінність яких визначається придатністю для наступного синтезу чи інших цілей. Однак аналіз показує, що майже завжди їхня цінність пропорційна вкладеній енергії, тобто, теплотворній здатності.

Для розрахунку ефективності отримання продуктів необхідно порівняти теоретичні (мінімально можливі) витрати з дійсними. З цією метою введемо поняття теоретичної енергії одержання продукту. Тоді як сировиною є пальні речовини (вуглеводні), корисна енергія яких визначається теплотворною здатністю, то в теоретичну енергію отримання продукту повинна входити ця величина. Крім того, повинні враховуватись енергія реакції, енергія виділення цільового продукту і теплотворна здатність побічних продуктів. Мінімальна кількість сировини витрачається при повному (або максимально можливому) перетворенні сировини в цільовий продукт; при цьому мінімальна і теплота поділу. Таким чином, за теоретичну енергію, необхідну для отримання нафтохімічного продукту, приймаємо теплотворну здатність мінімальної (стехіометричної) витрати сировини плюс ентальпію реакції і теоретичну теплоту поділу за винятком теплотворної здатності пального побічного продукту ($G_n Q''_n$)

$$E_{теор} = G_c^{\min} Q''_n + \Delta H + Q_{разд}^{\min} - G_n Q''_n, \quad (1.2)$$

де $G_c^{\min}$ – мінімальна (стехіометрична) витрата сировини на одиницю отриманого продукту, ΔH – ентальпія реакції, G_n – вихід побічного пального продукту, $Q_{разд}^{\min}$ – мінімальна теплота поділу.

Для оцінки економічності установок хімічної переробки вуглеводів нами введений енергосировинний ККД, що визначається як відношення теоретичної (мінімально необхідної) енергії для отримання заданого продукту (чи продуктів) до енергії, витраченої в дійсності

$$\eta_{эс} = \frac{E_{теор}}{\sum E_{подв}} = \frac{G_c^{\min} Q''_n + \Delta H - G_n Q''_n + Q_{разд}^{\min}}{G_c Q''_c + \sum Q_{ni} / \eta_{ni} - \sum G_{ni} Q''_{ni}}, \quad (1.3)$$

де $\sum G_{ni} Q''_{ni}$ – сумарна теплотворна здатність побічних продуктів. Знаменник являє сумарну підведену енергію в еквіваленті первинного палива.

Якщо знехтувати мінімальною теплотою поділу, теоретична енергія отримання продукту стає рівною теплотворній здатності отриманого продукту

$$E_{теор} = G''_{np}. \quad (1.4)$$

Енергетичний ККД технологічної установки ($\eta_{эн}$) являє собою відношення теоретично необхідної кількості енергії (крім сировини) для здійснення процесу до сумарних енерговитрат

$$\eta_{\text{эн}} = \frac{E_{\text{min}}}{E_n} = \frac{E_{\text{min}}}{BQ_m'' \pm Q_{\text{мен}} / \eta_{\text{мен}} + \mathcal{E} / \eta_{\text{э}}}. \quad (1.5)$$

Важливим показником є коефіцієнт енерговитрат, тобто відношення енергетичних витрат до сировинного

$$\eta_{\text{эн}} = \frac{E_{\text{эн}}}{E_c} = \frac{BQ_m'' \pm Q_{\text{мен}} / \eta_{\text{мен}} + \mathcal{E} / \eta_{\text{э}}}{G_c Q_c''}. \quad (1.6)$$

Показником технологічної ефективності процесу є коефіцієнт використання сировини

$$\eta_c = \frac{G_c^{\text{min}}}{G_c}, \quad (1.7)$$

тобто, відношення мінімально можливої (stechiometric) кількості сировини (G_c^{min}) до дійсного.

Використовується також поняття коефіцієнта втрат, тобто відношення енергії безповоротньо загублених продуктів до енергії сировини

$$\alpha = \frac{E_n}{E_c} = \frac{G_{\text{ном}}}{G_c}. \quad (1.8)$$

Енергосировинний ККД є функцією розглянутих вище коефіцієнтів і може бути записаний

$$\eta_{\text{эс}} = \frac{1 - \alpha}{1 + \beta} = \frac{\eta_c + \beta \eta_{\text{эн}}}{1 + \beta}. \quad (1.9)$$

Енергосировинний ККД сучасних установок знаходиться в межах 30 – 60 % і не досягає свого граничного значення, отже мають ся істотні резерви підвищення економічності процесів.

Для енерготехнологічних установок, що роблять хімічні продукти і виробляють електроенергію енергосировинний ККД запишеться

$$\eta'_{\text{эс}} = \frac{E_{\text{теор}}}{\sum E_{\text{подв}}} = \frac{E_{\text{теор}} + \mathcal{E} / \eta_{\kappa}}{G_c Q_c'' + BQ_m'' \pm Q_m / \eta - \sum G_n Q_n''}, \quad (1.10)$$

де E – кількість виробленої електроенергії на одиницю хімічного продукту, η_{κ} – ККД циклу Карно.

Представлений ККД (1.10) особливо корисний для порівняння енерготехнологічних установок, що роблять подібні хімічні продукти.

З урахуванням уведених вище коефіцієнтів, а також коефіцієнта вироблення електроенергії $\gamma = E/E_c$ отримуємо наступне вираження

$$\eta'_{\text{эс}} = \frac{\eta_c + \beta\eta_{\text{э}} + \gamma / \eta_{\text{к}}}{1 + \beta}. \quad (1.11)$$

При обчисленні ККД циклу Карно за верхній температурний рівень приймається теоретична температура згорання вуглеводородної сировини.

Представлені вище ККД нафтохімічних установок не враховують енергетичної якості сировини, палива і підведеного тепла, тобто не приймаються до уваги наслідки другого принципу термодинаміки. В більшості випадків для аналізу технологічних установок цілком достатньо використання ККД, представленого рівняннями (1.3 – 1.11). Облік потенціалу (температурного рівня) спожитого або відданого тепла не вносить помітних змін в оцінку роботи технологічної установки. Облік якості споживаної і виробленої енергії важливо для енергетичних і комбінованих енерготехнологічних установок.

Ефективність технологічних установок і підприємства в цілому визначається представленими вище критеріями ефективності (ККД). Однак для детального аналізу фізико-хімічних процесів необхідний ексергетичний аналіз, що враховує наслідок другого закону термодинаміки.

При аналізі хімічних, масообмінних та інших процесів використовується коефіцієнт термодинамічної зворотності, що являє собою відношення мінімальної роботи процесу до дійсного, якщо робота витрачається [4; 6; 41]

$$\eta_{\text{мо}} = \frac{L_{\text{мін}}}{L_{\text{дей}}}, \quad (1.12)$$

або отриманої роботи до максимально можливого, якщо робота виробляється

$$\eta_{\text{мо}} = \frac{L_{\text{нол}}}{L_{\text{мак}}}. \quad (1.13)$$

Максимальна кількість роботи, яку може виконати речовина, що знаходиться у визначеному стані, при зворотньому переході в стан рівноваги з навколишнім середовищем, визначається його ексергією, [6]

$$L_{\text{мак}} = ex = I - I_0 - T_0(S - S_0), \quad (1.14)$$

де I – ентальпія, S – ентропія, T_0 – температура навколишнього середовища. Втрата роботоздатності, тобто робота, в дійсності витрачена на проведення процесу, визначається відповідно до рівняння Гюї-Стодолі

$$L_{\text{дей}} = T_0 \sum G_i \Delta S_i, \quad (1.15)$$

де $G_i \Delta S_i$ – сумарне зростання ентропії.

Якщо для проведення процесу витрачається не робота, а теплова енергія, то теоретично необхідна кількість її визначається з умови, що втрата роботи компенсується теплом за допомогою зворотнього циклу Карно

$$Q_{\min} = \frac{T}{T - T_0} T_0 \Delta S, \quad (1.16)$$

де T – температура агента, що гріє, чи процесу. Іноді застосовують абсолютний ексергетичний ККД, що представляє відношення сумарної ексергії всіх потоків (матеріальних і енергетичних) на виході з розглянутої системи ($\sum ex_{\text{вих}}$) і на вході ($\sum ex_{\text{вх}}$) [41]

$$\eta_{ex} = \frac{\sum ex_{\text{вих}}}{\sum ex_{\text{вх}}} = \frac{\sum ex_{\text{вих}} - D_{ex}}{\sum ex_{\text{вх}}}, \quad (1.17)$$

де D_{ex} – ексергетичні втрати.

При переробці газоподібних вуглеводнів їхня хімічна ексергія може бути розрахована за наближеними співвідношеннями [6]:

$$ex_x = Q'' (1,0334 + 0,0183 \frac{H}{C} - 0,0694 \frac{1}{C}) = 0,95 Q^e, \quad (1.18)$$

для рідких вуглеводнів –

$$ex_x = Q'' (1,0406 + 0,0144 \frac{H}{C}) = 0,975 Q^e, \quad (1.19)$$

де Q'' і Q^e – нижча і вища теплотворні здібності вуглеводнів; $\frac{H}{C}$ – відношення водень: вуглець.

Загальна ексергія речовини може бути визначена як сума фізичної і хімічної ексергії.

Основними елементами технологічних схем є реактори, печі, масообмінні колони, теплообмінники, сепаратори, компресори, насоси, двигуни. Однією з основних задач термодинамічного аналізу є визначення ексергетичних втрат у цих елементах технологічних схем. За ексергетичним методом загальні втрати (D_{ex}) рівні

$$D_{ex} = \sum ex_{\text{вх}} + \sum ex_q + L + \Delta ex_x - \sum ex_{\text{вих}}, \quad (1.20)$$

де ex_q – ексергія підведеного тепла, Δex_x – зміна хімічної ексергії.

За ентропійним методом

$$D_{ex} = \sum ex_{\text{вх}}^i, \quad ex_{\text{вих}} = ex_{\text{вх}} - \sum D_{ex}^i. \quad (1.21)$$

Методика розрахунку ексергетичних втрат представлена в [6; 41].

Після визначення ексергетичних втрат усіх апаратів розраховуються локальні коефіцієнти втрат

$$\Omega_i = \frac{D_{ex}^i}{\sum ex_{ex}}, \quad (1.22)$$

і сумарний коефіцієнт втрат

$$\Omega = \sum \Omega_i. \quad (1.23)$$

Коефіцієнт термодинамічної зворотності (1.12), ексергетичний ККД (1.17) і коефіцієнти втрат (1.23) дають досить повне уявлення про ефективність технологічної схеми та її окремих елементів.

Для енергетичних і комбінованих енерготехнологічних установок важливий облік якості споживаної і виробленої енергії. Тому для оцінки їхньої ефективності введено енергосировинний ККД на базі ексергії, що представляє відношення мінімально необхідної ексергії для проведення технологічного процесу плюс виробленої електроенергії до підведеної ексергії

$$\eta_{\varepsilon c}^{ex} = \frac{ex_{\min} + \mathfrak{E}}{\sum ex_{\text{пoдa}}} = \frac{G_c^m ex_c + \Delta ex + L_{\min} + \mathfrak{E} - \sum G_n ex_n}{G_c ex_c + B ex_m + ex_{\text{мен}} - \sum G_{ni} ex_{ni}}, \quad (1.24)$$

де ex_c , ex_m , ex_n – ексергія сировини, палива і побічних продуктів.

Збільшення ексергії реакції визначається

$$\Delta ex = \Delta H - T_0 \Delta S.$$

Ексергія підведеного (відведеного) тепла знаходиться через ККД циклу Карно

$$ex_{\text{мен}} = Q_m \eta_k = Q_m (1 - T_0 / T),$$

де T – температура теплоносія.

У більш короткій формі енергосировинний ККД можна записати

$$\eta_{\varepsilon c}^{ex} = \frac{ex_{\min} + \mathfrak{E}}{ex_{\text{пoдa}}}, \quad (1.25)$$

де $ex_{\min}$ – мінімально необхідна для проведення процесу ексергія, $ex_{\text{пoдa}}$ – підведена ексергія.

Таким чином, енергосировинна ефективність будь-якої технологічної установки може бути оцінена одним критерієм – енергосировинним ККД. Однак при аналізі технологічних процесів і схем необхідно досліджувати всі складові енер-

госировинних витрат, і тому потрібно визначати і коефіцієнти, що враховують їхню ефективність. Наведена система критеріїв технологічних установок дозволяє досить кваліфіковано оцінювати економічність. Для кожного технологічного процесу, реалізованого на конкретному обладнанні, маються оптимальні значення споживання сировини й енергії, і подальше їхнє зниження економічно не виправдане. Оптимальним є значення енергосировинних витрат, що відповідає максимуму умовного доходу (чистого прибутку)

$$D_y = D - (C + eK), \quad (1.26)$$

тобто, різниці вартості товарної продукції (доходу D) і приведених витрат $(C + eK)$: C – собівартість, K – капітальні вкладення, e – нормативний коефіцієнт окупності. Значення енергосировинного ККД в області максимуму умовного доходу є показниками технологічної досконалості установки чи підприємства.

В технологічних процесах сировина й енергія витрачаються, головним чином, на здійснення ендотермічних хімічних перетворень і процесів, що протікають при підвищених температурах, виділення проміжних і цільових продуктів, охолодження, стиск і переміщення.

При переробці вуглеводної сировини мають місце ендотермічні й екзотермічні реакції, що протікають як зі зменшенням, так і зі збільшенням обсягу реагуючої суміші. Теплота екзотермічних процесів, а також фізичне тепло продуктів ендотермічних реакцій, можуть використовуватись. Але при цьому маються труднощі, зв'язані з суперечливими вимогами технології й енергетики. З погляду енергетики, для використання теплоти реакції, процес бажано проводити при підвищеній температурі. Але якщо екзотермічна реакція зворотня, то для зсуву рівноваги реакції вправо необхідно знижувати температуру; при цьому швидкість реакції зменшується і необхідно застосовувати низькотемпературні каталізатори. Прикладом можуть служити реакції конверсії оксиду вуглецю водяною парою і синтезу аміаку. Зниження температури процесу приводить до зниження ступеня утилізації тепла.

Для кожного конкретного процесу є межа поліпшення його ефективності, і в недалекому майбутньому всі існуючі процеси, установки і виробництва можуть бути оптимізовані. Подальше підвищення ефективності виробництв буде можливо лише при впровадженні нових технологічних процесів і комбінуванні відомих, тому що комбінований процес часто має нову якість.

Взаємозв'язок процесів при комбінуванні може бути різним: від дуже тісного до слабкого. І за цією ознакою легко розрізняються три ступені комбінування, що ми будемо називати вищим, середнім і нижчим.

Вищим ступенем комбінування є здійснення в одному апараті декількох послідовно чи паралельно протікаючих хімічних чи фізичних процесів, тобто скорочується кількість стадій переробки. При цьому досягається найбільший ефект. Економія енергії відбувається за рахунок ліквідації проміжних нагрівів і охолоджень, проміжного розділу продуктів, переміщення реагентів і зменшення загального обсягу апаратури.

До середнього ступеня комбінування відноситься технологічне комбінування, суттю якого є здійснення ряду процесів в окремих апаратах, технологічно зв'язаних між собою матеріальними і тепловими потоками. Енергія заощаджується за рахунок ліквідації проміжних нагрівів і охолодження, використання тепла одних процесів іншими. Однак у цьому випадку необхідна витрата енергії для переміщення проміжних продуктів.

Нижчий ступінь комбінування – це розміщення ряду простих чи комбінованих установок на одній площадці та обмін між ними продуктами без проміжних ємностей «напрямую», іноді і без проміжного охолодження; обміну теплом між установками немає. Ця ступінь приводить до значного скорочення капітальних вкладень і більш повного використання сировинних ресурсів, наприклад, вуглецю і водню в зазначених виробництвах. Але економія енергії при такому комбінуванні невелика.

Комбіновані установки, в енергетичному відношенні, мають знижену загальну надійність, тому що вихід з ладу одного елемента може привести до зупинки всього комплексу. Тому коефіцієнт надійності окремих апаратів, процесів і установок повинен бути високим. Велика складність схеми забезпечує енергетичну ефективність, але знижує надійність і гнучкість роботи. Тільки при високій надійності всієї системи економія від комбінування буде вищою, ніж збитки від простою. Це варто враховувати при створенні комбінованих установок. Комбінування, практично, не дасть позитивного ефекту, якщо економія енергії не перевищує 10 % і не має істотного зниження капітальних вкладень.

Важливим фактором економії енергії є підвищення ступеня термодинамічної досконалості всієї технологічної схеми виробництва. Тому при синтезі схем необхідний детальний термодинамічний аналіз. Звичайно для оцінки ефектив-

ності використовуються критерії у вигляді техніко-економічних показників, але вони не можуть повною мірою розкрити резерви підвищення економічності.

Під оптимізацією діючих виробництв розуміється визначення найбільш вигідного балансу продуктивності, якості продуктів, їхнього розподілу й експлуатаційних витрат. До цього часу створені і достатньо ефективно працюють системи оптимального керування окремими процесами й апаратами (печами пиролізу, ректифікаційними колонами), а також вузлами технологічних установок. Є значні успіхи в оптимізуючому керуванні складними технологічними схемами.

Для економії енергоресурсів визначальним є як вироблення всіх видів енергії з високим ККД, так і їхнє раціональне використання. Визначне значення має збільшення потужності установок і підприємств. Це зв'язано зі зменшенням питомих втрат тепла від апаратів і трубопроводів, підвищенням ККД машин, більш раціональним розподілом і витратою енергоресурсів [9].

Високоекономічною є замкнута енергетична система технологічної установки, що працює на енергії утилізованого тепла на високому і середньому температурних рівнях. Прикладом служать етиленові, метанольні й аміачні установки.

До помітної економії енергії приводить раціональне використання вторинних енергетичних ресурсів (ВЕР), до яких відносяться пальні речовини, теплова і потенційна енергія продуктів і відходів, не використана в самому агрегаті чи установці. Кількість ВЕР, що утворюються характеризує недосконалість процесу. Багато сучасних технологічних установок працюють без виходу ВЕР за замкнутим енергетичним циклом. Однак у деяких випадках вихід ВЕР неминучий, і тоді необхідно більш повне і кваліфіковане їхнє використання.

Під високотемпературним технологічним процесом прийнято розуміти технологічний процес, при якому істотне значення має променистий теплообмін, а в оброблюваному матеріалі відбуваються фазові переходи. Типовими прикладами високотемпературних технологічних процесів (ВТП) є: лазерна і електронно-променева технології, плазмова обробка, отримання тонких плівок і вирощування монокристалів, дифузійні процеси, іонна імплантація та ін.

Для високотемпературної технології характерні наступні особливості:

- істотна нерівноважність процесів, зв'язана з нерівномірним розподілом температури на окремі частини системи і з її зміною згодом;
- високі швидкості нагрівання й охолодження окремих компонентів системи;

- наявність складного теплообміну (теплопровідність у твердій і рідкій фазах, випромінювання і масопереніс);
- існування декількох різних фаз (твердої, рідкої, газоподібної), співвідношення між якими змінюється;
- розвиток плазмених явищ і зв'язані з цим особливості теплопереносу;
- наявність могутніх джерел енергії (рівень необхідної енергії може змінюватися в широких межах у залежності від конкретного процесу).

Виділення теплоти при високотемпературній технології йде, як правило, на стадіях фіксації продукту (кристалізації масивних тіл, остигання крапель розплаву, конденсації пари і т. п.).

При аналізі процесів впливу висококонцентрованих джерел енергії на матеріали використовують поняття «критична інтенсивність» (або «критичний питомий потік»). Використовуючи поняття критичної інтенсивності, технологічні процеси можна класифікувати і розглядати послідовно при переході від меншої критичної інтенсивності до більшої: $q^{(1)}$ – перша критична інтенсивність, необхідна для досягнення температури плавлення; $q^{(2)}$ – друга критична інтенсивність, що відповідає досягненню температури кипіння; $q^{(3)}$ – третя критична інтенсивність, вище якої процеси випару переважають над переносом тепла в конденсоване середовище.

В останні роки високотемпературна технологія, що використовує висококонцентровані джерела енергії (технологічний електронний промінь, лазерне випромінювання, потоки плазми та ін.), знайшла широке застосування в електронній і машинобудівельній промисловості для розв'язку таких задач, як зварювання, різання, отримання отворів, термообробка, хіміко-термічна обробка, оплавлення поверхневого шару, лазерно-плазмена обробка, осадження плівок, зонне очищення, вирощування монокристалів та ін.

Технологічний процес можна представити у вигляді схеми, показаної на рис. 1.1. Технологічна камера (вакуумна або газонаповнююча, реактор, піч і т. п.) призначена для підтримки заданих технологічних режимів у замкнутому просторі, для виключення впливу навколишнього середовища на технологічний процес, для збору і відводу відходів технологічного процесу. Вона має систему датчиків контролю і керування технологічним процесом. Слід зазначити, що для ряду технологічних процесів (наприклад, таких як зварювання у відкритій атмосфері) технологічна камера відсутня. Основні енергетичні джерела використовуються безпосе-

редньо в технологічних операціях (наприклад, при зварюванні, різанні, випаровуванні та ін.). Допоміжні енергетичні джерела використовуються для створення визначених температурних режимів деяких точок технологічного апарата (наприклад, для підігріву підкладок при нанесенні на них тонких плівок). Матеріали і заготівлі для отримання готового виробу утворюють матеріальні потоки. Технологічні відходи складаються з енергетичних і матеріальних.

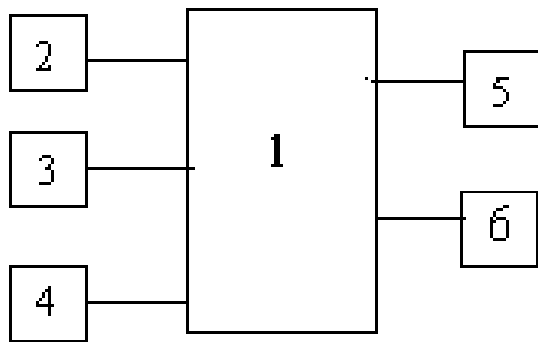


Рис. 1.1. Блокова структура технологічного процесу:

1 –технологічна камера; 2 – основні енергетичні джерела; 3 – допоміжні енергетичні джерела; 4 – матеріальні потоки; 5 – готовий продукт; 6 – технологічні відходи

Основні і допоміжні енергетичні джерела, матеріальні потоки мають свої автономні системи регулювання й управління, що можуть бути зв'язані з системою контролю технологічного процесу, що дозволяє здійснювати керований у часі технологічний процес. У протилежному випадку, якщо такий зв'язок відсутній, він контролюється за кінцевим продуктом. Отже, ВТП доцільно розглядати як велику систему, що містить у собі наступні елементи: технологічну камеру, основні енергетичні джерела, допоміжні енергетичні джерела, матеріальні потоки, готовий продукт, технологічні відходи, систему керування і контролю зазначеними вище підсистемами і всім технологічним процесом у цілому.

Принциповою особливістю високотемпературних технологій є використання сучасних енергетичних джерел, тому доцільно розглянути деякі найбільш характерні джерела теплоти.

Джерела теплоти, що використовуються у ВТП, можуть бути поверхневими чи об'ємними, безупинними, імпульсними й імпульсно-періодичними, зосередженими і розподіленими, нерухомими і рухомими.

Така класифікація є деякою мірою умовною і залежить від реальних параметрів процесу. Те саме джерело при різних просторово-часових масштабах розгляду може бути віднесене до різних типів. Якщо виділення теплоти відбувається в основному на границі оброблюваного тіла, то таке джерело прийнято називати поверхневим.

До числа поверхневих джерел відносяться: технологічний електронний промінь; лазерне випромінювання різних довжин хвиль, що діє на металеві тіла; потоки плазми, що генеруються плазмотронами чи іншими методами; зварювальна дуга; світлове випромінювання широкого спектрального діапазону, наприклад, сфокусоване випромінювання ксенонових ламп і ряд інших. Поверхневі джерела характеризуються потужністю і поверхневою питомою потужністю, тобто, потужністю на одиницю площі, а також просторово-часовим розподілом.

У випадку, коли виділення теплоти відбувається в основному всередині оброблюваного тіла, джерела називають об'ємними. До числа об'ємних джерел відносяться резистивні та високочастотні нагрівачі, що використовують теплоту Джоуля-Ленца, яка розподілена на деякому обсязі речовини. Вони характеризуються потужністю та об'ємною питомою потужністю (тобто потужністю, що приходить на одиницю об'єму), просторово-часовим розподілом.

У ряді випадків поверхневі джерела теплоти можуть перетворюватися в об'ємні, якщо зменшувати коефіцієнт поглинання (при дії джерела на поверхню відповідних тіл) і скорочувати радіус плями нагрівання. Так, при дії лазерного випромінювання на деякі діелектрики поглинання випромінювання відбувається не в поверхневому шарі, а всередині об'єму речовини.

Просторово-часові характеристики джерел (розподіл енергії за об'ємом чи за поверхнею, часові параметри) відіграють істотну роль у ВТП. Найбільш розповсюдженим типом джерел є гаусові, випромінювання які розподілені на поверхні у відповідності з законом нормального розподілу імовірності. При розробці ВТП часто ставиться задача керування просторово-часовими характеристиками джерел для отримання оптимального, в тому чи іншому змісті, ВТП.

Традиційні об'ємні джерела теплоти (наприклад, резистивні) характеризуються відносно великим часом нагрівання до робочої температури (від часток секунди до декількох хвилин чи навіть годин). У деяких ВЧ-плазмотронах вихід на робочий режим може складати тисячні частки секунди. Потужність об'ємних джерел досягає декількох сотень кіловат чи навіть мегават, у той же час концентрація енергії звичайно невелика в порівнянні з так званими висококонцентрованими джерелами.

Основними галузями застосування об'ємних джерел теплоти у ВТП є: плавка металів, вирощування монокристалів, отримання плівок методом термічного випару у вакуумі, хіміко-термічна обробка матеріалів та ін.

Широке застосування у ВТП одержали концентровані джерела енергії. Звичайно концентрованими джерелами енергії називають ті, зони впливу (пляма нагрівання) яких на оброблюване тіло малі в порівнянні з характерними розмірами тіла. Оскільки головним призначенням концентрованих джерел є нагрівання визначеної зони до високої температури за малий проміжок часу, їхня питома потужність повинна бути великою ($10^3 - 10^6$ Вт/см² і вище).

З числа концентрованих джерел умовно виділяють висококонцентровані джерела енергії (ВКДЕ), питома потужність яких на визначеній ділянці тіла перевищує 10^4 Вт/см².

До ВКДЕ відносяться потоки електронів та іонів, сфокусовані на поверхні тіл, струмені та згустки низькотемпературної плазми, що генеруються за допомогою спеціальних пристроїв – дугових плазмотронів, вибухових плазмових генераторів – сфокусоване випромінювання лазерів різних типів та ін.

Під дією ВКДЕ на ділянках металевих тіл отримують за декілька мілісекунд температуру, близьку до температури плавлення. ВКДЕ можуть бути як імпульсними (імпульсно-періодичними), так і безупинними. Потужність імпульсних ВКДЕ може істотно перевищувати одиниці мегават, а безупинних – досягати потужностей одиниць і навіть десятків мегават. Так, потужність плазмової дугової печі, створеної в США для переплавки металів, досягає 52 Мвт. Швидко ростуть потужності лазерних установок – у ВТП вже зараз застосовують CO₂-лазери з потужністю в десятки кіловат [1; 36; 37].

Зупинимося (через велику практичну значимість) на деяких застосуваннях ВКДЕ у ВТП.

Технологічний електронний промінь (ТЕП). Як джерело енергії для ВТП ТЕП застосовується з кінця 50-х років. Практично одночасно почато його застосування в нашій країні. Суть процесу електронно-променевої обробки полягає в тому, що кінетична енергія прискорених в електричному полі пучків електронів при зіткненні з оброблюваним виробом який, поміщено у вакуумну камеру, перетворюється в теплову. Глибина проникнення електронів (довжина пробігу) в тверде тіло залежить від прискорюючої напруги і густини оброблюваної речовини. Так, для прискорюючої напруги в десятки кіловольт глибина проникнення електронного потоку в метали складає десятки мікрометрів. У залежності від діаметра плями нагрівання на поверхні тіла теплове джерело, обумовлене дією електронного променя, може бути як поверхневим, так і об'ємним.

Тоді як діапазон потужності і щільності енергії в електронному промені великий (до одиниць мегават і 10 Вт/см відповідно), можливе отримання всіх видів термічного впливу ТЕП на матеріали: нагрів до заданих температур, плавлення практично будь-яких матеріалів, включаючи такі тугоплавкі, як вольфрам та ін., і випаровування з дуже великими швидкостями.

Електронно-променева технологія у ВТП розвивається в наступних напрямках: плавка і випаровування у вакуумі, зварювання і прецизійна обробка. Звичайно обробку роблять у середньому вакуумі: $p=10^4$ Па, коли втрати потужності ТЕП на розсіювання невеликі. В останні роки проводять експерименти по зварюванню й обробці ТЕП, що виведено в атмосферу, з використанням системи шлюзування.

При плавці і випаровуванні у вакуумі, для нанесення плівок і покриттів використовують могутні (до декількох мегават) електронно-променеві печі при прискорюючій напрузі 20 – 30 кВ. Щільність потужності тут відносно невелика і звичайно не перевищує $10^4 - 10^5$ Вт/см². Перевага електронно-променевого плавлення перед дуговим обумовлено частковим видаленням шкідливих домішок з металу, що переплавляється, і підвищенням однорідності злитків.

Використання ТЕП для нанесення плівок дає можливість отримати швидкості напилювання, практично недосяжні для інших методів термічного отримання плівок і покриттів.

Для зварювання металів – основного напрямку в застосуванні ТЕП для ВТП – використовують установки трьох класів: низько-, середньо- і високовольтні, котрі охоплюють діапазони прискорюючої напруг від 20 до 150 кВ. Потужність зварювальних установок звичайно складає від 1 до 120 кВт й більше при максимальній питомій потужності $10^5 - 10^6$ Вт/см². Установки з прискорюючою напругою вище 150 кВ у виробничих процесах, як правило, не застосовують, оскільки вони вимагають додаткового захисту обслуговуючого персоналу від довгохвильового рентгенівського випромінювання.

В останні роки досліджується можливість використання для ВТП високоенергетичних електронних потоків з енергією 20 МеВ. Основна перевага таких пучків полягає у великій глибині проникнення електронного пучка в об'єм речовини.

При використанні ТЕП у зварювальних процесах можливе отримання в металах глибоких проплавлень, що називаються також за формою шва кинджальними, для яких характерно велике значення відношення глибини проплавлення h до

середнього діаметра d зони проплавлення. Для ТЕП досягнуте співвідношення $h/d=20$ і більше при проплавленні металів. Це відкриває широкі можливості для однопрохідного зварювання виробів великої товщини в різних просторових положеннях. ТЕП часто використовують для зварювання особливо важливих виробів: у ракетній і космічній техніці, літакобудуванні й енергомашинобудуванні та ін., де потрібна висока надійність зварних швів.

Важливим напрямком упровадження ТЕП є прецизійна обробка виробів з надтвердих і тугоплавких металів, деталі з яких все ширше використовують при створенні нової техніки. Для прецизійної обробки таких деталей (свердління, різання, фрезування й ін.) в основному застосовують високовольтні установки (з прискорюючою напругою до 150 кВ) невеликої потужності (до 1 кВт), що забезпечують питому потужність до 10 Вт/см^2 [1; 36; 37].

Особливістю цих процесів є висока локальність ТЕП (діаметр зони впливу – кілька мікрометрів), а також можливість керувати просторово-часовими характеристиками променя практично безінерційно, що на ділі недоступно для інших ВКДЕ.

Перелічимо процеси, в яких ТЕП використовують як технологічний інструмент: нагрів локальних областей тіл для створення зміцнених зон, плавка і переплавка металів, зонне очищення напівпровідників та інших матеріалів, зварювання металевих деталей великої товщини, мікро-зварювання, наприклад герметизація корпусів інтегральних схем, мікрообробка, нанесення покриттів для захисту від корозії і т. ін. Електронний промінь є одним з основних інструментів для роботи в космічних умовах, де не потрібно створення спеціальних вакуумних камер.

Лазерна технологія (ЛТ). Взаємодія випромінювання лазера з речовиною приводить до поглинання електромагнітної енергії в тонкому поверхневому шарі металу, а для діелектриків і напівпровідників лазерне випромінювання може проникати вглиб об'єму, створюючи об'ємне джерело теплоти.

Поглинання енергії випромінювання приводить до розвитку процесів тепло- і масообміну, що протікають на поверхні та в об'ємі матеріалу. Теплофізичні процеси відіграють істотну роль у розвитку явищ і в значній мірі визначають остаточний результат впливу випромінювання на речовину.

Розвиток ЛТ почався практично одночасно зі створенням перших лазерів (1960 р.). У даний час лазерна технологія відноситься до числа найбільш швидко

розвиваючих. Вона застосовується при поверхневому загартуванні, легуванні, плаванні, зварюванні, пробиванні отворів і т. ін.

Дослідження показують, що при обробці матеріалу основне значення мають енергетичні параметри – енергія, потужність, тривалість впливу, просторово-часовий розподіл щільності потужності, умови фокусування, фізичні властивості матеріалів (коефіцієнти поглинання, теплопровідність, температуропровідність та ін.).

У промисловій технології використовуються лазери декількох типів, що розрізняються довжиною хвилі (від 0,7 до 10,6 мкм) і видом генерації випромінювання (безупинне, імпульсно-періодичне й імпульсне). Найбільше поширення отримали імпульсні лазери для електронної промисловості і радіопромисловості, приладобудування й ін., середня потужність яких не перевищує 1 кВт, хоча в імпульсі потужність може перевершувати сотні і тисячі кіловат. Лазерні установки для імпульсного зварювання, термообробки та отримання отворів запроваджені в промисловість.

Промислові лазери з великою безупинною потужністю більше 1–5 кВт дуже перспективні для зварювання, термообробки й інших технологічних процесів у машинобудуванні, верстатобудуванні, автомобільній та інших галузях промисловості.

Багато питань взаємодії лазерного випромінювання з речовиною досліджені недостатньо повно, що деякою мірою стримує застосування лазерів у промисловій технології. Однак уже зараз ясно, що визначальну роль у процесах грають явища, зв'язані з переносом тепла і маси, тому для спрямованого формування зон обробки й оптимального керування введенням теплової енергії в речовину треба знати необхідні просторово-часові характеристики випромінювання.

Останнім часом інтенсивно розробляються конструкції імпульсно-періодичних лазерів, перспективних для технологічних процесів отримання й обробки матеріалів. Імпульсно-періодичні впливи випромінювання дозволяють зменшити розмір зони термічного впливу і тим самим підвищити ККД процесу. Крім того, це приводить до прискорення утворення отворів в оброблюваних виробах, тому що в проміжках між імпульсами канал у речовині звільняється від продуктів руйнування. Важливими для технологічних застосувань є виявлені в останні роки автоколивання потоку енергії на поверхні оброблюваного матеріалу. Використання автоколивальних режимів обробки істотно підвищує ефективність процесів

обробки матеріалів, дає можливість краще контролювати хід технологічного процесу.

Розглядаючи лазерну технологію, слід зазначити, що в останні роки отримали розвиток лазерно-плазмова металургія й обробка матеріалів. Їхня головна відмінність від лазерної обробки матеріалів полягає в тому, що лазерному впливу піддаються матеріали й вироби, що знаходяться в середовищі активних газів (азоту, вуглекислого газу та ін.) при підвищеному і високому тиску порядку декількох десятків атмосфер. Присутність газів сприяє утворенню плазмового згустку поблизу поверхні металу, якщо щільність потоку випромінювання перевищує 10^6 Вт/см². Одночасний вплив плазмового згустку і лазерного випромінювання що пройшло через нього формує зону обробки на поверхні виробу, викликаючи нагрів, наступне плавлення речовини і синтез таких речовин як нітриди і карбіди на поверхні.

Плазмова технологія. Застосування плазми для металургії й обробки матеріалів активно почалося наприкінці 1950-х років. Спочатку основна увага була зосереджена на таких традиційних технологічних процесах, як зварювання і різання металів.

Генерація низькотемпературної плазми здійснюється двома основними способами – за допомогою дуги прямої дії (коли один з електродів (звичайно анод) є одночасно оброблюваним матеріалом) чи за допомогою іонізованого газу, що подається через отвір в аноді у вільний простір. Обробка матеріалу проходить при введенні в плазму дисперсійних матеріалів, дроту, що плавиться, дробиться на дрібні краплі під дією газового потоку і піддається плазмовій обробці.

Поряд з дуговою плазмою в технологічних процесах використовується ВЧ- і СВЧ-плазма. ВЧ-плазма запалюється всередині кварцового циліндра і практично не контактує із стінками камери, що робить її «стерильною», тобто не забрудненою продуктами випаровування. ВЧ-плазма звичайно нерівноважна, і це дає можливість отримання речовин в умовах, що відрізняються від рівноважних.

Плазмовий потік розподілений за деяким законом, при цьому максимум потужності приходить на центральну частину зони впливу – анодну пляму. В деякому наближенні можна вважати інтенсивність теплового джерела розподіленою за нормальним законом. Щільність потоку в анодній плямі може досягати 10^6 Вт/см², а у вільному плазмовому струмені, що минає в простір, він трохи нижче – до 10^4 Вт/см².

Особливо перспективним є використання плазмових процесів у металургії і технології неорганічних матеріалів. Переваги плазмової технології обумовлені не тільки високою інтенсивністю енергетичних потоків, але й можливістю проведення плазмово-хімічних реакцій, що приводять до синтезу нових речовин. Багато питань плазмової технології вивчено неповно, математичні моделі цих процесів побудовані в обмеженому числі випадків, і це затруднює її широке промислове впровадження.

Використання технологічних процесів такого типу, як лазерна, електроннопроменева плазмова технологія, дифузійні процеси, приводить до необхідності розв'язувати спеціалізовані задачі проектування технологічних процесів. Основними задачами проектування високотемпературних технологічних процесів є:

- 1) визначення принципової конструкції технологічного апарата;
- 2) визначення числових характеристик конструкції технологічного апарата (параметричний синтез);
- 3) визначення «чуттєвих» точок процесу (найбільш адекватно реагуючих на зміну стану процесу);
- 4) розробка системи датчиків контролю і системи виконавчих механізмів;
- 5) розрахунок технологічних режимів і розв'язок задач оптимального керування.

1.3. Методологічні основи проектування високотемпературних технологічних процесів

Ще наприкінці XIX століття склалися традиційні методи проектування технологічних процесів. Воно складалося, як правило, з двох частин: розробка технологічного апарата та експериментальний підбір технологічних режимів. Успіх проектування істотно залежав від здібностей проектувальника-технолога, його досвіду та інтуїції. Відмітною рисою традиційного підходу до проектування є те, що розробка технологічного апарата і вибір режимів ведуться ізольовано один від іншого: при проектуванні технологічного апарата не враховується те, як прийняті проектні рішення позначаться на можливості оптимізації процесу за рахунок підбору режимів обробки матеріалів.

Відзначені властивості дозволяють характеризувати класичні (традиційні) підходи до проектування технологічних процесів як суб'єктивні і за більшою час-

тиною неоптимальні. Проте донедавна традиційний підхід був єдиною можливістю, та й тепер він виправданий для порівняно нескладних технологічних операцій.

У той же час слід зазначити, що розвиток обчислювальної техніки, з одного боку, і розробка і впровадження нових складних технологічних процесів (у тому числі і високотемпературної технології) – з іншого, вимагають створення нових підходів до проектування, заснованих на використанні обчислювальної техніки. Її впровадження дозволяє замінити емпіричний експериментальний розв’язок при підборі параметрів конструкції апарата і технологічних режимів оптимальним розв’язком, отриманим з використанням математичних методів багато-параметричної оптимізації, а це значною мірою підвищує якість спроектованих технологічних процесів.

Впровадження обчислювальної техніки дає можливість використовувати високоінформативні аналітичні моделі технологічних процесів (що дає проектувальнику можливість глибше зрозуміти фізичну сутність явищ, що протікають у ході процесу), дозволяє замінити натурний експеримент математичним моделюванням (обчислювальним експериментом з моделлю процесу). Заміна натурних експериментів математичним моделюванням приводить до зниження часових і матеріальних витрат на проектування. Обчислювальний експеримент, як правило, здійснюється дешевше і швидше, ніж реальний (з огляду на час підготовки експерименту та обробки результатів). Особливо це важливо для складних високотемпературних технологічних процесів, для яких натурні експерименти є дорогими, а іноді й небезпечними.

При обчислювальному експерименті можна змінювати не тільки параметри технологічного режиму, але й конструкційні параметри установки, для зміни яких у натурному експерименті довелося б виготовляти щораз нову. Таким чином, впровадження обчислювальної техніки дозволяє взаємозалежно вирішувати питання проектування технологічного апарата і визначення технологічних режимів.

Отже, можна відзначити, що використання обчислювальної техніки при проектуванні ВТП дає нам можливість отримувати технологічний процес більш високої якості, однак при цьому приходиться значно змінювати методику проектування.

В класичній схемі проектування з методичної точки зору звичайно виділяють два етапи: етап синтезу (створення проекту) і наступний етап аналізу (перевірки проекту). Впровадження обчислювальної техніки в процес вимагає істотної

перебудови класичної схеми етапів проектування. Це зв'язано з тим, що для використання обчислювальної техніки і математичних методів у проектуванні необхідно насамперед формалізувати процедуру проектування і формалізувати процедуру і об'єкт проектування, тобто описати технологічний процес і поставити задачу мовою математики.

Зазначені причини приводять до того, що загальна схема етапів проектування високотемпературних процесів повинна бути представлена у вигляді, показаному на рис. 1.2. (На схемі не відбиті функції, що відіграють з методичної точки зору допоміжну роль при проектуванні технологічних процесів: завдання на проектування, відображення й оформлення результатів проектування, твердження готового проекту і т. п.)

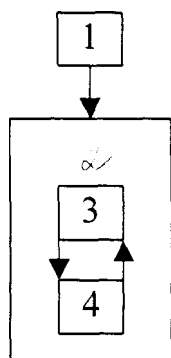


Рис. 1.2. Функціональна схема етапів проектування високотемпературних технологічних процесів: 1 — аналіз технологічного процесу. Побудова формалізованих процесів; 2 — синтез технологічних процесів; 3 — генерація проектних рішень; 4 — аналіз (перевірка) проектних рішень шляхом обчислювального експерименту

Специфічною особливістю проектування технологічних процесів є наявність етапу попереднього аналізу, призначеного для вивчення процесу, побудови його формалізованих описів у вигляді математичних моделей, а також для дослідження процесу за допомогою обчислювального експерименту над моделлю.

Обчислювальний експеримент на етапі попереднього аналізу технологічного процесу повинен дати проектувальнику ту інформацію, яку важко або неможливо отримати звичайним шляхом. Для швидкопротікаючих високотемпературних процесів такою інформацією є: діапазон стійкого функціонування технологічного процесу, ступінь впливу різних керуючих і випадкових факторів, місце розташування чутливих точок, властивості оптимізуючих показників якості в залежності від зміни керуючих параметрів (багатоекстримальність, «овражність», опуклість), спостереженість, регулювання технологічного процесу та ін.

Етап синтезу технологічних процесів реалізує ті ж функції, що й у класичній схемі проектування: генерацію проектних розв'язків і перевірку проектних

розв'язків. Відмітною ознакою проектування є те, що для їхньої перевірки використовується обчислювальний експеримент. Генерація проектних розв'язків може здійснюватись одним із основних способів, що відповідають двом варіантам системи. В першому – проектні розв'язки пропонує конструктор-технолог і відбувається аналіз ефективності. В другому – здійснюється параметричний синтез оптимальних технологічних процесів. При цьому як генератор проектних розв'язків виступає обчислювальний метод реалізований у вигляді програми для ЕОМ.

Ефективність такого проектування залежить від конкретного типу задачі. Переваги першого варіанта, коли ЕОМ здійснює аналіз запропонованого розв'язку, полягає в можливості ефективно використовувати досвід, знання та інтуїцію проектувальника-технолога. В цьому випадку можна ефективно розв'язувати багатоекстремальні задачі проектування.

Перевага другого варіанта роботи системи, коли вона сама генерує проектні розв'язки, полягає в тому, що пошук оптимального розв'язку здійснюється більш послідовно, систематизовано, в тому числі і серед незвичних для технологів варіантів.

Слід зазначити, що при проектуванні системи контролю технологічного процесу доцільніше використовувати перший варіант, оскільки основною задачею при її проектуванні і при розробці системи датчиків є аналіз процесу: пошук точок, найбільш чутливих до зміни контрольованих параметрів, встановлення взаємозв'язків між показниками датчиків і значеннями параметрів, аналіз впливу датчиків на хід процесу.

Формалізація. Задачі і принципи формалізації. Етап попереднього аналізу технологічного процесу при проектуванні переслідує дві мети:

- одержання формалізованих описів фізико-хімічних явищ технологічного процесу;
- дослідження його за допомогою обчислювального експерименту над моделлю.

Головна мета формалізації – описати процес мовою математики у вигляді математичних співвідношень (розробити математичну модель) і реалізувати її програмою, що дозволяє проводити обчислювальний експеримент для проектування.

Розглянуте в даній роботі проектування високотемпературних технологічних процесів вимагає використання при формалізації спеціальних методів моде-

лювання. З методологічної точки зору можна виділити два основних підходи до моделювання складних систем. Перший з них (так званий метод «чорної шухляди») реалізується, коли ми відмовляємося від спроб аналізувати структуру системи, фізику процесу. Такий підхід застосовується при формалізації систем, будівля яких вивчена недостатньо повно (наприклад, це стосується явищ переносу в неідеальних матеріалах). Суть полягає в тому, що вся область використовуваних значень входів системи обстежується експериментально і на основі даних експерименту встановлюються математичні співвідношення між входами і виходами. При цьому широко застосовують дисперсійний, регресійний і кореляційний аналізи, методи планування експерименту.

Як головні переваги «чорної шухляди» можна виділити простоту, розробленість і зумовленість застосовуваного математичного апарата, гарантовану результативність моделювання. Поряд з цим метод має недоліки. В основному вони зв'язані з малою інформативністю одержаних моделей: їхнє застосування обмежено областю, підданої експериментальному дослідженню. Одержані моделі не розкривають справжніх причин явищ, що відбуваються в ході процесу. Їх важко використовувати в технологічних процесах, оскільки параметри установки не будуть тут входити до числа вхідних параметрів моделі. Крім того, завжди існує небезпека, що буде упущений значимий вхідний параметр, який повільно змінюється в часі, і тоді модель буде адекватно описувати тільки дану конкретну установку і протягом тільки деякого обмеженого проміжку часу. В багатьох випадках недоліком також є дорожнеча чи неможливість проведення натурних експериментів, які необхідні при використанні цього методу.

Другим основним підходом до моделювання є аналітичний. Модель будується, виходячи з внутрішньої структури явищ, що протікають у системі. В цьому випадку вхідні і вихідні параметри моделі зв'язуються один з одним на підставі законів фізики, хімії, матеріалознавства і т. п.

Такий підхід до моделювання має багато переваг. Отриманий математичний опис процесу має високу інформативність, широку область застосування, універсальність (у розумінні придатності до різних установок). Така модель дозволяє зрозуміти хід протікання технологічного процесу. Аналітичний підхід значно скорочує обсяг експериментів, підвищує ефективність моделювання.

До недоліків аналітичного підходу варто віднести складність використовуваного математичного апарата, негарантовану результативність моделювання, ву-

зську область застосування методів, пов'язану з недостатньо високим рівнем сучасного знання в ряді областей.

У чистому виді кожний із зазначених підходів допускає ефективне застосування тільки до невеликої кількості задач. У більшості випадків доцільно застосовувати різні комбіновані підходи, що дозволяють з'єднати переваги обох основних підходів. Внаслідок цього на даний момент існує велика кількість методів моделювання, все різноманіття яких зводиться до різних комбінацій двох основних підходів до моделювання.

При проектуванні високотемпературних технологічних процесів доцільніше всього на основі системного аналізу об'єднати переваги цих підходів. У результаті порядок побудови математичних моделей технологічних процесів матиме наступний вид:

- постановка задачі моделювання;
- структуризація (розробка структури моделі);
- розробка формального опису підсистем;
- побудова математичних моделей;
- перевірка адекватності моделей;
- використання моделі (дослідження процесу за допомогою обчислювального експерименту над моделлю).

Наведена методика аналізу містить у принципі ті ж етапи, що і загальноприйняті універсальні методики [1; 6], але відрізняється від них змістом і особливостями кожного з етапів, що в цілому і забезпечує її спрямованість на побудову математичних моделей процесів розглянутого типу і задовольняє вимогам, пропонованим до моделей у системах проектування технологічних процесів

Особливості моделювання ВТП при проектуванні. Розглянемо зміст і особливості кожного з етапів побудови моделі.

1. Постановка задачі моделювання. Формулюються цілі, для яких кожна модель створюється, і, виходячи з них, відбувається визначення системи вхідних і вихідних параметрів моделі, необхідної точності їхнього обчислення.

В залежності від конкретного виду проектуваного процесу математична модель створюється для розв'язку (за допомогою обчислювального експерименту) однієї або кількох з наступних задач:

- задачі дослідження процесу: визначення області стійкості, вивчення ступеня впливу керуючих і випадкових факторів, визначення «чутливих» точок процесу, вивчення регулюємості і спостережності та ін.;
- задачі синтезу: підбір та оптимізація технологічних режимів, параметрична оптимізація конструкції установки; структурна оптимізація, та ін.;
- задачі діагностики: визначення надійнісних характеристик процесу, дослідження перешкодозахищеності технологічного процесу, діагностика правильності функціонування технологічного процесу та ін.;
- задачі прогнозу: прогнозування показників якостей технологічного процесу, проектування і дослідження нових схем проведення технологічного процесу.

Очевидно, коло задач у кожному конкретному випадку може бути розширено, або зменшено. З необхідності вирішувати перераховані задачі впливає особлива вимога до моделей, призначених для систем проектування технологічних процесів: у число вхідних параметрів повинні бути включені не тільки керуючі впливи і конструкційні параметри установки. Це зменшує можливість ефективного використання експериментальних методів побудови моделей. У той ж час, на відміну від моделей, що використовуються в системах керування, вимоги до точності розрахунку вихідних параметрів тут невисокі: при проектуванні технологічних процесів досить знати, зросте чи зменшиться критерій оптимальності в результаті прийняття того або іншого розв'язку.

2. Структуризація. Побудова математичної моделі складної системи в цілому часто виявляється практично неможливою через складність процесу. В цих випадках доводиться розчленовувати об'єкт, що моделюється, на кінцеве число підсистем. У загальному випадку складна система є багаторівневою конструкцією із взаємодіючих підсистем різних рівнів. Відповідно математична модель складної системи включає математичні моделі підсистеми і математичну модель взаємодії між підсистемами.

Можна рекомендувати наступний порядок структуризації системи. Вона розбивається на невелике число підсистем одного рангу. Виявляються функціональні зв'язки між ними. Розбивка здійснюється на основі відомих підходів, розроблених для побудови моделей широкого класу. Окремо аналізується кожна з підсистем. В залежності від структури і складності можливі три варіанти її подальшого дослідження.

Перший: якщо підсистема дозволяє описати її функціонування законами фізики, хімії і т. п., то процес структуризації закінчується, і вже при наступному етапі побудови моделі виробляється опис підсистеми відповідними законами.

Другий: якщо підсистема дозволяє провести подальшу розбивку на підсистеми більш глибокого рівня, то робиться така розбивка: знову з'ясовуються функціональні зв'язки між підсистемами, які вийшли, потім кожна з підсистем аналізується за наведеною методикою.

Третій випадок використовується, якщо не можна застосовувати перші два варіанти. Звичайно це зв'язано з тим, що сучасний рівень знання не дає можливості пояснити структуру і характер функціонування даної підсистеми. Тоді така підсистема розглядається як «чорна шухляда» і процес структуризації для неї припиняється. Далі вона буде досліджуватись експериментальними методами.

Таким чином, сполучаючи аналітичний підхід з методом «чорної шухляди», можна забезпечити як результативність моделювання, так і високу інформативність і гнучкість моделі.

Розбивку на підсистеми можна здійснити різними способами. Універсальних законів вибору принципу розбивки не існує.

Однією з особливостей структуризації для проектування технологічних процесів розглянутого класу є виділення «теплової» підсистеми в якості основної. Цей принцип, що виправдав себе на практиці при моделюванні багатьох високо-температурних процесів, допускає і теоретичне обґрунтування: основними причинами всіх змін в установці і деталях є енергетичні взаємодії, описувані тепловими моделями.

Результатом етапу структуризації є загальна структура моделі, що складається з підсистем двох типів («аналітичних» і «чорна шухляда»). Надалі ця загальна структура стане основою математичної моделі взаємодії між підсистемами.

3. Розробка формального опису підсистем. Для підсистем типу «чорна шухляда» проводяться експерименти і будується рівняння регресії, що зв'язує вхідні параметри з вихідними. Для «аналітичних» – розробляється система рівнянь, що описують підсистему, і проводиться експериментальне визначення необхідних коефіцієнтів цих рівнянь (наприклад, теплофізичні властивості використовуваних матеріалів у робочому інтервалі температури, тепловий та електричний опір різних контактів).

Високотемпературні технологічні процеси (що характеризуються наявністю полів температури, концентрації, швидкостей) описуються здебільшого рівняннями математичної фізики: рівняннями в частинних похідних. Задачі визначення коефіцієнтів у рівнянні частинних похідних за результатами експерименту відносяться до зворотних задач математичної фізики. Розв'язування їх вимагає використання спеціального апарата.

4. *Побудова математичних моделей.* Відбувається спрощення одержаного на попередніх етапах: універсального, повного формалізованого опису процесу відповідно до вимог до точності, повноти та інформативності, пропонованими до моделей. У загальному випадку може існувати кілька моделей процесу призначених для різних цілей і які описують процес з різних боків. Різними будуть і вимоги. Використання в якості таких робочих моделей складної, універсальної моделі процесу суперечить одному з найважливіших принципів системного підходу, який вимагає, щоб усі розробки були цілеспрямованими і їхня складність не перевищувала складності, необхідної для досягнення поставленої мети.

Необхідність цього етапу обумовлена тим, що в результаті побудови формалізованого опису підсистем виходять складні громіздкі формули, які зв'язують вхідні і вихідні параметри в неявному виді. Використовувати ці описи в первісному виді, практично, неможливо. Це зв'язано як з недостатком взаємозв'язків між підсистемами, так і з великою розмірністю диференціальних рівнянь, що описують функціонування підсистем. Більшість процесів у природі описуються на підставі законів збереження деякої субстанції, в якості котрої можуть виступати енергія, матерія, електричний заряд, імпульс, момент імпульсу. В загальному виді цей закон записується у вигляді чотирьохвимірною рівняння в частинних похідних другого ступеня, розв'язок якого пов'язаний з обчислювальними труднощами. Для практичного застосування отриману модель доцільно спростити, використовуючи методи системного аналізу.

На даному етапі відбувається, по-перше, дослідження взаємозв'язків між підсистемами і відкидання зв'язків, незначущих для даних цілей; по-друге, дослідження розподілів характеристик процесу вздовж незалежних змінних (координат) і відкидання незначущих координат; по-третє, дослідження нелінійних і нестационарних членів рівнянь і граничних умов і лінеаризація чи відкидання їх у залежності від ступеня впливу на процес, і, нарешті, для отриманих описів процесу розробляється метод чисельного розв'язку систем рівнянь, що зв'язують вхідні

і вихідні параметри моделі. Етап побудови математичних моделей закінчується розробкою програм для ЕОМ, які реалізують кожну з математичних моделей процесу.

5. Перевірка адекватності моделі. Проводиться перевірка її здатності задовольняти цілям, для яких вона побудована. До деякої міри адекватність моделі перевіряється не тільки на даному етапі, але й у ході всіх етапів розробки, починаючи від постановки задачі і закінчуючи її експлуатацією. Треба підкреслити, що недостатньо обмежитися поетапними перевірками, необхідно перевірити адекватність цілком розроблених моделей у комплексі.

На даному етапі здійснюється перевірка декількох аспектів адекватності: несуперечності, стійкості, реалістичності [6]. Наявність цих аспектів викликана специфікою моделей, розроблюваних технологічних процесів. Для проектування нових технологічних процесів недостатньо, щоб модель адекватно описувала існуючі експериментальні результати. Треба, щоб вона правильно відображала можливі зміни будь-яких конструкційних параметрів установки, в тому числі і тих, котрі в ході експерименту залишалися постійними. Крім того, одна з поставлених цілей – заміна натурних іспитів обчислювальним експериментом – не дозволяє широко використовувати експериментальні методи перевірки адекватності (в тому випадку, коли отримання кожного результату супроводжується створенням спеціальної установки).

6. Дослідження процесу. Заключною частиною є обчислювальний експеримент, проведений для отримання додаткової інформації про процес. Зважається кілька задач, питома вага і важливість яких залежать від конкретних цілей аналізу процесу. Як основний інструмент тут виступає математична модель.

Однією з задач даного етапу можна вважати визначення чутливості процесу до змін вхідних параметрів. На підставі цих результатів можна визначити керуючі впливи, що повинні особливо точно регулюватися, і некеровані параметри, які варто вимірювати з високою точністю.

Іншою задачею є визначення чутливих точок установки, тобто вихідних параметрів, що найбільш повно відбивають хід процесу. Така задача виникає при проектуванні системи датчиків для оперативного керування технологічним процесом.

Ще однією задачею є логічний аналіз явищ, що протікають в установці, дослідження причин появи браку, нестійкості процесу.

Можна також виділити задачу дослідження особливостей і форми поверхні відгуку цільової функції процесу і ранжирування методів оптимізації для автоматизованого проектування оптимального технологічного процесу.

Як уже відзначалося, гарна математична модель повинна бути адаптивною, що дозволяє легко переходити до інших модифікацій чи оновлювати дані. Тому процес побудови моделі і процес перевірки її адекватності продовжується в ході експлуатації.

На цьому етапі використання моделі відбувається уточнення коефіцієнтів моделі, вносяться оперативні зміни, що відбивають зміни системи згодом.

Звичайно, наведена послідовність етапів аналізу є до деякої міри умовною. На практиці – це складний, ітеративний процес, що допускає повернення до попередніх етапів і їхнє повторне проведення. Проте зазначені етапи є основними в тій чи іншій мірі вони присутні при автоматизованому аналізі будь-якої технології, при цьому питома вага того чи іншого етапу може змінюватися в залежності від цілей розробки моделі і виду технологічного процесу.

Особливості синтезу нових технологічних процесів. Практика розвитку сучасної промисловості показує, що найбільш істотний ріст якості продукції (при зменшенні її собівартості) зв'язаний, як правило, з переходом на принципово нові технологічні процеси. Застосування нових технологічних методів може привести до зниження матеріало- і енергоємності виготовлення виробів, підвищенню надійності, зменшенню браку, появи якісно нових матеріалів. У зв'язку з тим, що в даний час багато в чому вичерпані можливості удосконалення традиційних існуючих технологій, технологічні методи стають гальмом на шляху отримання перспективних технічних пристроїв і нових матеріалів з особливими властивостями для нестатків кібернетики, мікроелектроніки, приладобудування і т. п.

На зміну старим, традиційним технологічним процесам приходять нові, засновані на використанні лазерного випромінювання, електронних, нейтронних та іонних пучків, енергії вибуху, імпульсу магнітного поля, вакуумної і газової плазми що самопоширюється, високотемпературного синтезу, великих статичних і динамічних тисків в умовах високої температури і т. п. Виняткова складність фізико-хімічних процесів, що відбуваються при використанні подібних видів енергетичних впливів, вимагає використання сучасних методів проектування.

Підводячи підсумки, слід зазначити, що використання математичних методів для проектування технологій найбільш виправдано для складних сучасних

процесів, що використовують нові високотемпературні впливи на матеріали. Математичні методи дозволяють скоротити терміни і вартість дослідно-технологічних робіт, підвищити якість проектних розв'язків.

У цьому зв'язку можна сформулювати задачі, розв'язок яких дозволить успішно впровадити автоматизоване проектування високотемпературних технологічних процесів. Сюди відносяться:

- дослідження і розробка фізичних і математичних моделей технологічних процесів;
- розробка аналітичних і чисельних методів розв'язків нелінійних задач теплофізики технологічних процесів;
- одержання інженерних співвідношень для опису температурних полів у процесах обробки матеріалів;
- дослідження і розробка методів розв'язку зворотних задач теплообміну як засобу проектування технологічних процесів;
- вивчення сполучених задач для отримання більш повної інформації про тепло- і масопереносі у процесах обробки матеріалів, знаходження умов оптимізації технологічних процесів і методів їхньої реалізації;
- знаходження умов контролю, керування і регулювання технологічних процесів.

Розв'язок зазначених задач дозволить ефективніше використовувати обчислювальний експеримент і математичні методи на всіх етапах проектування високотемпературних технологій.

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИГОТОВЛЕННЯ ДЕТАЛЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З В'ЯЗКОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ МЕТОДАМИ НАРОЩУВАННЯ

З процесами нарощування ми зустрічаємося при вивченні різних технологічних і природних процесів типу намотування, напилювання, осадження, заморожування, аккреції, а також при послідовному зведенні та завантаженні споруджень і будівельних конструкцій, при вирощуванні кристалів, фазових перетвореннях у твердих тілах і т. п.

Теоретичне обґрунтування нових технологій виробництва оболонок, труб та інших деталей обертання шляхом нарощування, вимагає розвитку методів розрахунку, що відображають у більш повній мірі властивості матеріалу, з якого виготовляється та чи інша деталь. Відомо, зокрема, що полімери та композитні матеріали, які використовуються при виготовленні різних деталей та елементів конструкцій, мають виражені властивості повзучості. Ця обставина приводить до перерозподілу напружень у деталі в процесі нарощування, зміни форми і розмірів після виготовлення та при навантаженні.

Механіку подібних процесів можна досліджувати з різних точок зору. Одна з них – модельне зображення процесів нарощування реальних конструкцій на основі теорії повзучості неоднорідно старіючих тіл [2; 3] (теорія зростаючих тіл). Вони характеризуються тим, що під час нарощування різні елементи цих тіл виготовляються (зароджуються) в різні моменти часу, тобто вік матеріалу в цих тілах неоднаковий і залежить від просторових координат. Тому поряд із традиційною неоднорідністю виникає неоднорідність специфічного характеру, обумовлена тим, що процес природного або штучного старіння в цих тілах протікає неоднаково в усіх елементах.

У залежності від конкретних умов процес нарощування в'язкопружних тіл може відбуватись як дискретно, так і безперервно. В першому випадку до тіла в окремі моменти часу послідовно приєднуються елементи скінчених розмірів з матеріалу різного віку. В другому випадку, тобто при безперервному нарощуванні, за кожен нескінченно малий проміжок часу до тіла приєднується елемент нескінченно малої товщини.

Перш, ніж перейти до моделювання процесу нарощування, зробимо одне зауваження, що стосується загальних понять про нарощування деформівних твердих тел.

Неважко уявити собі процес нарощування абсолютно твердого тіла, коли доданий до нього елемент об'єму відразу після приєднання як би «заморожується» і втрачає здатність деформуватися надалі. В цьому випадку конфігурація тіла, що спостерігається нами на будь-якому довільному етапі нарощування, є «застиглою», тобто не перетерплює надалі ніяких змін об'єму або форми. Це «застигле тіло» просто «обростає» новим матеріалом, унаслідок чого форма та об'єм усього зростаючого тіла постійно змінюються.

Таким чином, кажучи про змінюваність конфігурації та розмірів зростаючого твердого тіла, будемо мати на увазі зміну цих параметрів не в результаті силового деформуючого впливу на тіло, а внаслідок приєднання до нього нових елементів, додавання матеріалу, накладення додаткових зв'язків і т. п.

Розділ розглядає задачі, що виникають, головним чином, при виготовленні деталей обертання та елементів конструкцій з полімерного матеріалу методами нарощування.

Відомі з літератури [2; 3] розв'язки задач в'язкопружності для зростаючих тіл, моделюють, головним чином, процеси виготовлення деталей обертання та зведення будівельних споруджень з бетону. В цих задачах процес нарощування передбачається здійснюваним із зовнішньої сторони деталі при заданому законі зміни радіуса та зовнішнього поверхневого навантаження.

У цьому розділі розглядаються задачі про внутрішнє та зовнішнє нарощування порожнього кругового в'язкопружного циліндру з полімерного матеріалу, який знаходиться в умовах одноосьового напруженого стану у випадку лінійного закону повзучості з метою моделювання процесу виготовлення деталей обертання методами нарощування.

2.1. Основи технології процесів нарощування

Зупинимося на моделюванні таких процесів нарощування як напилювання та намотування, що застосовуються під час виготовлення теплової ізоляції труб і резервуарів, а також при виготовленні різних деталей обертання.

Розглянемо кілька варіантів напилювання теплової ізоляції. Серед матеріалів, що застосовують для теплоізоляції резервуарів, широке поширення одержав пінополіуретан. Теплоізоляція з нього може бути блоковою і монолітною [9]. Монолітна ізоляція виготовляється шляхом напилювання на стінки резервуара за допомогою спеціальних машин. Установки типу «піна» для нанесення теплоізоляції на резервуари висотою до 14 м являють собою дозуючий агрегат, що складається з двох шестерних насосів типу НШ20ДО2 із приводом від електродвигуна та редуктора, що забезпечує заданий режим роботи насосів. Компоненти теплової ізоляції (поліефірна смола і діуретандіетіленгліколь) окремими шлангами забираються з ємностей і подаються до пістолета-розподільника. До нього ж приєднується шланг для подачі стиснутого повітря. Компоненти в ємностях підігріваються і безперервно переміщуються шестерними насосами типу РЗ. Повітря, яке розпилюється очищають за допомогою вологомасловіддільника і маслоуловлювального фільтра. Всі режими роботи установки здійснюються з пульта керування, що знаходиться на відстані від пістолета-розпилювача. Пістолет-розпилювач, який знаходиться на спеціальній каретці, переміщується по вертикалі й горизонталі. Механізм переміщення має спеціальний пристрій для здійснення зворотно-поступального руху.

Приблизно аналогічна конструкція пристрою для напилювання пінополіуретану на резервуари була запропонована фірмою «Шелл». Вона складається з направляючої рейки, яка змонтована на відстані 80 см від днища резервуара, по якому за допомогою спеціального двигуна переміщується візок. На візку кріпиться вертикальна стійка, по якій нагору і вниз може переміщатися пістолет-розпилювач, котрий приводиться в рух спеціальним двигуном. Вихідні компоненти теплової ізоляції подаються гнучкими шлангами до розпилювача і під дією стиснутого повітря наносяться на стінку резервуара. Необхідна товщина теплової ізоляції забезпечується заданим числом проходів. Зовні тепла ізоляція може бути покрита захисним кожухом. Іноді, як захисний кожух, застосовують той же пінополіуретан, але в іншій пропорції. В результаті напилювання зовнішній шар те-

плогої ізоляції виходить дуже щільним і міцним, добре конфронтуючим зовнішнім навантаженням, проникненню вологи і впливу ультрафіолетових променів.

Для запобігання розтріскування монолітної теплової ізоляції при спорожнюваннях і заповненнях резервуара (різка зміна температури внутрішньої стінки резервуара) іноді перед нанесенням основної теплової ізоляції на зовнішню поверхню резервуара наносять за допомогою клеїв буферну ізоляційну прокладку. Ця прокладка сприймає всі термічні коливання стінок резервуара, а основний ізоляційний матеріал практично не деформується.

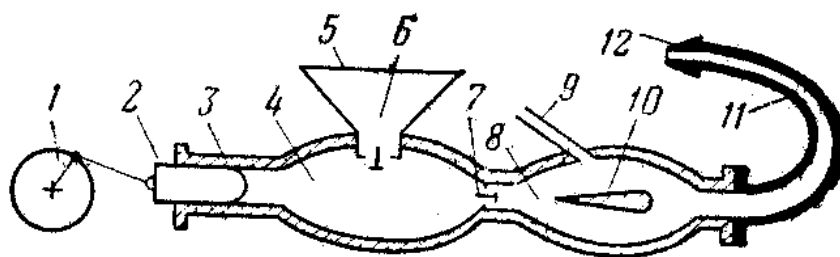


Рис. 2.1. Пристрій для змішування і подачі компонентів поліуретанової ізоляції

Для поліпшення покриття (підвищення його однорідності і теплофізичних властивостей) необхідно ретельно перемішувати компоненти теплоізоляції до подачі їх у пристрій, що розпиляє. Це може бути забезпечено спеціальним агрегатом (рис. 2.1), що складається з циліндра 3, усередині якого переміщається поршень 2, який приводиться в рух пристроєм 1. Циліндр переходить у камеру 4, над якою розташований бункер 5 для суміші. Суміш з бункера подається до камери через впускний клапан 6. З камери 4 вона видавлюється через нагнітальний клапан 7 у змішувальну камеру 8. Усередині змішувальної камери розташований розсікатель 10. Стиснене повітря до змішувальної камери подається патрубком 9. Теплоізоляційна суміш, що подається до змішувальної камери, віджимається до її стінок завдяки розсікателю і добре перемішується стисненим повітрям. Утворена аерозольна суміш, рухається шлангом 11 і через спеціальний пристрій 12 напильється на об'єкт, що захищається.

Для ізоляції резервуарів, призначених для збереження рідин з високими температурами або зріджених природних газів, запропонована складена металева оболонка з повстяною прокладкою між поверхнею, що захищається, і оболонкою. Усередину оболонки через отвір накачується спінений поліуретан. Після запов-

нення отвір перекривається. Набір цих оболонок складає теплову ізоляцію резервуара. Кріплення їх на стінці здійснюється або за допомогою вусів, або за допомогою бандажних поясів.

Теплоізоляція труб методом напилювання вимагає спеціальних умов і установок, але цей спосіб більш технологічний. Задана товщина теплової ізоляції може бути одержана за один або кілька проходів уздовж труби теплоізоляційної установки. Для ізоляції труб різного діаметру можна застосовувати те саме устаткування. Якість і товщина ізоляційного покриття контролюються безперервно в процесі провадження робіт. Нанесення ізоляційного покриття можна робити як у заводських, так і у напівстаціонарних умовах, і при цьому забезпечується ритмічність і безперервність проведення робіт.

Для захисту теплоізоляції від механічних ушкоджень і проникнення до неї вологи зовні вона захищається кожухами: з стрічки або інших матеріалів. На складних ділянках трубопроводів (переходи через ріки, шляхи, болота і т. п.) товщина теплової ізоляції багато більше, ніж на основній магістралі, а захисний кожух робиться більш товстим і абсолютно герметичним.

Принцип роботи установок для напилювання теплової ізоляції полягає в наступному. В різних ємностях містяться поліефірна суміш з добавками для гасіння полум'я, необхідною кількістю води, каталізаторів і діуретандіетіленгліколь. Компоненти з ємностей дозуючими насосами подаються в змішувальну камеру пістолета-розпилювача. До цієї ж камери подається стиснене повітря, що інтенсивно перемішує між собою компоненти і через шланг з насадкою викидає на поверхню, яка обробляється. Одержання заданих якостей теплоізоляційного покриття забезпечується необхідним регулюванням швидкостей подачі компонентів і швидкостей затвердіння їх на поверхні з урахуванням температур навколишнього середовища, компонентів і об'єкта, який ізолюється. Даним способом ізолюють труби як у заводських, так і в польових умовах. У порівнянні з методом заливання, пінополіуретанова теплова ізоляція напилюванням має кращу однорідність в осьовому і радіальному напрямках, знижується її щільність (до 30 кг/м^3). Цей метод дозволяє одержувати теплову ізоляцію будь-якої товщини за рахунок одного чи декількох проходів пістолета-розпилювача відносно поверхні, яка захищається.

Основним недоліком цього методу є недостатнє зчеплення захисного кожуха з матеріалом ізоляції. Захисний кожух найчастіше виготовляється з плівок, але

застосовуються й інші матеріали. З'єднання їх з тепловою ізоляцією відбувається за допомогою різних клеїв.

Установок для нанесення пінополіуретанової теплоізоляції методом напилювання запропоновано значне число. Розглянемо деякі з них.

Установка з обертним пістолетом-розпилювачем складається з візка, який переміщується вздовж труби двигуном, і систем очищення та пульверизації, що обертаються навколо труби. Обертання і поступальний рух систем очищення і напилювання здійснюються зубчастою передачею, яка приводиться в дію колесами візка. Система очищення складається з металевих щіток, укріплених із внутрішньої сторони барабана, а система розпилення включає пістолет-розпилювач, що також рівномірно обертається навколо труби. Великим недоліком цієї установки є з'єднання процесу очищення труби і напилювання ізоляції, оскільки пил, що утворюється при очищенні, різко погіршує умови роботи. Крім цього, установка виходить досить складна через наявність обертового пістолета-розприскувача. Теплоізоляційна маса і стиснене повітря подаються до пістолета системою трубопроводів малого діаметра в спеціальні барабани, що обертаються навколо труби. Необхідність різних прокладок і ущільнень не усуває витрати теплоізоляційної маси. Для поліпшення адгезії теплоізоляційної маси з поверхнею, що ізолюється остання підігрівається до 313 К, а теплоізоляційна маса до 300 К. Зовні теплоізоляція захищається спеціальними тканинами, папером або плівкою, що змотуються з котушок, укріплених на візку. Для роботи установки під час ізоляції труб діаметром 219 мм рекомендуються наступні параметри: товщина ізоляційного шару 50 мм, частота обертання $0,416\text{ с}^{-1}$, лінійна швидкість пересування візка 0,05 м/с. За допомогою самохідної установки трубопровід діаметром 0,168 м покривався пінополіуретановою ізоляцією товщиною 76 мм зі швидкістю 0,1 м/с. У даній установці очищення труби не проводилося. Вся установка змонтована на спеціальній рамі, гусеничного трактора. Зовні теплоізоляція захищалася поліетиленовою плівкою, що змотується з бобін, укріплених на барабані. Поліетиленова плівка намотувалася на покриту клеєм поверхню теплоізоляції. Місця стикування плівки також склеювалися.

Установка з нерухомими пістолетами-розприскувачами зображена на рис. 2.2. Труба 1, що ізолюється проходить через очисний пристрій 5. Переміщаючись в осьовому напрямку та обертаючись навколо своєї осі, труба проходить повз перший ізоляційний пост (6, 7), де на поверхню труби наноситься шар адгезива 4.

Він складається з плоского мундштука 7 і черв'ячного редуктора 6. Адгезив наноситься на трубу, що обертається у вигляді плоскої стрічки 8. Швидкість осьового переміщення труби підбирається таким чином, щоб адгезив накладався з нахлестом. Наступний ізоляційний пост подає на трубу термопластичну ізоляцію. Тут на трубу наноситься плоскою стрічкою 11 через плоский мундштук 10, укріплений у черв'ячному редукторі 9, теплоізоляційна маса. Частота обертання і переміщення труби підбирається так, щоб товщина теплової ізоляції 3 була відповідною до розрахунку. Труба з ізоляцією покривається клеєм через трубу 2. Зовні ізольована труба покривається поліетиленовою плівкою, що укладається на клей. Плоскі мундштуки разом з редукторами мають можливість горизонтального переміщення у випадку ізоляції труб різного діаметру.

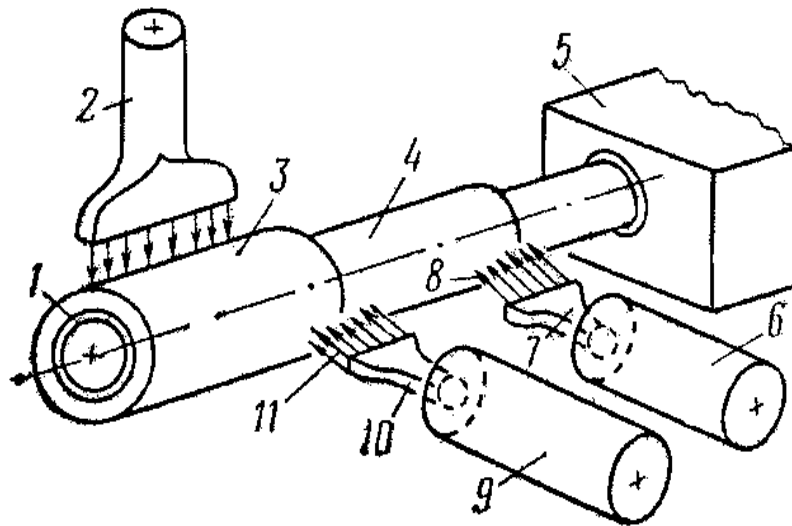


Рис. 2.2. Установка з нерухомими пістолетами-розприскувачами для нанесення пінополіуретанової ізоляції

Принцип обертання й осьового переміщення труби використовується в різних установках. У них тепла ізоляція наноситься на трубу, що обертається, а пістолет-розприскувач переміщується уздовж осі труби як у прямому, так і в зворотному напрямках. Для прискорення процесу ізоляції деякі установки забезпечуються тепловими приладами для сушіння ізоляції. Ці прилади монтуються таким чином, щоб не заважати процесу нанесення ізоляції. Нанесений шар ізоляції підсушується тепловими приладами, а потім наноситься чергова доза. Швидкість сушіння ізоляції регулюється температурою теплових приладів і швидкістю руху ізоляційного шару відносно приладу. Режим роботи підбирається так, щоб при обертанні труби і переміщенні форсунок (за один чи кілька проходів) виходила

задана товщина пінополіуретанової ізоляції. З цією метою установки обладнаються відповідною контрольно-вимірною апаратурою. Вони розраховані для проведення робіт у стаціонарних умовах (завод, трубозварювальна база в трасових умовах або спеціально створена виробнича ділянка).

На рис. 2.3 зображена схема установки з рухливим пістолетом-розприскувачем, на якій можна ізолювати труби діаметром від 500 до 1200 мм і довжиною до 12 м. Основними агрегатами установки є роликовий стенд для закріплення й обертання труби і напилювальний пристрій, здатний переміщатися вздовж труби. Складаються вони з конусів 3 і 13, на які встановлюється труба 4, що ізолюється. Конуси укріплюються на опорах 2 і 14 з фундаментами 15, 16. Конус 3 приводиться в обертання від електродвигуна з редуктором 1. До фундаменту кріпиться рама з рейкою 7 і зірочками 6 і 11. На рейці встановлюється каретка 10, на якій укріплений шланг 9 з розпилювачем для подачі на обертову трубу теплоізоляційної маси. Каретка 10 приводиться в рух ланцюговою передачею 8, яка працює від електродвигуна 5. Пінополіуретановий компонент, що наноситься на трубу кареткою, яка переміщається, спінюється, утворюючи задану товщину теплової ізоляції 12. Задана товщина ізоляції забезпечується відповідним підбором частоти обертання труби і переміщення каретки за один чи кілька проходів. Іноді замість каретки застосовується самохідний візок, на який, крім пристрою, що розпилює, встановлюються ємності для компонентів ізоляції, насосні дозуючі установки з контролюючими приладами і керуванням.

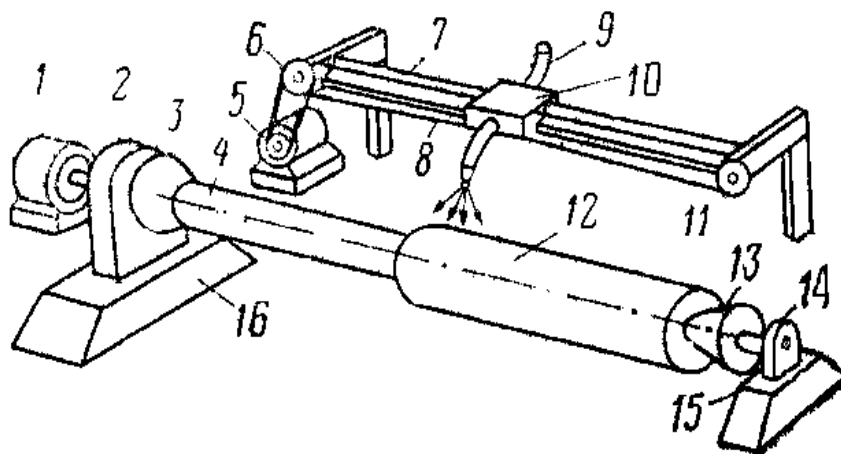


Рис. 2.3. Схема установки з рухливим пістолетом-розприскувачем для нанесення пінополіуретанової ізоляції

Таким чином, для нанесення теплової ізоляції на резервуари і трубопроводи можуть застосовуватися різні пристрої. Вибір пристрою повинен ґрунтуватися на теплоізоляційному матеріалі й враховувати економічні фактори проведення робіт.

2.2. Математична модель зростаючого лінійного в'язкопружного тіла при малих деформаціях у випадку одноосьового напруженого стану

Нехай виготовлення в'язкопружного тіла починається в момент $t = 0$ за абсолютною шкалою часу. Момент зародження (виготовлення) елемента цього тіла в околі точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ за абсолютною шкалою часу позначимо через $\tau^*(\mathbf{x})$. Функція просторових координат $\tau^*(\mathbf{x})$ визначає швидкість і послідовність виготовлення в'язкопружного тіла або закон зведення конструкції з в'язкопружних елементів. Загальними обмеженнями, що накладаються на функцію $\tau^*(\mathbf{x})$, звичайно є вимоги обмеженості та кусочної неперервності.

Якщо матеріал, з якого виготовляється в'язкопружне тіло або зводиться спорудження, має властивість старіння, а процес виготовлення (зведення) розтягнута у часі, то тіло або спорудження, що розглядається, буде мати вікову неоднорідність, унаслідок чого його фізико-механічні властивості будуть залежати як від часу, так і від просторових координат.

Залежність пружних і реологічних властивостей від просторових координат у таких тілах обумовлена тим, що процес старіння в окремих елементах протікає з тим чи іншим запізненням або випередженням, що залежить від віку даного елемента тіла. Такі тіла називаються *неоднорідно старіючими*.

Можна говорити про вікову неоднорідність іншої природи, коли тіло піддається впливу неоднорідного зовнішнього поля (температурного, радіаційного і т. п.), і тому процес старіння протікає неоднаково в усіх його елементах. Тоді вік елементів буде залежати від характеристик зовнішнього поля, а отже, і від просторових координат, як у попередньому випадку.

Розглянемо призматичний зразок, виготовлений зі старіючого в'язкопружного матеріалу одного віку і навантажений подовжнім зусиллям. Будемо вважати, що зразок знаходиться в одноосьовому напруженому стані. *Повна питома деформація* зразка $\delta(t, \tau)$ до моменту часу t під дією осьового одиничного навантаження, що прикладене у віці τ , визначається залежністю [2]

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau), \quad (2.1)$$

де $E(\tau)$ – залежний від віку зразка миттєвий модуль пружності матеріалу, а $C(t, \tau)$ – так звана *міра повзучості*, рівна деформації повзучості зразка до моменту часу t . Таким чином, повна питома деформація складається з двох доданків, перший з яких – миттєва пружна деформація, що виникає в момент прикладання одиничного навантаження і рівна $1/E(\tau)$, а другий – деформація повзучості, що викликана дією того ж одиничного навантаження.

Нехай у момент часу $\tau = \tau_0$ до призматичного зразка, що розглядається прикладається напруження, що змінюється за законом $\sigma_1 = \sigma_1(t)$ при $t \geq \tau_0$. Тоді на підставі співвідношення (2.1) і *принципу суперпозиції* повна *відносна* деформація виражається залежністю

$$\varepsilon_1(t) = \sigma_1(t) \delta(t, \tau_0) + \int_{\tau_0}^t \frac{d\sigma_1(\tau)}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Звідси, інтегруючи частинами, одержимо

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\sigma_1(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma_1(\tau) \frac{d}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Це співвідношення являє собою реологічне рівняння теорії повзучості однорідно старіючого середовища при одноосьовому напруженому стані. З рівняння (2.3) видно, що повна подовжня деформація $\varepsilon_1(t)$ складається з пружномиттєвої деформації (перший доданок) і деформації повзучості (другий доданок).

Можна показати, що в інтервалі $\tau_0 \leq \tau \leq \infty$ має місце нерівність

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] \leq 0,$$

звідки випливає, що деформація повзучості завжди невід'ємна при $\sigma_1 \geq 0$.

У ряді випадків доцільно записувати реологічне рівняння (2.3) у формі

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\sigma_1(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\sigma_1(\tau)}{E(\tau)} \left[E(\tau) \frac{d}{d\tau} \delta(t, \tau) \right] d\tau.$$

Розглянемо тепер неоднорідний за віком призматичний зразок (стрижень), виготовлений зі старіючого матеріалу і який перебуває в одноосьовому напруженому стані. Неоднорідність стрижня полягає в тім, що вік матеріалу стрижня є функцією подовжньої координати x_1 . Момент зародження матеріалу в околі точки з координатою x_1 , в абсолютній шкалі часу будемо позначати через $\tau^*(x_1)$.

Виділимо елементарний відрізок стрижня і введемо для цього елемента локальну шкалу часу t' , вважаючи, що нульовий момент часу ($t' = 0$) відповідає моменту зародження матеріалу в цьому елементі. Визначальне рівняння для локально однорідного за віком елемента стрижня запишемо у вигляді

$$\varepsilon'_1(t) = \frac{\sigma'_1(t')}{E(t')} - \int_0^{t'} \frac{\sigma'_1(\tau')}{E(\tau')} Q(t', \tau') d\tau', \quad (2.4)$$

де ε'_1 , σ'_1 – осьові деформація і напруження в точці x_1 , $Q(t', \tau')$ – ядро повзучості матеріалу. Штрихи означають, як уже було відзначено, що початок відліку часу (локальний нульовий момент часу) для елемента стрижня, що розглядається, збігається з моментом його зародження в абсолютній шкалі часу.

Зробимо в (2.4) заміну змінної $t' = t - \tau^*(x_1)$ ($\tau' = \tau - \tau^*(x_1)$), де t – час абсолютної шкали, однакової для усіх елементів. Одержимо

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\sigma_1(t)}{E(t - \tau^*(x_1))} - \int_{\tau_0}^t \frac{\sigma_1(\tau)}{E(\tau - \tau^*(x_1))} Q(t - \tau^*(x_1), \tau - \tau^*(x_1)) d\tau, \quad (2.5)$$

де ε_1 , σ_1 – деформація і напруження, що відповідають моменту t в абсолютній шкалі часу, а $\tau_0 = \tau_0(x_1)$ – момент прикладання зусиль до елемента тіла в околі точки з координатою x_1 , у тій же шкалі часу.

При кожному фіксованому x_1 , і заданій деформації $\varepsilon_1(t)$ співвідношення (2.5) являє собою інтегральне рівняння Вольтерра другого роду відносно напруження $\sigma_1(t)$. Огляд робіт, присвячених цим рівнянням, мається, наприклад, у [3; 42]. Зокрема, якщо при фіксованому x_1 , ядро $Q(t - \tau^*(x_1), \tau - \tau^*(x_1))$ і функції $\varepsilon_1(t)$, $E(t - \tau^*(x_1))$ інтегруються в квадратурах при $\tau_0(x_1) \leq t \leq T$, то рівняння (2.5) має єдиний розв'язок $\sigma_1(t)$ в інтервалі $\tau_0(x_1) \leq t \leq T$, який виражається в елементарних функціях.

Співвідношення (2.5) визначає рівняння стану лінійної теорії повзучості (в'язкопружності) для неоднорідно старіючих тіл при одноосьовому напруженому стані у випадку малих деформацій.

Через те, що ядра повзучості в цих рівняннях явно залежать від просторової координати, неоднорідно старіючі в'язкопружні тіла будемо іноді називати *неоднорідно в'язкопружними* тілами.

Основним аспектом задач повзучості твердого тіла є необхідність врахування фактора часу при визначенні напружено-деформованого стану.

Така постановка задачі припускає, що для матеріалу даного тіла відомі характеристики повзучості – деякі функції часу і константи, які визначаються з експерименту [2; 33; 35]:

- а) модуль миттєвої деформації;
- б) міра повзучості для одноосьового напруженого стану;
- в) міра повзучості при чистому зсуві;
- г) коефіцієнт поперечного стиску для пружної деформації,

а також деякі параметри, що входять до цих функцій.

Одержати аналітичні вирази для цих функцій в загальному випадку просторового напруженого стану дуже важко. Тому при побудові теорії повзучості доводиться виходити безпосередньо з експериментальних кривих повзучості. При цьому структура аналітичних виразів для зазначених вище характеристик повинна відбивати основні властивості процесу повзучості в реальних тілах і не суперечити результатам експериментальних даних. У той же час теорія повзучості повинна бути така, щоб можна було розраховувати на розв'язання її основних задач звичайними засобами математичного аналізу.

Ідея опису явищ типу післядії і повзучості за допомогою інтегральних рівнянь зі змінною верхньою межею належить Больцману. Вона одержала подальший розвиток у Вольтерра. В більшості робіт, присвячених спадкоємної теорії пружності, ядра інтегральних рівнянь приймаються залежними від різниці двох аргументів – часу прикладення навантаження τ і моменту спостереження t . Ця умова впливає з вимоги реалізації замкнутого циклу Вольтерра, що виражає інваріантність інтегрального співвідношення відносно зміни початку відліку часу.

Відомо [3; 42] що інтегральні рівняння з такими ядрами зводяться до лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами і теорія спадковості інтерпретується як теорія Максвелла-Томсона пружно-в'язкого або пружно-релаксуючого тіла.

При виборі аналітичного виразу міри повзучості $C(t, \tau)$ для деяких матеріалів, що мають цю властивість, необхідно враховувати ті основні умови, які повинні задовольняти цей вираз.

Чисельні експерименти [2; 33; 35] показують, що

- а) $C(t, \tau) > 0$ для усіх значень $t > \tau$; $C(t, \tau) = 0$ при $t = \tau$;

б) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} = 0$ для усіх значень $0 < \tau \leq t$;

в) функція повзучості $C(t, \tau)$ повинна монотонно убувати в залежності від віку матеріалу $\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} < 0$, причому так, щоб $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(t, \tau) = C_0$, де C_0 – граничне значення міри повзучості для даного матеріалу;

г) починаючи з деякого віку $\tau = \tau_0$, значення функції повзучості $C(t, \tau)$ повинно як завгодно мало відрізнятися від функції повзучості для старого чи вже старіючого матеріалу.

Виходячи з цих розумінь вираз для міри повзучості $C(t, \tau)$ приймається

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau). \quad (2.6)$$

Для апроксимації функції $f(t - \tau)$ використовується сума експонентних функцій

$$f(t - \tau) = \sum_{k=0}^m B_k e^{-\gamma_k (t - \tau)}, \quad (2.7)$$

де B_k і γ_k – константи, які підібрані належним чином для даного матеріалу, причому $B_0 = 1$, $\gamma_0 = 0$ і $\gamma_k > 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots, m$), а $\varphi(\tau)$ – поки довільна монотонно убутна функція, що задовольняє умові

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = C_0. \quad (2.8)$$

Тоді співвідношення (2.6) для $C(t, \tau)$ остаточно приймає вигляд

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) \sum_{k=0}^m B_k e^{-\gamma_k (t - \tau)}. \quad (2.9)$$

Таке зображення міри повзучості $C(t, \tau)$ характерно тим, що воно відбиває основні властивості явища повзучості матеріалу в часі, а саме, його старіння і спадкоємність.

У силу умови (2.8) вираз (2.9), починаючи з деякого віку $\tau \geq \tau_0$, буде задовольняти асимптотичну рівність $C(t, \tau) \approx C_0 \sum_{k=0}^m B_k e^{-\gamma_k (t - \tau)}$, яка досить добре збігається з експериментальними кривими повзучості для ряду матеріалів, у їхньому старому віці, причому розходження у властивостях цих матеріалів буде визначатися належним підбором параметрів C_0 , B_k і γ_k ($k = 1, 2, 3, \dots, m$).

Звідси випливає, що швидкість прямування функції $\varphi(\tau)$ до сталої величини C_0 характеризує момент настання старості даного матеріалу. Крім цього вигляд функції $\varphi(\tau)$ повинен бути підібраний, так щоб для віку матеріалу $0 < \tau \leq t$ вираз функції $C(t, \tau)$ добре погодився з експериментальними кривими повзучості цього матеріалу.

На підставі вищенаведених міркувань і в результаті обробки ряду експериментальних даних [35] функцію $\varphi(\tau)$ в загальному випадку представляють виразом

$$\varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{\tau^k} \quad (\tau > 0), \quad (2.10)$$

де C_0 – граничне значення міри повзучості для даного матеріалу, A_k – деякі параметри, що залежать від властивостей і умов старіння матеріалу. Значення A_k повинні бути підібрані так, щоб співвідношення (2.9) щонайкраще описувало експериментальні криві повзучості даного матеріалу.

У [2; 3; 33; 35] наведені деякі експериментальні дані, що відносяться до повзучості різних матеріалів, у тому числі і для металів, що знаходяться під впливом високих температур. При їхньому аналізі й оцінці виявляється, що в співвідношеннях (2.7) і (2.10) досить обмежитися двома членами ряду, тобто прийняти

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}, \quad f(t - \tau) = 1 + B_1 e^{-\gamma_1(t - \tau)}.$$

Числові значення A_1, B_1, C_0 і $\gamma_1 = \gamma$ підбираються так, щоб одержати близький збіг з експериментальними кривими повзучості необхідного матеріалу. З цих же джерел, зазначені параметри будуть вибиратися і при розв'язанні розглянутих нижче задач.

Таким чином, якщо закон зміни міри повзучості представлений у загальному випадку виразом

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t - \tau)}], \quad (2.11)$$

де

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau},$$

то він дає досить близький збіг з експериментальними кривими повзучості металів (при підвищених температурах) як у старому, так і в молодому його віці, а та-

кож відбиває основні властивості явища повзучості матеріалу в часі, а саме його старіння і спадковість.

Не виключена можливість, що в деяких випадках для більш кращого збігу з експериментальними кривими повзучості досліджуваного матеріалу виявиться необхідним у виразах (2.7) і (2.10) зберегти не два, а більше членів ряду, або навіть вибрати для $\varphi(\tau)$ інший вигляд залежності.

Тому надалі при розв'язанні основних рівнянь теорії в'язкопружності з метою збереження спільності будемо вважати, що міра повзучості $C(t, \tau)$ виражається залежністю загального виду (2.11), в якому функція $\varphi(\tau)$ повинна бути тільки монотонною і задовольняти умову (2.8).

Крім міри повзучості, кілька слів необхідно сказати ще про одну характеристику – модуль пружномиттєвої деформації $E(\tau)$.

Чисельні дослідження показують [3; 35], що модуль пружномиттєвої деформації старіючих матеріалів із збільшенням їх віку τ росте, наближаючись до граничного значення модуля пружності E_0 для кривих дуже старого віку. Одночасно з експериментальних кривих пружномиттєвих деформацій випливає, що у випадку природного старіння функція $E(\tau)$ – неперервна й обмежена функція віку τ на всьому інтервалі його зміни $\tau^* \leq \tau < \infty$, τ^* – час виготовлення (зародження) матеріалу. Узагальнюючи наявні експериментальні дані, можна вважати, що функція $E(\tau)$ задовольняє наступні умови:

$$E(\tau) > 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} E(\tau) = E_0,$$

$$\frac{dE(\tau)}{d\tau} \geq 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dE(\tau)}{d\tau} = 0 \quad \forall \tau \geq \tau^*.$$

Надалі будемо користатися формою залежності миттєвого модуля пружності старіючого матеріалу від віку $E(\tau) = E_0 (1 - A e^{-\beta \tau})$, де A, β – додатні константи. Залежність такого виду експериментально підтверджена в [2; 3; 33; 35].

Прийняті при розрахунках значення параметрів повзучості наведені при розв'язанні конкретних задач.

2.3. Метод розрахунку напружено-деформованого стану в'язкопружних зростаючих тіл у процесі нарощування

Розглянемо порожній однорідний в'язкопружний круговий циліндр, поперечний переріз якого являє собою кругове кільце внутрішнього радіуса a_0 і зовнішнього b_0 (рис. 2.4). Починаючи з моменту часу $t = 0$ до циліндра зсередини прикладається внутрішній тиск $P(t)$, $P(0) = P_0$ і починається його безперервне нарощування однорідним в'язкопружним матеріалом, так що внутрішній радіус циліндра монотонно убиває за законом $a(t)$, $a(0) = a_0$. У момент часу T внутрішній радіус циліндра досягає значення a_1 , і процес нарощування припиняється, тобто $a(t) = a_1$ при $t \geq T$.

Функції $a(t)$ і $P(t)$ передбачаються неперервно диференційовні на інтервалі $0 < t < T$. Треба визначити напружено-деформований стан у циліндрі для всіх $t \geq 0$.

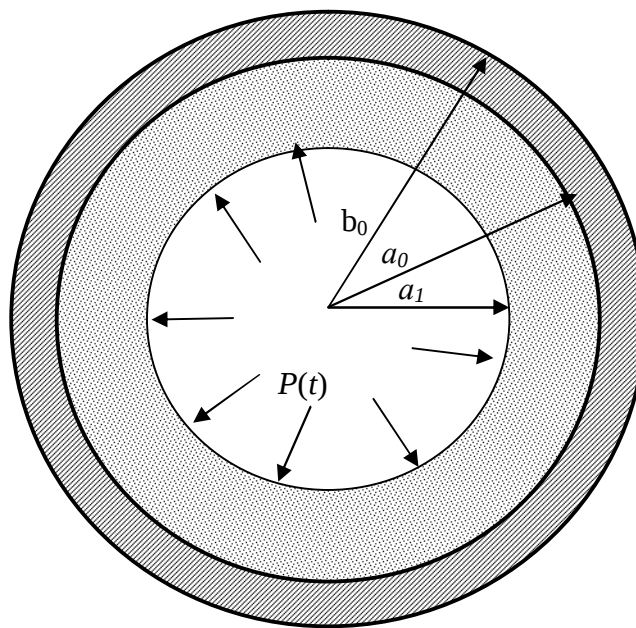


Рис. 2.4. Схема нарощування в'язкопружного порожнього циліндра

При розв'язанні поставленої задачі скористаємося підходом викладеним у [42; 45; 49; 50; 53].

Розглянемо плоску деформацію циліндра, тобто покладемо $u_z = 0$. Тут вісь z спрямована вздовж осі циліндра, а символом u_z позначене переміщення точок циліндра вздовж осі z .

Запишемо основні рівняння задачі:

умова нестисливості –

$$\varepsilon_r + \varepsilon_g = 0, \quad (2.12)$$

рівняння рівноваги –

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\sigma_r - \sigma_g}{r}, \quad (2.13)$$

співвідношення Коші для швидкостей деформацій і переміщень –

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_g = \frac{\dot{u}}{r}. \quad (2.14)$$

Тут r, g – полярні координати в площині поперечного перерізу циліндру, а $\varepsilon_r = \varepsilon_r(t, r)$ і $\varepsilon_g = \varepsilon_g(t, r)$ – компоненти деформації, точкою позначена похідна за часом.

Оскільки усі компоненти деформації, крім ε_r і ε_g , дорівнюють нулю, то з урахуванням (2.12) для інтенсивності деформацій маємо $\varepsilon_u = (2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2} = 2|\varepsilon_r| = 2|\varepsilon_g|$. Звідси і з визначальних рівнянь нелінійної теорії повзучості для неоднорідно-старіючих тіл через умову $\varepsilon_g > 0$ рівняння стану запишемо у вигляді

$$\sigma_r(t, r) - \sigma_g(t, r) = 2G_1(t - \tau^*(r))(\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_g(t, r))\varepsilon_g^{m-1}(t, r) - \int_{\tau^*(r)}^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(\varepsilon_r(\tau, r) - \varepsilon_g(\tau, r))\varepsilon_g^{m-1}(\tau, r)d\tau, \quad (2.15)$$

де $G_1 = G \cdot 2^{m-1}$; $R_1 = R \cdot 2^{m-1}$; $m = 1, 2, 3, \dots$ – параметр, що характеризує степінь нелінійності закону повзучості; G – пружноміттевий модуль матеріалу; $R = R(t, \tau)$ – ядро релаксації в'язкопружного матеріалу; $\tau^*(r)$ – момент зародження елементарного шару циліндра, τ – вік матеріалу, в якому до нього прикладене навантаження.

Функція $\tau^* = \tau^*(r)$ дорівнює нулю при $a_0 \leq r \leq b_0$ і збігається з функцією, зворотною функції $a(t)$, при $a_1 \leq r \leq a_0$, тобто $\tau^*(a(t)) \equiv t$, $a(\tau^*(r)) \equiv r$, $\tau^*(a_0) = 0$, $a(0) = a_0$.

Граничні умови мають вигляд

$$\sigma_r \Big|_{r=b_0} = 0, \quad \sigma_r \Big|_{r=a(t)} = -P(t), \quad 0 \leq t < T,$$

$$\sigma_\alpha \Big|_{r=a_1, t \geq T} = 0, \quad \alpha = r, \vartheta. \quad (2.16)$$

Диференціюючи (2.12) за часом і підставивши в одержане співвідношення (2.14), прийдемо до рівняння

$$\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} + \frac{\dot{u}_r}{r} = 0.$$

Останнє співвідношення є ні що інше, як диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $\dot{u}_r = \dot{u}_r(t, r)$. Розв'язуючи це рівняння, з урахуванням (2.14) одержимо

$$\dot{u}_r = \frac{c(t)}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_r = -\dot{\varepsilon}_\vartheta = -\frac{c(t)}{r^2}, \quad (2.17)$$

де $c(t)$ – деяка функція, що підлягає визначенню.

У момент миттєвого прикладання навантаження $P(t)$ (тобто при $t = 0$) швидкості компонентів деформацій $\varepsilon_r, \varepsilon_\vartheta$ і переміщення u_r містять сингулярні складові виду $\Delta \varepsilon_r(r) \delta(t), \Delta \varepsilon_\vartheta(r) \delta(t), \Delta u_r(r) \delta(t)$, де $\Delta \varepsilon_r, \Delta \varepsilon_\vartheta, \Delta u_r$ – приріст відповідних величин у момент $t = 0$, а $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака. Отже, при $t = 0$ співвідношення Коші виконуються для приростів деформацій та переміщень. Використовуючи приведені міркування, можна показати, що одержаний нижче розв'язок справедливий і для довільного кусочно-неперервного навантаження $P(t)$.

З (2.17) із урахуванням початкової умови $u_r(\tau^*(r), r) = \varepsilon_\vartheta(\tau^*(r), r) = 0$ випливає, що

$$u_r(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r}, \quad (2.18)$$

$$-\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\vartheta(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r^2} \quad \text{при} \quad a(t) \leq r < a_0; \quad (2.19)$$

$$u_r(t, r) = A(t)/r, \quad (2.20)$$

$$-\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\vartheta(t, r) = A(t)/r^2 \quad \text{при} \quad a_0 \leq r \leq b_0; \quad (2.21)$$

$$A(t) = -\int_0^t c(\tau) d\tau. \quad (2.22)$$

Інтегрування в (2.22) включає точку $t = 0$. Отже, якщо сингулярну складову функції $c(t)$ позначити через $c_0 \delta(t)$, то границя функції $A(t)$ у точці $t = 0$ праворуч дорівнює c_0 .

Виразимо напруження σ_r через функцію $A(t)$. Для цього розглянемо дві області.

Область $a_0 \leq r \leq b_0$ – вихідний циліндр.

Підставляючи до (2.15) вираз для компонентів деформації (2.21), одержимо (враховуючи, що $\tau^* = 0$, оскільки процес нарощування відсутній)

$$\sigma_r(t, r) - \sigma_g(t, r) = -\frac{2}{r^{2m}} \left[2G_1(t) A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau) A^m(\tau) d\tau \right]. \quad (2.23)$$

Інтегруючи рівняння (2.13) в межах від r до b_0 , маємо з урахуванням граничних умов (2.16)

$$\sigma_r(t, r) = \int_r^{b_0} \frac{\sigma_r - \sigma_g}{r} dr. \quad (2.24)$$

Підставляючи (2.23) у (2.24), остаточно матимемо

$$\sigma_r(t, r) = -\int_r^{b_0} \frac{2dr}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t) A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau) A^m(\tau) d\tau \right]. \quad (2.25)$$

Область $a(t) \leq r < a_0$ – зона росту.

Підставимо (2.19) до рівняння стану (2.15), будемо мати

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_g(t, r) = & -\frac{2}{r^{2m}} \left[2G_1(t - \tau^*(r)) (A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \right. \\ & \left. - \int_{\tau^*(r)}^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Інтегруючи (2.13) в межах від $a(t)$ до r з урахуванням граничних умов (2.16), одержимо

$$\sigma_r(t, r) = -P(t) - \int_{a(t)}^r \frac{\sigma_r - \sigma_g}{r} dr. \quad (2.27)$$

Підставляючи (2.26) до (2.27), одержимо

$$\sigma_r(t, r) = -P(t) + \int_{a(t)}^r \frac{2dr}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t - \tau^*(r)) (A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \right.$$

$$- \int_{\tau^*(r)}^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau \Big]. \quad (2.28)$$

Рівняння для визначення функції $A(t)$ випливає з умови неперервності напруження $\sigma_r(t, r)$ на межі розділу двох розглянутих областей, тобто при $r = a_0$. Підставляючи в (2.25) і (2.28) значення $r = a_0$ і зрівнюючи їхні праві частини, будемо мати

$$\begin{aligned} & - \int_{a_0}^{b_0} \frac{2dr}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau)d\tau \right] = -P(t) + \\ & + \int_{a(t)}^{a_0} \frac{2dr}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t - \tau^*(r))(A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \right. \\ & \left. - \int_0^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau \right]. \end{aligned}$$

Переносячи всі доданки в одну сторону рівняння, а функцію $P(t)$ в іншу, одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{a_0}^{b_0} \frac{2dr}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau)d\tau \right] + \\ & + \int_{a(t)}^{a_0} \frac{2}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t - \tau^*(r))(A(t) - A(\tau^*(r)))^m \right] dr - \\ & - \int_{a(t)}^{a_0} \frac{2dr}{r^{2m+1}} \int_0^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau \Big] = P(t). \quad (2.29) \end{aligned}$$

В останньому виразі, до другого і третього доданків уведемо заміну змінних $\tau = \tau^*(r)$ ($r = a(\tau)$), тоді $dr = \dot{a}(\tau)d\tau$, і при $r = a_0$, $\tau = \tau^*(a_0) = 0$; при $r = a(t)$, $\tau = \tau^*(a(t)) \equiv t$. Для запобігання накладки в позначеннях в останньому доданку виразу (2.29) (τ – параметр і τ – нова змінна), що виникає в зв'язку з цією заміною, для змінної τ введемо $s = \tau^*(r)$ ($r = a(s)$), тоді вираз (2.29) переписеться у вигляді

$$\int_{a_0}^{b_0} \frac{2dr}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau)d\tau \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)} \left[2G_1(t-\tau)(A(t) - A(\tau))^m \right] d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^\tau \frac{2\dot{a}(s)}{a^{2m+1}(s)} R_1(t-s, \tau-s)(A(\tau) - A(s))^m ds d\tau = P(t). \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Позначимо тут

$$\begin{aligned}
H_1 &= \int_{a_0}^{b_0} \frac{2dr}{r^{2m+1}}, \quad H_2(t, \tau) = \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)} 2G_1(t-\tau), \\
H_3(t, \tau, s) &= \frac{2\dot{a}(s)}{a^{2m+1}(s)} R_1(t-s, \tau-s),
\end{aligned}$$

тоді рівняння (2.30) запишеться

$$\begin{aligned}
& H_1(2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau)d\tau) - \int_0^t H_2(t, \tau)(A(t) - A(\tau))^m d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^\tau H_3(t, \tau, s)(A(\tau) - A(s))^m ds d\tau = P(t). \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Визначивши функцію $A(t)$ з нелінійного інтегрального рівняння (2.31), переміщення u_r та компоненти деформацій ε_r і ε_θ за формулами (2.18) – (2.21), а напруження σ_r і σ_θ за формулами (2.23), (2.25), (2.26), (2.28). Для напруження σ_z з умови $\varepsilon_z = 0$ і рівняння стану (2.15) одержимо $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$.

2.4. Математична модель процесу нарощування в'язкопружного порожнього циліндра при дії внутрішнього тиску

Розглянемо нарощування у випадку лінійного закону повзучості. Цей випадок можна дослідити, поклавши у встановлених співвідношеннях $m = 1$. При цьому з формул (2.20), (2.21), (2.23), (2.25) будемо мати

$$\begin{aligned}
u_r(t, r) &= A(t)/r, \quad -\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = A(t)/r^2, \\
\sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) &= -\frac{2}{r^2} \left(2G(t)A(t) - \int_0^t R(t, \tau)A(\tau)d\tau \right), \\
\sigma_r(t, r) &= -\int_r^{b_0} \frac{2dr}{r^3} \left[2G(t)A(t) - \int_0^t R(t, \tau)A(\tau)d\tau \right], \text{ при } a_0 \leq r \leq b_0; \quad (2.32)
\end{aligned}$$

з (2.18), (2.19), (2.26), (2.28) одержимо

$$\begin{aligned}
u_r(t, r) &= \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r}, \\
-\varepsilon_r(t, r) &= \varepsilon_g(t, r) = (A(t) - A(\tau^*(r))) / r^2, \\
\sigma_r(t, r) - \sigma_g(t, r) &= -\frac{2}{r^2} \left[2G(t - \tau^*(r))(A(t) - A(\tau^*(r))) - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\tau^*(r)}^t R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(A(\tau) - A(\tau^*(r))) d\tau \right], \\
\sigma_r(t, r) &= -P(t) + \int_{a(t)}^r \frac{2dr}{r^3} \left[2G(t - \tau^*(r))(A(t) - A(\tau^*(r))) - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\tau^*(r)}^t R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(A(\tau) - A(\tau^*(r))) d\tau \right], \text{ при } a(t) \leq r < a_0. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Далі, як і у випадку закону повзучості загального виду, для визначення функції $A(t)$ складемо рівняння, яке впливає з умови неперервності напруження $\sigma_r(t, r)$ на межі розділу двох областей, тобто при $r = a_0$. Після перетворень, аналогічних тим, що проводилися при одержанні формули (2.29), матимемо

$$\begin{aligned}
A(t) \int_{a(t)}^{b_0} 2G(t - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3} - \int_{a(t)}^{b_0} \frac{2dr}{r^3} \int_0^t R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) A(\tau) d\tau - \\
- \int_{a(t)}^{a_0} 2G(t - \tau^*(r)) A(\tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3} + \\
+ \int_{a(t)}^{a_0} \frac{2dr}{r^3} \int_0^t R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) A(\tau^*(r)) d\tau = P(t).
\end{aligned}$$

У цьому виразі, до останніх двох доданків застосуємо таку ж заміну змінної, як і у формулі (2.29) і одночасно змінимо порядок інтегрування, так щоб інтеграл $\int_0^t A(\tau) d\tau$ був «зовнішнім», після чого будемо мати

$$\begin{aligned}
A(t) \int_{a(t)}^{b_0} 2G(t - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3} - \int_0^t \left[\int_{a(\tau)}^{b_0} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3} + \right. \\
\left. + \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^3(\tau)} \left(\int_{\tau}^t R(t - \tau, s - \tau) ds - 2G(t - \tau) \right) \right] A(\tau) d\tau = P(t). \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Позначаючи в рівнянні (2.34)

$$D_1(t) = \int_{a(t)}^{b_0} 2G(t - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3},$$

$$D_2(t, \tau) = \int_{a(\tau)}^{b_0} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3} +$$

$$+ \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^3(\tau)} \left(\int_{\tau}^t R(t - \tau, s - \tau) ds - 2G(t - \tau) \right),$$

одержимо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду для визначення функції $A(t)$ у випадку лінійного закону повзучості

$$D_1(t)A(t) - \int_0^t D_2(t, \tau)A(\tau)d\tau = P(t). \quad (2.35)$$

Як відомо [3; 42 – 45] розв'язок (2.35) можна одержати в квадратурах, якщо ядро релаксації взяти у формі

$$R(t, \tau) = \frac{\partial \mu(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad (2.36)$$

$$\mu(t, \tau) = 2G(\tau) - \varphi(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}). \quad (2.37)$$

Функція $\mu(t, \tau)/2$ дорівнює дотичному напруженню в однорідному тілі в момент часу t , при прикладенні до тіла одиничної деформації зсуву у віці τ ; $\varphi(\tau)$ – функція старіння, γ – константа, параметр матеріалу.

Рівняння (2.35), використовуючи співвідношення (2.36), (2.37), можна записати у вигляді

$$A(t)\mu_1(t, t) - \int_0^t \frac{\partial \mu_1(t, \tau)}{\partial \tau} A(\tau)d\tau = P(t), \quad (2.38)$$

де

$$\mu_1(t, \tau) = \int_{a(t)}^{b_0} \mu(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3}. \quad (2.39)$$

Підставляючи (2.37) у (2.39), одержимо

$$\mu_1(t, \tau) = 2G_2(\tau) - \varphi_2(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}),$$

$$G_2(\tau) = \int_{a(t)}^{b_0} G(\tau - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3}, \quad \varphi_2(\tau) = \int_{a(t)}^{b_0} \varphi(\tau - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3}. \quad (2.40)$$

Рівняння (2.38) будемо розв'язувати шляхом зведення до диференціального рівняння другого порядку відносно функції $A(t)$. Дійсно, рівняння (2.38), інтегруючи частинами з урахуванням (2.39), (2.40), можна записати у вигляді

$$\int_0^t \dot{A}(\tau) [2G_2(\tau) - \varphi_2(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})] d\tau = P(t).$$

Диференціюючи останнє співвідношення два рази по t , знаходимо

$$2G_2(t)\dot{A}(t) - \int_0^t \dot{A}(\tau)\varphi_2(\tau)\gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \dot{P}(t), \quad (2.41)$$

$$2G_2(t)\ddot{A}(t) + 2\dot{G}_2(t)\dot{A}(t) - \gamma\varphi_2(t)\dot{A}(t) + \\ + \gamma^2 \int_0^t \dot{A}(\tau)\varphi_2(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \ddot{P}(t). \quad (2.42)$$

Виключивши із співвідношень (2.41), (2.42) інтеграл $\int_0^t \dot{A}(\tau)\varphi_2(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau$, одержимо диференціальне рівняння для визначення функції $A(t)$

$$2G_2(t)\ddot{A}(t) + \dot{A}(t)[2\dot{G}_2(t) - \gamma\varphi_2(t) + \gamma 2G_2(t)] = \ddot{P}(t) + \gamma\dot{P}(t), \quad (2.43)$$

з наступними початковими умовами, що випливають безпосередньо з (2.38) і (2.41) з урахуванням (2.39), (2.40)

$$A(0) = \frac{P(0)}{2G_2(0)}, \quad \dot{A}(0) = \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)}. \quad (2.44)$$

Розв'язуючи рівняння (2.43) з початковими умовами (2.44), остаточно одержимо розв'язок для функції $A(t)$

$$A(t) = \frac{P_0}{2G_2(0)} + \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)} \int_0^t e^{-\eta(\tau)} d\tau + \int_0^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \int_0^\tau \frac{\ddot{P}(x) + \gamma\dot{P}(x)}{2G_2(x)} e^{\eta(x)} dx, \quad (2.45)$$

де

$$\eta(\tau) = \int_0^\tau [\gamma + (2\dot{G}_2(z) - \gamma\varphi_2(z))2G_2^{-1}(z)] dz.$$

Визначивши функцію $A(t)$ із співвідношення (2.45), знаходимо переміщення u_r , компоненти деформацій $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$, а також напруження за формулами (2.32), (2.33).

Як приклад, розглянемо задачу про нарощування згаданого вище циліндра з полімерного матеріалу, що працює в агресивних середовищах.

Функцію $\mu(t, \tau)$ візьмемо у вигляді (2.37), за умови, що

$$G = \text{const}, \quad \varphi(\tau) = 2G(C_0 + A_0 e^{-\beta\tau}), \quad (2.46)$$

де C_0, A_0, β – константи матеріалу [2; 3].

Нехай внутрішній радіус $a(t)$ циліндра змінюється відповідно до співвідношення (рис. 2.5)

$$\frac{1}{a^2(t)} = \frac{1}{a_0^2} + \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_0^2} \right) \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.47)$$

Перш, ніж приступити безпосередньо до визначення напружено-деформованого стану циліндра, необхідно обчислити функції $G_2(\tau)$ і $\varphi_2(\tau)$, що входять до виразу визначення функції $A(t)$. Для цього скористаємося формулами (2.40). Параметри C_0, A_0, β, γ і величини a_0, a_1 фіксовані і дорівнюють: $C_0 = 0,38$; $A_0 = 0,55$; $\beta = 0,015 \text{ година}^{-1}$; $\gamma = 0,1 \text{ година}^{-1}$; $a_0 = 0,9 b_0$; $a_1 = 0,5 b_0$, а внутрішній тиск змінюється за лінійним законом $P(t) = P_0 - P_0 t / (2T)$. Оскільки напруження не залежать від величини пружноміттевого модуля G , а переміщення і деформації обернено пропорційні йому, при розрахунках можна прийняти $G = 1$.

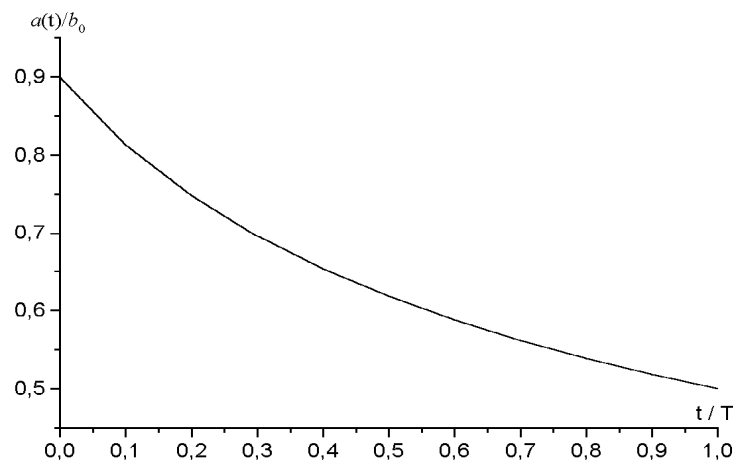


Рис. 2.5. Закон зміни внутрішнього радіуса циліндра

Підставляючи (2.46), (2.47) у співвідношення (2.40) з урахуванням числових значень параметрів (констант матеріалу), що входять до них, і величин a_0, a_1 , одержимо

$$G_2(\tau) = 0,235 + 2,765 \frac{\tau}{T},$$

$$\varphi_2(\tau) = 0,0235 + 0,2765\tau + \frac{207,412}{T} e^{0,018T} - \frac{207,412}{T} e^{(0,016T - 0,02\tau)}. \quad (2.48)$$

Вирази (2.48), для зручності, представлені безрозмірним виглядом.

Підставляючи (2.48) до (2.45) визначимо функцію $A(t)$, а за формулами (2.32), (2.33) – напружено-деформований стан циліндра.

На рис. 2.6, 2.7 і на рис. 2.8, 2.9 наведені залежності від часу максимального дотичного напруження і переміщення u_r при різних значеннях часу нарощування T для наступних точок циліндра: 1 – $r = b_0$; 2 – $r = 0,9b_0$; 3 – $r = 0,79b_0$.

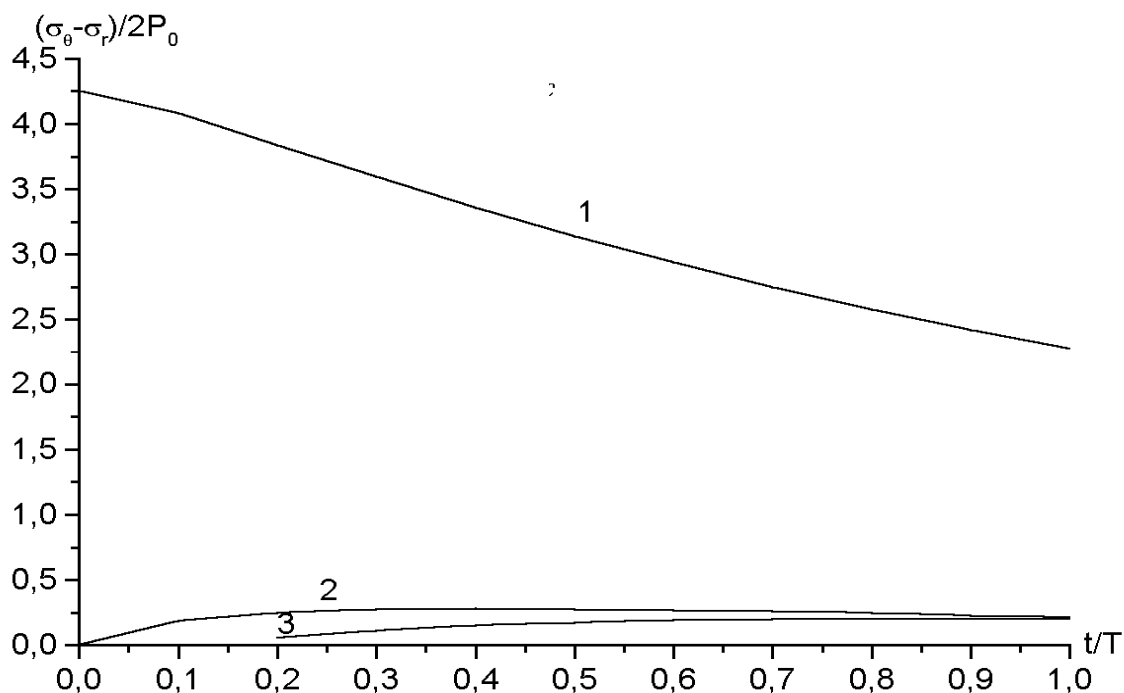


Рис. 2.6. Залежність максимальних дотичних напружень від часу для різних точок поперечного перерізу циліндра при $T = 10$ годин

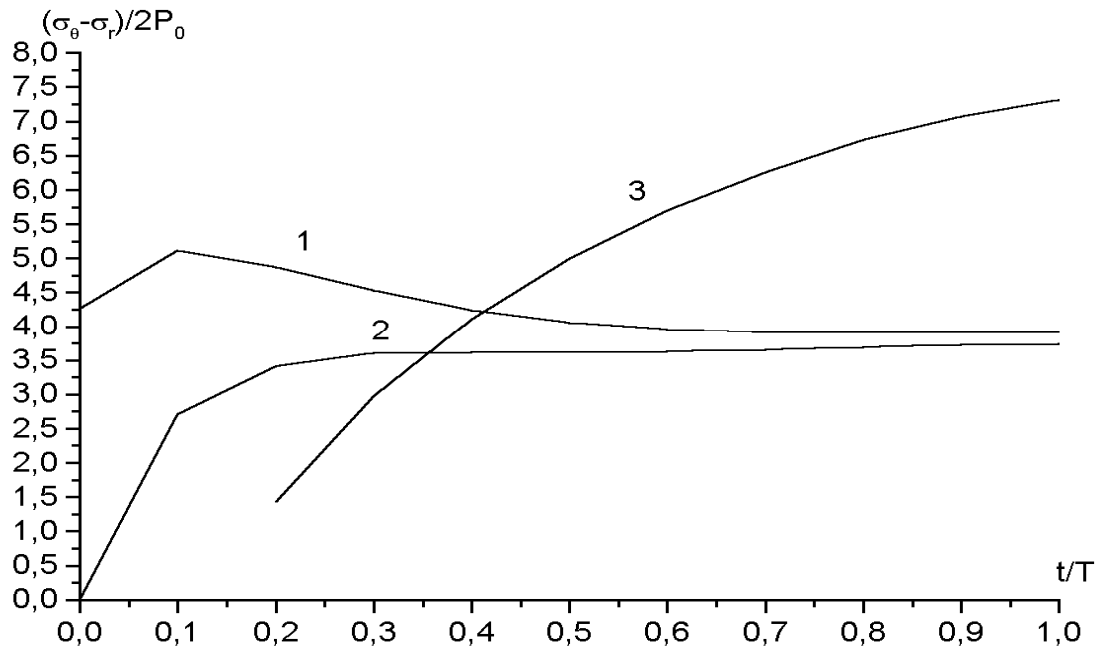


Рис. 2.7. Залежність максимальних дотичних напружень від часу для різних точок поперечного перерізу циліндра при $T = 50$ годин

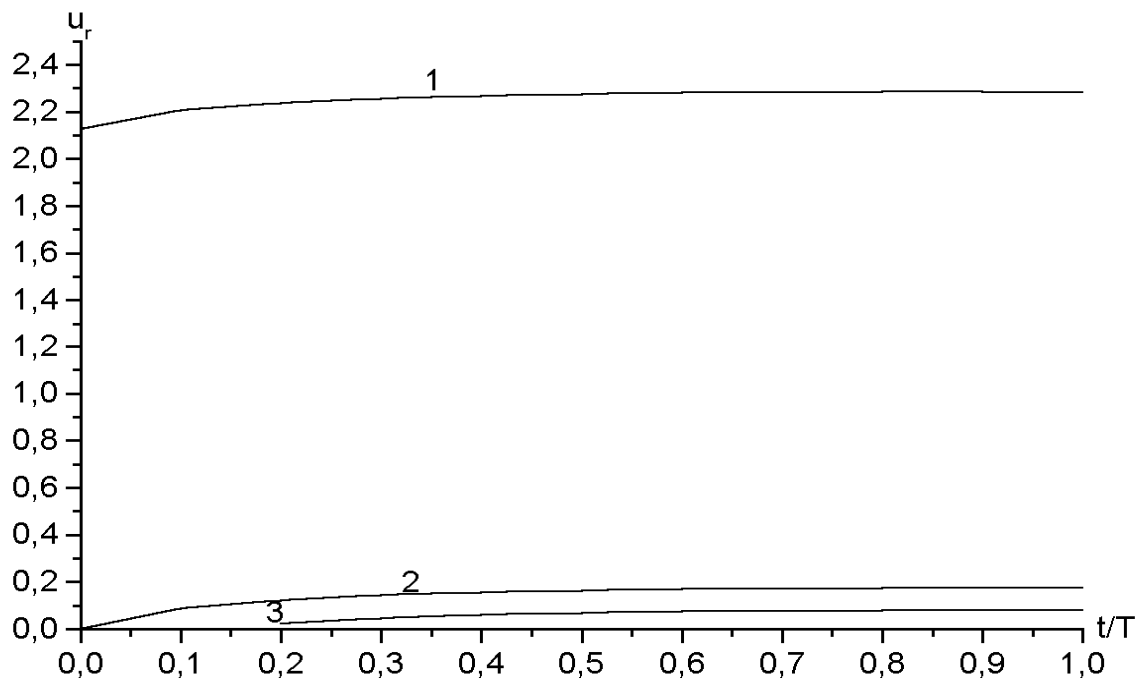


Рис. 2.8. Залежність радіальних переміщень від часу для різних точок поперечного перерізу циліндра при $T = 10$ годин

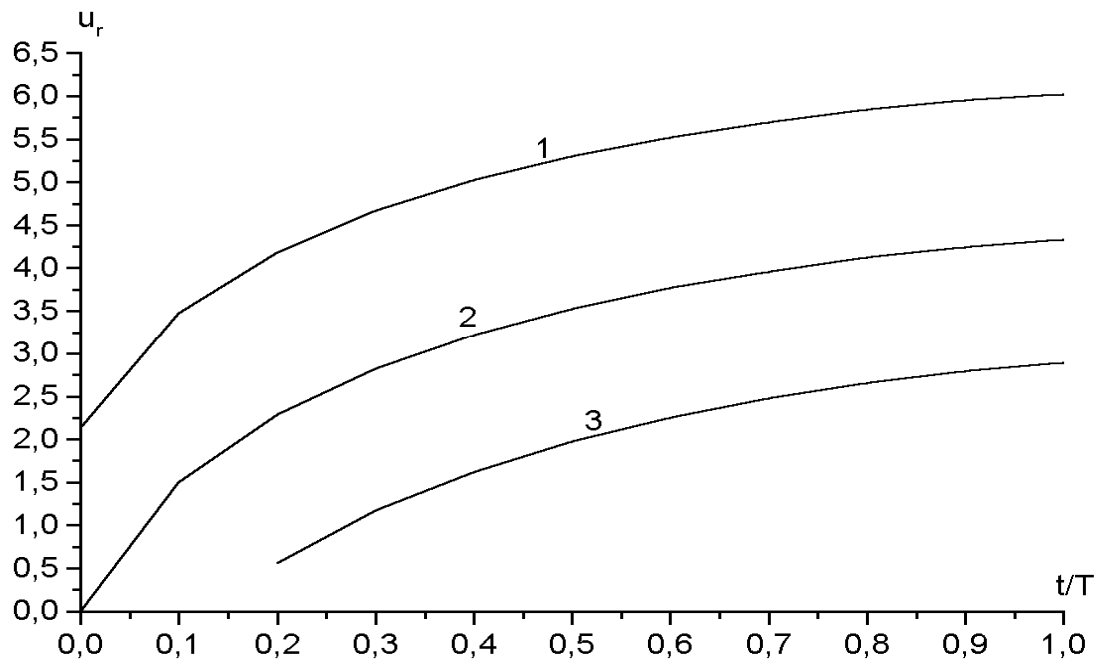


Рис. 2.9. Залежність радіальних переміщень від часу для різних точок поперечного перерізу циліндра при $T = 50$ годин

Як видно з рис. 2.6 – 2.9, тривалість процесу нарощування впливає як на напружений стан, так і на переміщення точок циліндра. При цьому характер кривих змінюється незначно, але зате сильно змінюються величини самих напружень і переміщень. Так, наприклад, з рис. 2.6, 2.7 очевидно, що при десятих годинах нарощування напруження в точці 1 монотонно убувають, а в точці 2 збільшуються незначно і до кінця процесу нарощування навіть мало-мало зменшуються. При п'ятдесяти годинах нарощування картина зовсім інша – напруження в другій точці починають значно збільшуватися згодом і за своїми значеннями наближаються до значень у точці 1, а напруження в точці 3 збільшуються настільки, що вже перевищують напруження в точках 1 і 2 в два рази. Такий розподіл напружень можна пояснити таким чином: по-перше – точки 2 і 3 весь час знаходяться ближче до лінії дії навантаження, чим точка 1, по-друге – при більш швидкому процесі нарощування матеріал не встигає до кінця виявити свої в'язкопружні властивості, що підтверджують і криві для переміщень, зображені на рис. 2.8, 2.9.

Таким чином, представлена розрахункова схема дозволяє оцінити вплив часу нарощування на напружено-деформований стан зростаючого циліндра.

2.5. Вплив неоднорідності матеріалу деталі на напружено-деформований стан при нарощуванні

Одним з важливих аспектів, що представляють інтерес, як у механіці зростаючих в'язкопружних тіл, так і у виробництві різних деталей методами нарощування, є питання про те, як формується напружено-деформований стан у деталі, коли вихідний і нарощуваний матеріал має різні в'язкопружні властивості, тобто одержувана таким чином деталь, складається з неоднорідного, в цілому, матеріалу [45].

Розглянемо порожній круговий в'язкопружний (пружноміттевий модуль матеріалу – $G^{(1)}$) циліндр внутрішнього радіуса a і зовнішнього b_0 (рис. 2.10). Починаючи з моменту часу $t = 0$ до циліндра зсередини прикладається внутрішній тиск $P(t)$, $P(0) = P_0$ і починається його безперервне нарощування матеріалом з іншим, взагалі кажучи, пружноміттевим модулем $G^{(2)}$, так що зовнішній радіус циліндра монотонно зростає за законом $b(t)$, $b(0) = b_0$. Надалі, в цьому параграфі, верхнім індексом «1» і «2», взятим у дужки, будемо позначати величини, що відносяться відповідно до вихідного порожнього циліндра ($a \leq r \leq b_0$) і нарощуваної області ($b_0 < r \leq b(t)$). Відсутність верхнього індексу означає, що величина, яка розглядається визначена при $a \leq r \leq b(t)$. У момент часу T зовнішній радіус циліндра досягає значення b_1 , і процес нарощування припиняється, тобто $b(t) = b_1$ при $t \geq T$.

Функції $b(t)$ і $P(t)$ передбачаються неперервно диференційовні на інтервалі $0 < t < T$. Треба визначити напружено-деформований стан у циліндрі для всіх $t \geq 0$.

У [3] задача про нарощування циліндра розглянута в припущенні однакових в'язкопружних характеристик вихідного і нарощуваного матеріалу. Мета цього параграфа – дослідження впливу різних в'язкопружних характеристик тіла та часу його нарощування на напружено-деформований стан. Відповідні співвідношення одержимо, використовуючи підхід, викладений у п. 2.3 даної роботи, внаслідок чого, порівнявши одержані результати з відомими, ми зможемо говорити про вірогідність результатів у цілому по главі.

Введемо циліндричні координати r, θ, z і розглянемо плоску деформацію циліндра, тобто покладемо $u_z = 0$.

Запишемо основні рівняння задачі:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \quad (2.50)$$

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}_r}{r}. \quad (2.51)$$

Тут точкою позначена частинна похідна за часом.

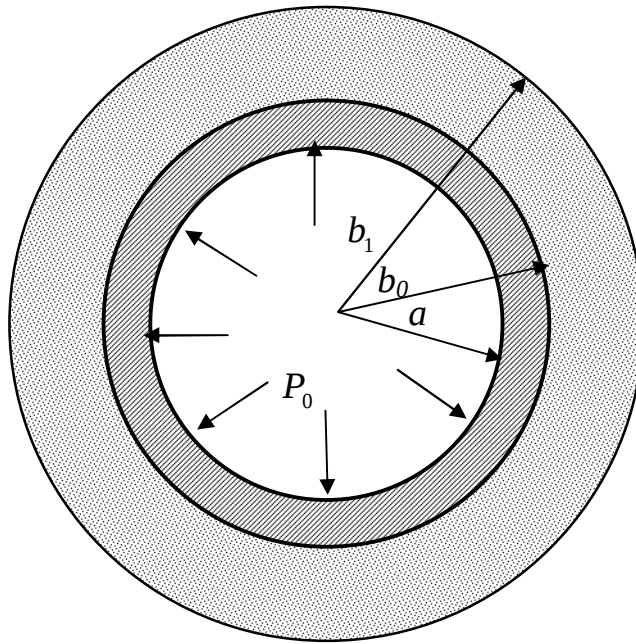


Рис. 2.10. Нарощування складеного циліндра

Реологічні рівняння для матеріалу вихідного циліндра й області нарощування запишемо у формі, аналогічній (2.15) випадку лінійного закону повзучості:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(t, r) - \sigma_g^{(1)}(t, r) &= 2G^{(1)}(t - \tau^*) (\varepsilon_r^{(1)}(t, r) - \varepsilon_g^{(1)}(t, r)) - \\ &- \int_{\tau^*}^t R^{(1)}(t - \tau^*, \tau - \tau^*) (\varepsilon_r^{(1)}(\tau, r) - \varepsilon_g^{(1)}(\tau, r)) d\tau, \\ \sigma_r^{(2)}(t, r) - \sigma_g^{(2)}(t, r) &= 2G^{(2)}(t - \tau^*) (\varepsilon_r^{(2)}(t, r) - \varepsilon_g^{(2)}(t, r)) - \\ &- \int_{\tau^*}^t R^{(2)}(t - \tau^*, \tau - \tau^*) (\varepsilon_r^{(2)}(\tau, r) - \varepsilon_g^{(2)}(\tau, r)) d\tau. \end{aligned}$$

Тут, як і раніше, $\tau^* = \tau^*(r)$ – час зародження елементарного шару циліндра; τ – вік матеріалу, в якому до нього прикладене навантаження; $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ – пружно-миттєві модулі матеріалу; $R^{(1)}(t, \tau)$, $R^{(2)}(t, \tau)$ – відповідні ядра релаксації.

Функція $\tau^* = \tau^*(r)$ дорівнює нулю при $a \leq r \leq b_0$ і збігається з функцією, зворотною до функції $b(t)$, при $b_0 \leq r \leq b_1$.

Граничні умови мають вигляд

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=a} = -P(t), \quad \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b_0, t=0} = 0, \quad \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=b(t), 0 < t \leq T} = 0,$$

$$\sigma_r^{(2)} \Big|_{r=b_1, t > T} = 0, \quad \sigma_g^{(2)} \Big|_{r=b(t), 0 < t \leq T} = 0.$$

Після перетворень аналогічним п. 2.3, п. 2.4 напружено-деформований стан у розглянутому циліндрі будемо визначати за формулами [45]:

$$u_r^{(1)}(t, r) = A(t) / r, \quad -\varepsilon_r^{(1)}(t, r) = \varepsilon_g^{(1)}(t, r) = A(t) / r^2,$$

$$\sigma_r^{(1)}(t, r) - \sigma_g^{(1)}(t, r) = -\frac{4G^{(1)}(t)}{r^2} \left(A(t) - \int_0^t R^{(1)}(t, \tau) A(\tau) d\tau \right),$$

$$\sigma_r^{(1)}(t, r) = -P(t) + 2G^{(1)} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \left[A(t) - \int_0^t A(\tau) R^{(1)}(t, \tau) d\tau \right], \quad a \leq r \leq b_0; \quad (2.52)$$

$$u_r^{(2)}(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r},$$

$$-\varepsilon_r^{(2)}(t, r) = \varepsilon_g^{(2)}(t, r) = (A(t) - A(\tau^*(r))) / r^2,$$

$$\sigma_r^{(2)}(t, r) - \sigma_g^{(2)}(t, r) = -\frac{G^{(2)}(t - \tau^*)}{G^{(2)}(0)} \sigma_g^{(2)}(\tau^*(r), r) \left[1 - \int_{\tau^*}^t R^{(2)}(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau \right] -$$

$$-\frac{4}{r^2} G^{(2)}(t - \tau^*) \left\{ A(t) - A(\tau^*) - \int_{\tau^*}^t R^{(2)}(t - \tau^*, \tau - \tau^*) (A(\tau) - A(\tau^*)) d\tau \right\},$$

$$\sigma_r^{(2)}(t, r) = -\frac{2}{G^{(2)}(0)} \int_r^{b(t)} \sigma_g^{(2)}(\tau^*(\rho), \rho) G^{(2)}(t - \tau^*) \left[1 - \int_{\tau^*}^t R^{(2)}(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau \right] \frac{d\rho}{\rho} -$$

$$-8 \int_r^{b(t)} G^{(2)}(t - \tau^*) \left\{ A(t) - A(\tau^*) - \int_{\tau^*}^t R^{(2)}(t - \tau^*, \tau - \tau^*) (A(\tau) - A(\tau^*)) d\tau \right\} \frac{d\rho}{\rho^3},$$

$$b_0 \leq r \leq b(t). \quad (2.53)$$

У формулах (2.52), (2.53) функція $A(t)$ визначається з розв'язку інтегрального рівняння, одержаного з умови неперервності радіального компонента напружень на межі розділу вихідного циліндра й області нарощування.

Для зручності чисельних розрахунків, приймемо, що $G^{(1)} = \text{const}$, $G^{(2)} = \text{const}$, і віднесемо всі величини, що мають розмірність довжини, до зовнішнього радіуса b_0 вихідного циліндра, а величини з розмірністю напруження – до модуля зсуву $G^{(1)}$ вихідного циліндра. Покладемо, що час вимірюється в безрозмірних умовних одиницях. Тоді, зберігаючи для безрозмірних величин колишні позначення, інтегральне рівняння для визначення функції $A(t)$ буде мати вигляд

$$D_1(t) A(t) - \int_0^t A(\tau) D_2(t, \tau) d\tau = Y(t), \quad (2.54)$$

де введені позначення

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) + \frac{G^*}{2} \left(1 - \frac{1}{b^2(t)} \right), \\ D_2(t, \tau) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) R^{(1)}(t, \tau) + G^* \frac{\dot{b}(\tau)}{b^3(\tau)} \left[1 - \int_{\tau}^t R^{(2)}(t - \tau, s - \tau) ds \right] + \\ &\quad + G^* \int_0^{\tau} R^{(2)}(t - s, \tau - s) \frac{\dot{b}(s)}{b^3(s)} ds, \\ Y(t) &= \frac{1}{8} p(t) - \frac{1}{4} \int_1^{b(t)} \sigma_g^*(\tau^*(\rho), \rho) \left[1 - \int_{\tau^*}^t R^{(1)}(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau \right] \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned}$$

Як приклад, розглянемо задачу, пов'язану з виготовленням полімерних циліндрів для роботи в агресивних середовищах, із зовнішнім шаром з в'язкопружного матеріалу, які виготовляються шляхом намотування (нарощування) матеріалу на вихідні циліндричні оболонки з пружного матеріалу. Цілком природно, що в цьому випадку в'язкопружними властивостями вихідного циліндра можна зневажити і прийняти $R^{(1)}(t, \tau) \equiv 0$. Інші вихідні дані вибиралися такі, як у п. 2.4. Рівняння (2.54) розв'язувалося методом послідовних наближень. Одержані результати зображені на рис. 2.11 – 2.14. На них наведені залежності максимального дотичного напруження і переміщення u_r від часу для наступних точок циліндру: крива 1 відповідає точці $r = a$; крива 2 – $r = b_0 = 1.1a$; крива 3 – $r = 1.21a$. При розрахунках параметри C_0 , A_0 , β , γ і величини b_0 , b_1 фіксовані і

дорівнюють: $C_0 = 0,05$; $A_0 = 0,75$; $\beta = 0,02 \text{ діс}^{-1}$; $\gamma = 0,1 \text{ діс}^{-1}$; $b_0 = 1,1a$; $b_1 = 1,5a$, тиск змінюється за законом $P(t) = P_0 + \frac{P_0 t}{T}$, зовнішній радіус збільшується

відповідно до залежності $\frac{1}{b^2(t)} = \frac{1}{b_0^2} + \left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{b_0^2} \right) \frac{t}{T}$, $0 \leq t \leq T$.

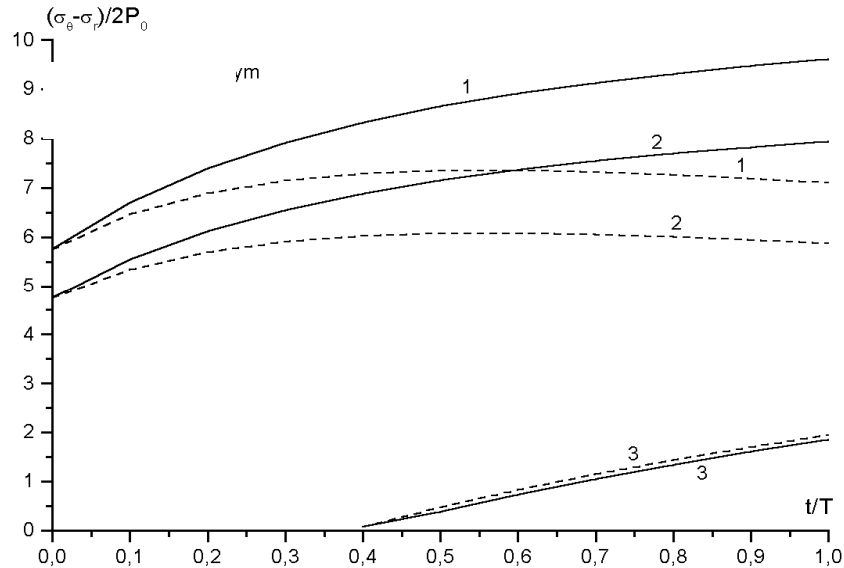


Рис. 2.11. Залежність від часу максимальних дотичних напружень у зростаючому складеному в'язкопружному циліндрі в різних точках поперечного перерізу при $T = 10$ діб

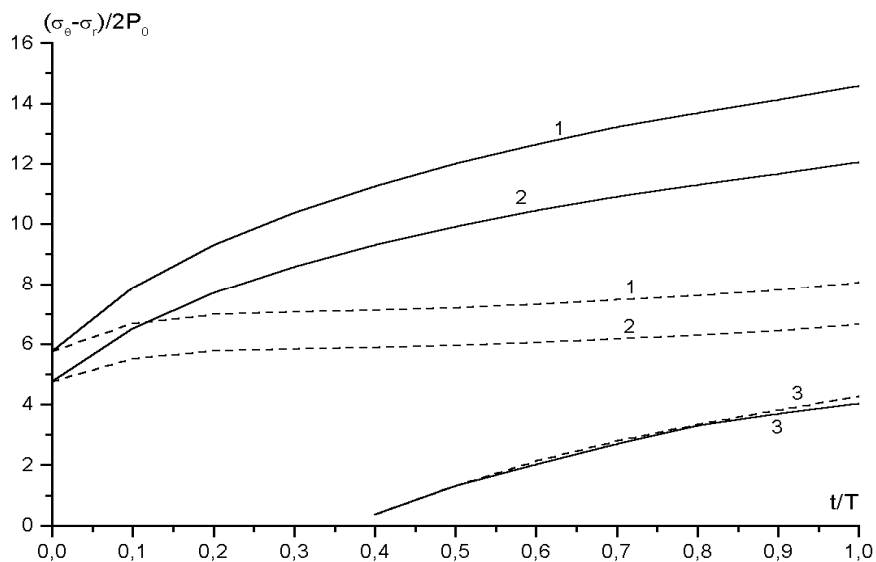


Рис. 2.12. Залежність максимальних дотичних напружень від часу в зростаючому складеному в'язкопружному циліндрі в різних точках поперечного перерізу при $T = 50$ діб

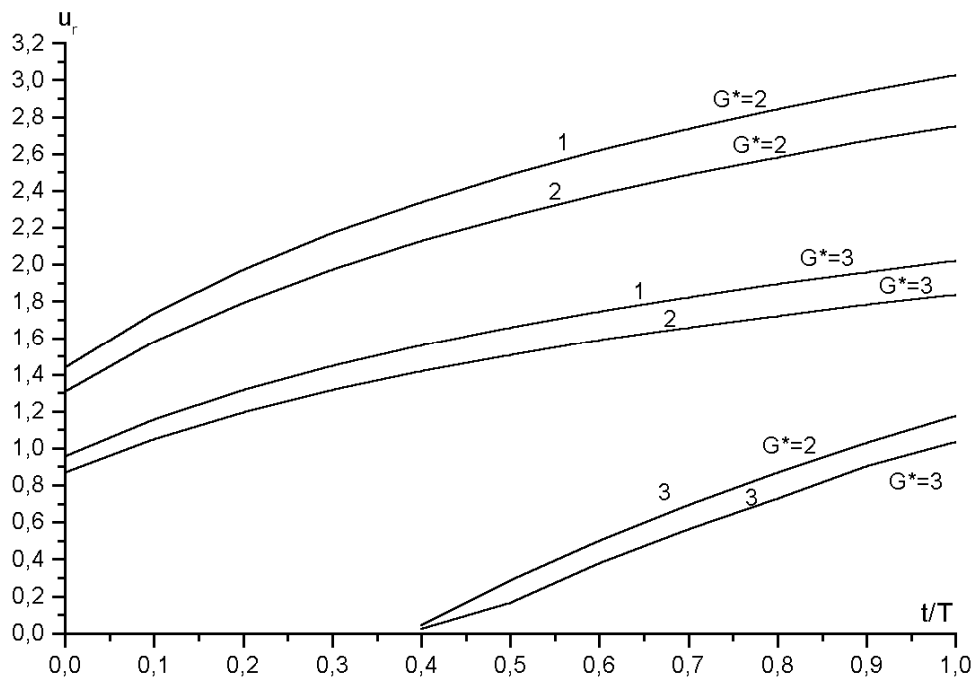


Рис. 2.13. Розподіл радіальних переміщень у часі для різних значень відношення пружноміттєвого модуля вихідного і нарощуваного матеріалу при $T = 10$ діб

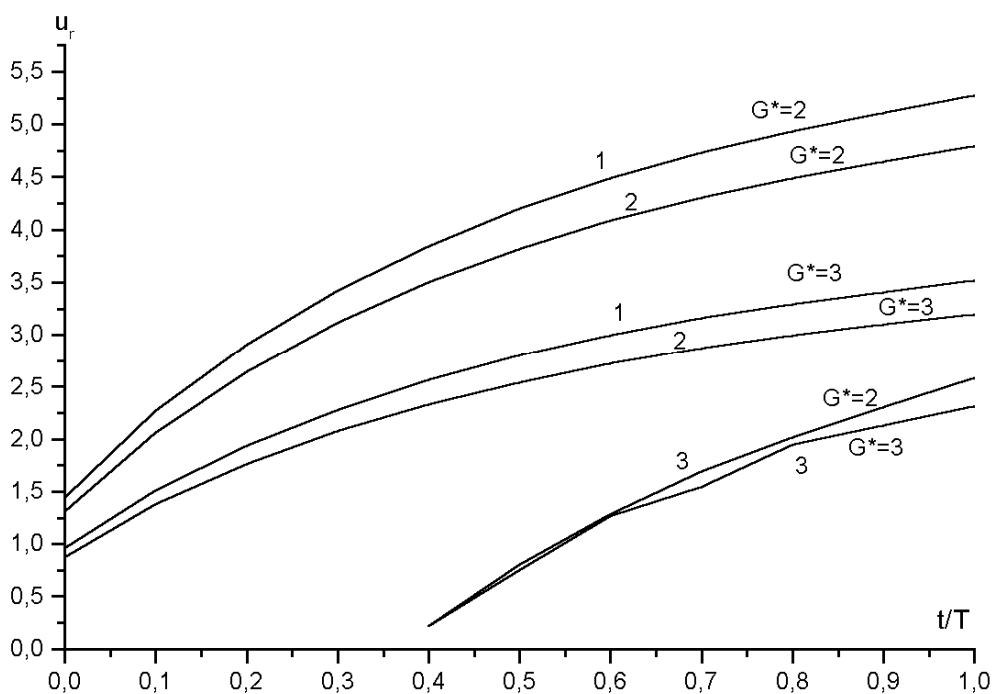


Рис. 2.14. Розподіл радіальних переміщень у часі для різних значень відношення пружноміттєвого модуля вихідного і нарощуваного матеріалу при $T = 50$ діб

Пунктирні криві одержані для циліндра з однорідного матеріалу [АрЗ], безперервні криві характеризують поведінку складеного циліндра, вихідна частина якого має пружноміттевий модуль, що перевищує модуль нарощуваного матеріалу. Розрахунки проводилися для відносних значень модуля G^* , що дорівнював відношенню пружноміттевих модулів вихідного і нарощуваного матеріалів, і рівного 1, 2, 3. Як видно з рис. 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 неоднорідність впливає як на напружений стан, так і на переміщення точок циліндра. При цьому для точок $3 - r = 1,21a$ вплив неоднорідності на напруження виявляється мінімальним. З рис. 2.11, 2.12 видно, що для неоднорідного циліндра збільшення часу нарощування приводить до більш істотного росту напружень, чим для однорідного. Так максимальне напруження в точці $r = a$ для однорідного циліндра при збільшенні тривалості нарощування з десяти до п'ятдесятьох діб зростає в 1,1 рази, а в неоднорідному циліндрі ($G^* = 2$) в 1,52 рази. Графіки, зображені на рис. 2.13, 2.14 показують, що збільшення жорсткості матеріалу вихідного циліндра приводить до зменшення переміщень усіх його точок у процесі нарощування. При цьому, збільшення часу нарощування приводить до загального росту переміщень, але не змінює ступеня впливу жорсткості вихідного матеріалу циліндра на кінцеві значення переміщень. Так, наприклад, при десятих добах нарощування переміщення при $G^* = 3$ зменшилися в порівнянні з переміщеннями при $G^* = 2$ на 33 %, а та ж величина при п'ятдесяти добах нарощування складає 34 %.

2.6. Аналіз одержаних результатів і висновки

Проведені дослідження про формування напружено-деформованого стану в зростаючих тілах, а також про вплив на нього різних параметрів технологічного процесу показали, що запропонована модель адекватно описує реальний процес виготовлення деталей методами нарощування. Розроблений алгоритм дозволяє розв'язувати задачі як зовнішнього, так і внутрішнього нарощування з урахуванням ступеня нелінійності закону повзучості. Алгоритм має одноманітну обчислювальну схему та уніфікованість за напрямком нарощування. Крім того, уніфікований алгоритм дає можливість розв'язувати задачі про визначення напружено-деформованого стану в деталях, коли вихідний і нарощуваний матеріал має різними в'язкопружні властивості, тобто одержувана в такий спосіб деталь, складається з неоднорідного в цілому матеріалу.

Одержані результати дозволяють оцінити вплив як часу нарощування, так і в'язкопружних характеристик на напружено-деформований стан тіл обертання, що виготовляються з в'язкопружного матеріалу.

Порівняння одержаних результатів дослідження впливу різних в'язкопружних характеристик тіла та часу його нарощування на напружено-деформований стан з відомими розв'язками задачі про нарощування циліндра з однаковими в'язкопружними характеристиками вихідного і нарощуваного матеріалу [3] показує задовільне узгодження.

Це узгодження й одержані аналітичні співвідношення підтверджують вірогідність результатів у цілому по главі.

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І РОЗРАХУНОК ТЕПЛОВОГО СТАНУ РУЛОНІВ ЛИСТОВОЇ ХОЛОДНО ТА ГАРЯЧЕКАТАНОЇ СТАЛІ

3.1. Основи технології виготовлення рулонів листової холодно і гарячекатаної сталі

У даний час основним способом виробництва листової сталі, є рулонний. При цьому міцнісний розрахунок моталок прокатних станів базується на залежностях тиску рулону на барабан моталки від параметрів процесу намотування смуги. Напруження, що виникають у рулонах холоднокатаних смуг після зняття з моталки, істотно впливають на якість листової продукції, оскільки вони можуть викликати втрату стійкості витків і утворення дефекту «пташка», привести до зварювання контактуючих витків смуги при наступній термообробці й утворення дефектів «злам», «зварювання». Збільшення маси рулонів і зменшення товщини смуг на сучасних станах холодної прокатки підвищує імовірність появи названих дефектів [27].

Різноманіття факторів впливає на якість змотки смуг у рулони, а працездатність намотувального устаткування визначила, в свою чергу, емпіричний підхід до задач удосконалення конструкцій моталок і поліпшення якості намотування рулонів. Однак ряд питань вибору раціональної технології намотування рулонів холоднокатаних смуг не можуть бути вирішені експериментально. Зокрема, на промислових станах варіювання режимами натягу смуг, що прокочуються, вимагає внесення змін до системи керування моталками, що в умовах діючого устаткування не завжди можливо. Крім того, взагалі нема можливості експериментально досліджувати різні режими намотування рулонів більшої маси, чим це передбачено технічною характеристикою і сортаментом стану.

Істотні переваги має чисельне експериментування на ЕОМ за допомогою математичної моделі процесу намотування рулонів смуг, що прокочуються. Очевидно, що для успішного проведення чисельного моделювання необхідно насамперед розробити і реалізувати на ЕОМ математичну модель, яка адекватно відби-

ває всі особливості формування напружено-деформованого стану рулонів смугового прокату [9; 14; 27; 28].

Відомі методи розрахунку напруги і деформації в рулонах, розроблені в більшості випадків намотування смуг з постійним натягом, базуються на припущенні, суть якого полягає в тому, що багат шаровий матеріал рулону уподібнюється суцільному анізотропному тілу, пружні властивості якого постійні, або змінюються від умов намотування. В реальних умовах на напружено-деформований стан у рулонів впливають не тільки фізико-механічні властивості матеріалу намотуваної смуги, але і стан її поверхні, ступінь неплоскостності [28]. При аналізі напружено-деформованого стану рулонів холоднокатаних смуг, функція, що зв'язує напруги і деформації, є розривною навіть для лінійно пружного матеріалу й у загальному випадку має стільки точок розриву, скільки витків у рулоні.

В процесі намотування рулонів гарячекатаних смуг, що змотуються на моталках широкополосних станів температура їхня, як правило, непостійна. Температура смуг, що прокочуються, залежить від властивостей деформованого матеріалу, швидкості прокатки, ступеня деформації, умов змащення й охолодження валків і ряду інших факторів. Температура смуг змінюється як при переході на прокатку іншого сортаменту, так і в межах однієї і тієї ж смуги на різних ділянках зварених стиків смуг, що прокочують при знижених швидкостях. Вплив температурного фактора і відомі розрахунки напруги у рулонах не враховують. Тим часом цей ефект є істотним.

У даному розділі приведені результати розробки математичної моделі змотки гарячекатаних смуг у рулони і розрахунку термонапруженого стану рулонової сталі, алгоритму спільного розрахунку міжвиткових тисків, температурних полів і теплових напружень у рулонах.

При розробці алгоритму розрахунку передбачається, що як при намотуванні рулону, так і після зняття його з барабана моталки він знаходиться в пружному стані незалежно від температури. Витки смуги в рулоні розглядаються незалежно як концентричні кільця. Температуру і напруги в межах одного витка вважаємо постійними, які змінюються від витка до витка.

Сучасні способи охолодження дозволяють одержати листовий прокат у рулонах високої якості при максимально можливій продуктивності широкополосних станів. Системи охолодження, використовувані на листових станах, характеризу-

ються технічно зробленим устаткуванням і застосуванням засобів автоматизації з ЕОМ.

Звичайні технологічні режими виробництва гарячекатаних смуг передбачають температуру кінця прокатки $840 - 920^{\circ}\text{C}$ (і після охолодження на рольгангу, що відводить, температуру намотування смуг у рулони 700°C . Після прокатки рулони краном подаються на склад, де вони остигають до $30 - 50^{\circ}\text{C}$). Природне повітряне охолодження рулонів продовжується кілька днів, що вимагає великих приміщень складів і значно подовжує виробничий цикл.

У даний час застосовуються наступні види прискореного охолодження: рідинне (водою), повітряне, випарне і повітряно-випарне. Найбільш широко використовують рідинне і повітряне охолодження. Однак в останні роки все більше поширення одержує випарне охолодження і починає застосовуватися повітряно-випарне. Випарне охолодження може здійснюватися киплячою і некиплячою водою.

При кипінні, в результаті турбулізації пухирцями пари граничного шару води, різко зростає інтенсивність теплообміну. Коефіцієнт тепловіддачі металу при використанні киплячої рідини, звичайно, в кілька разів більше, ніж некиплячої. Кипляча рідина має здатність відводити велику кількість тепла, що дозволяє значно скоротити витрату холодоагенту. Одержаний при випарному охолодженні пар, використовують для опалювальних і технологічних цілей. Недоліками охолодження киплячою водою є відкладення солей на поверхні теплообмінника і складність конструкції устаткування.

Випарне охолодження некиплячою водою є комбінацією водяного і повітряного охолодження. Цей процес полягає в безпосереднім охолодженні металу водою, що у виді плівки стікає по металу і піддається повітряному охолодженню. Інтенсивність випарного охолодження некиплячою водою нижче водяника, що обумовлено більш низькими коефіцієнтами тепловіддачі до плівки води і мало інтенсивним випаром частини води з поверхні в повітря. Велика інтенсивність випарного охолодження в порівнянні з повітряним обумовлює випар вологи з поверхні води, що інтенсифікує теплообмін. Слід зазначити, що конструкція системи випарного охолодження відрізняється складністю.

Повітряно-випарне охолодження являє собою охолодження зволженим повітрям, що містить водяну пару і дрібнодисперсну вологу. При зволоженні атмосферне повітря охолоджується на $10 - 20\%$ (що викликано збільшенням його па-

ровмісту). Зниження температури стиснутого в компресорі повітря досягає десятків і сотень градусів у залежності від початкової температури і тиску повітря, конструкції зволожувача і необхідних параметрів холодоагенту. При повітряно-водовипарювальному охолодженні знижується температура теплоносія як при його вході до системи охолодження, так і при виході з неї. При цьому істотно знижується в порівнянні з повітряним охолодженням) середня температура холодоагенту.

Коефіцієнти тепловіддачі при повітряно-водовипарювальному охолодженні в 2 – 3 рази більше, ніж при повітряному.

Однак, повітряно-водовипарювальне охолодження має недоліки, що обмежують його застосування. При використанні такого охолодження не завжди допустимий контакт поверхні охолодження зі зволоженим повітрям. Можливе, відкладення солей на поверхні охолодження, при випарі на ній частково осідають краплі. Однак, імовірність відкладення солей значно менше, ніж при водяному і випарному охолодженні. Крім того, система повітряно-водовипарювального охолодження в порівнянні з системою повітряного охолодження має більш складну конструкцію.

3.2. Розробка математичної моделі розрахунку міжвиткових тисків у рулонах холоднокатаної сталі

Ковзання витків рулону відносно один одного відсутнє. Витки смуги в рулоні розглядаються як концентричні кільця. Напруження в межах одного витка вважаємо постійними в окружному напрямку, але такими, що змінюються від витка до витка, тобто задача зводиться до осесиметричної.

Вважається, що витки смуги в рулоні, а також барабан моталки мають циліндричну анізотропію. Товщина і пружні властивості кожного витка можуть бути різними. Задача зважується в лінійно-пружній постановці.

При ідеальному (без зазорів) приляганні поверхонь контактуючих витків смуги в рулоні переміщення зовнішньої поверхні i -го витка U_i^3 дорівнює переміщенню внутрішньої поверхні $i + 1$ -го витка (розрахункова схема контактування витків у рулоні і відповідна система координат зображена на рис. 3.1)

$$U_i^3 = U_{i+1}^B, \quad (3.1)$$

де «В» – позначення внутрішньої поверхні, «З» – позначення зовнішньої поверхні.

В загальному випадку (3.1) повинні враховуватися міжвиткові зазори, що залежать від стану контактуючих поверхонь смуги і міжвиткових тисків. При збільшенні контактного тиску відбувається змінання мікронерівностей. Вираз (3.1) запишеться у формі [9; 27]

$$U_i^3 = U_{i+1}^B - \delta_i(q_i), \quad (3.2)$$

де δ_i – величина зазору між витками, q_i – величина міжвиткового тиску.

Відповідно до розв'язання задачі Ламе про напруження в трубці під дією внутрішнього і зовнішнього тисків величина переміщень кільцевого витка смуги, навантаженого на внутрішній і зовнішній поверхнях, визначається за допомогою рівняння [27]

$$u = \frac{k_i - \mu_i}{E_{t_i}} \cdot \frac{q_i + r_{i-1}^{k_i+1} - q_i r_i^{k_i+1}}{r_i^{2k_i} - r_{i-1}^{2k_i}} r^{k_i} + \frac{k_i + \mu_i}{E_{t_i}} \cdot \frac{q_{i-1} r_i^{k_i-1} - q_i r_{i-1}^{k_i-1}}{r_i^{2k_i} - r_{i-1}^{2k_i}} \frac{r_{i-1}^{k_i+1} \cdot r_i^{k_i+1}}{r^{k_i}} \quad (3.3)$$

у свою чергу

$$k_i = \sqrt{E_{t_i} / E_{r_i}}, \quad (3.4)$$

де E_{t_i} – модуль пружності матеріалу смуги i -го витка в тангенціальному напрямку; E_{r_i} – модуль пружності в радіальному напрямку; μ_i – коефіцієнт Пуассона; r_{i-1} – внутрішній радіус i -го витка; r_i – зовнішній радіус; r – поточний радіус; q_{i-1} – внутрішній тиск, що діє на i -й виток; q_i – зовнішній тиск.

У припущенні ізотропності матеріалу смуги ($k_i = 1$), з урахуванням (3.3) вираз для переміщення внутрішньої поверхні i -го витка запишеться у вигляді

$$u_i^B = \frac{1 - \mu_i}{E_i} \cdot \frac{q_{i-1} r_{i-1}^2 - q_i r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} r_{i-1} + \frac{1 - \mu_i}{E_r} \cdot \frac{q_{i-1} - q_i}{r_i^2 - r_{i-1}^2} r_{i-1} r_i^2 \quad (3.5)$$

або

$$u_i^B = \frac{r_{i-1}}{E_i (r_i^2 - r_{i-1}^2)} \left[(1 - \mu_i) (q_{i-1} r_{i-1}^2 - q_i r_i^2) + (1 + \mu_i) (q_{i-1} - q_i) r_i^2 \right]. \quad (3.6)$$

Приводячи подібні будемо мати

$$u_i^B = \frac{r_{i-1}}{E_i(r_i^2 - r_{i-1}^2)} \left\{ \left[\left[-(1-\mu_i)r_i^2 - (1+\mu_i)r_i^2 \right] q_i + \left[(1-\mu_i)r_{i-1}^2 + (1+\mu_i)r_i^2 \right] q_{i-1} \right] \right\} \quad (3.7)$$

або

$$u_i^B = \frac{r_{i-1}}{E_i(r_i^2 - r_{i-1}^2)} \left[-2r_i^2 q_i + \left((r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu_i(r_{i-1}^2 - r_i^2) \right) q_{i-1} \right]. \quad (3.8)$$

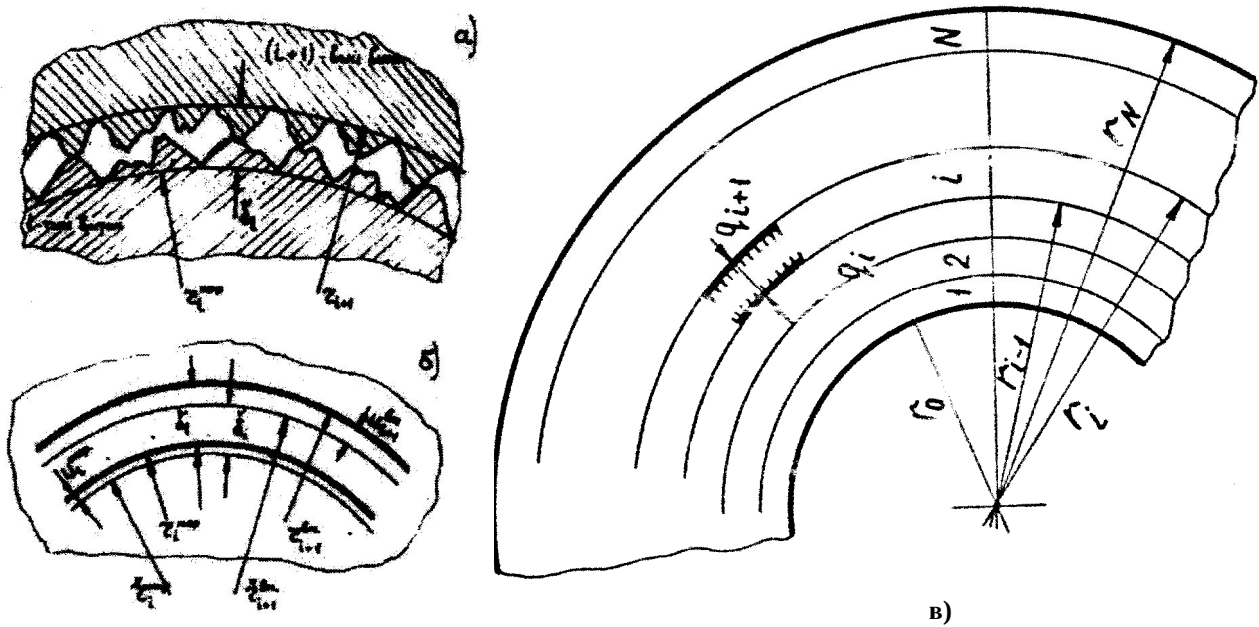


Рис.3.1. Схема контактування деформуючих витків смуги в рулоні:

- а) – дискретний контакт шорсткуватих поверхонь суміжних витків;
- б) – зближення контактуючих поверхонь під дією навантаження;
- в) – розрахункова схема. N – кількість витків смуги в рулоні

Аналогічним чином з (3.3) виходить вираз для переміщення зовнішньої поверхні $i + 1$ -го витка

$$u_i^3 = \frac{r_i}{E_i(r_i^2 - r_{i-1}^2)} \left\{ \left[- (r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu_i(r_{i-1}^2 - r_i^2) \right] q_i - 2r_{i-1}^2 q_{i-1} \right\}. \quad (3.9)$$

Переміщення для внутрішньої поверхні $i + 1$ -го витка будемо мати з (3.8) при збільшенні значень індексної перемінної на одиницю

$$u_{i+1}^B = \frac{r_i}{E_{i+1}(r_{i+1}^2 - r_i^2)} \left[-2r_{i+1}^2 q_{i+1} + \left((r_i^2 + r_{i+1}^2) - \mu_{i+1}(r_i^2 - r_{i+1}^2) \right) q_i \right] \quad (3.10)$$

У такий спосіб з урахуванням (3.8), (3.10) базисна система рівнянь (3.2), що виражає умови сполучення контактуючих поверхонь суміжних витків смуги в рулоні (з N витків) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{r_i}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i} \left\{ \left[- (r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu_i (r_{i-1}^2 - r_i^2) \right] q_i - 2r_{i-1}^2 q_{i-1} \right\} = \frac{r_i}{(r_{i+1}^2 - r_i^2)} \frac{1}{E_{i+1}} \times \\ \times \left\{ - 2r_{i+1}^2 q_{i+1} + \left[(r_i^2 + r_{i+1}^2) - \mu_{i+1} (r_i^2 - r_{i+1}^2) \right] q_i \right\} - \delta_i(q_i), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$i = 1, N.$

Далі окремо розглядаються моделювання задач про намотування смуги на барабан моталки і зняття рулону.

Розглянемо зміну напружено-деформованого стану рулону, що складає з $(j - 1)$ витків, викликаного намотуванням j -го витка. Далі при позначенні перемінних перший індекс буде вказувати номер розглянутого i -го витка, другий – номер j -го витка, вплив якого визначаємо. Тоді $q_{i,j}$ – тиск між i -м і $i + 1$ -м витками в рулоні з j витків.

При наявності зазорів і вибірки їх під дією тиску умова сполучення контактуючих поверхонь суміжних витків (3.2) збереже свій вигляд

$$\Delta U_{i,j}^3 = \Delta U_{i+1,j}^B - \Delta \delta_{i,j}(\Delta q_{i,j}). \quad (3.12)$$

Тому, що збільшення тиску внаслідок намотування кожного наступного витка складає невелику величину приймається що

$$\Delta \delta_{i,j}(q_{i,j}) = \delta_{i,j}(q_{i,j}) - \delta_{i,j-1}(q_{i,j-1}) = \frac{d\delta_i}{dq} / q_{i,j-1} \Delta q_{i,j}. \quad (3.13)$$

Тоді підставляючи $\Delta U_{i,j}^3$ і ΔU_{i+1}^B згідно (3.9), і (3.10) до (3.13), будемо мати базисну систему рівнянь для визначення змін міжвиткових тисків у рулоні при намотуванні j -го витка, аналогічну (3.11)

$$\begin{aligned} \frac{r_i}{E_{i+1}(r_{i+1}^2 - r_i^2)} = \left[- 2r_{i+1}^2 \Delta q_{i+1,j} + \left((r_i^2 + r_{i+1}^2) - \mu_{i+1} (r_i^2 - r_{i+1}^2) \right) \Delta q_{i,j} \right] - \\ - \frac{d\delta}{dq} / q_{i,j-1} \sigma_i' \Delta q_{i,j} = \frac{r_i}{E_i(r_i^2 - r_{i-1}^2)} \left\{ \left[- (r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu_i (r_{i-1}^2 - r_i^2) \right] \Delta q_{i,j} - 2r_{i-1}^2 \Delta q_{i,-1j} \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$j = \overline{1, N}$

або привівши подібні

$$\begin{aligned} & \frac{-2r_i r_{i+1}^2}{E_{i+1}(r_{i+1}^2 - r_i^2)} \Delta q_{i+1,j} + \frac{2r_i r_{i-1}^2}{E_i(r_i^2 - r_{i-1}^2)} \Delta q_{i-1,j} + \left\{ \frac{r_i [(r_i^2 - r_{i+1}^2) - \mu_{i+1}(r_i^2 + r_{i+1}^2)]}{E_{i+1}(r_{i+1}^2 - r_i^2)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{q_{i,j-1}} \frac{d\delta}{dq} + \frac{r_i [(r_{i-1}^2 - r_i^2) + \mu_{i+1}(r_{i-1}^2 + r_i^2)]}{E_{i+1}(r_i^2 - r_{i-1}^2)} \right\} \times \Delta q_{i,j} = 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Перетворюючи коефіцієнт при $\Delta q_{i,j}$, будемо мати

$$\frac{1}{E_{i+1}} \left[\frac{r_i + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} + \mu_{i+1} \right] - \frac{1}{E_i} \left[\frac{r_{i-1} + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \mu_{i+1} \right] - \frac{1}{r_i} \frac{d\delta}{dq} / q_{i,j-1}, \quad (3.16)$$

або

$$\frac{1}{E_{i+1}} \frac{r_i + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} + \frac{1}{E_i} \frac{r_{i-1} + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \frac{\mu_{i+1}}{E_{i+1}} - \frac{\mu_i}{E_i} - \frac{1}{r_i} \frac{d\delta}{dq} / q_{i,j-1}. \quad (3.17)$$

Тоді вихідна система рівнянь (3.14) запишеться в трьохточечній формі (у формі системи рівнянь із трьохдіагональною матрицею)

$$A_i \Delta q_{i-1,j} - D_i \Delta q_{i,j} + B_i \Delta q_{i+1,j} = F_i, \quad j = \overline{1, N} \quad i = \overline{1, N}; \quad (3.18)$$

з виразом для коефіцієнтів

$$\begin{cases} A_i = \frac{2r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i}, \\ D_i = \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i} + \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \frac{1}{E_{i+1}} - \frac{\mu}{E_i} + \frac{\mu_{i+1}}{E_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \frac{d\delta}{dq} / q_{i,j-1}, \\ B_i = \frac{-2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \frac{1}{E_{i+1}}, \\ F_i = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$i = \overline{1, J}, J = \overline{1, N}.$$

У випадку однорідного матеріалу смуги вираз для коефіцієнтів (3.19) переписується у вигляді:

$$\begin{cases} A_i = \frac{2r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2}, \\ D_i = \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} - \frac{E}{r_i} \frac{d\delta}{dq} / q_{i,j-1}, \quad i = \overline{1, J}, J = \overline{1, N}. \\ B_i = \frac{-2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2}, \\ F_i = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

Розглянемо граничні умови для рулону. Для внутрішньої границі покладається, що барабан моталки представляє товстостінний циліндр зовнішній радіус якого r_{δ_3} , внутрішній r_{δ_6} . E_δ і μ_δ – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу барабана. Коефіцієнт товстостінності барабана

$$\lambda = \frac{r_{\delta_3}}{r_{\delta_6}}.$$

Радіальна деформація барабана внаслідок зміни діючого на нього тиску на величину $\Delta q_{\delta,j} = \Delta q_{0,j}$ буде визначатися відповідно до формули (3.9)

$$\Delta U_{\delta,j}^3 = \frac{r_{\delta_H}^0}{r_{\delta_H}^2 - r_{\delta_B}^2} \cdot \frac{1}{E_\delta} \left\{ \left[- (r_B^2 + r_H^2) - \mu_\delta (r_B^2 - r_H^2) \right] \right\} \Delta q_{0,j}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.21)$$

$$\Delta U_{\delta,j}^H = - \frac{r_{\delta_H}}{E_\delta} \cdot \left[\frac{\lambda^2 + 1}{1 - \lambda^2} - \mu_\delta \right] \Delta q_{0,j}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.22)$$

Позначивши

$$\left\| \frac{-r_{\delta_{nap}}}{E_\delta} \left[\frac{\lambda^2 + 1}{1 - \lambda^2} - \mu_\delta \right] = B \right\|, \quad (3.23)$$

перепишемо (3.22) у вигляді

$$\Delta U_{\delta,j}^H = B \Delta q_{0,j}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.24)$$

Збільшення радіальної деформації внутрішньої поверхні 1-го витка згідно (3.8) визначиться виразом

$$\Delta U_{i,j}^{\delta H} = \frac{r_0}{r_i^2 - r_0^2} \frac{1}{E_1} \left\{ \left[(r_0^2 + r_i^2) - \mu_1 (r_0^2 - r_1^2) \right] \Delta q_{0,j} - 2r_i^2 \Delta q_{1,j} \right\}. \quad (3.25)$$

Підставляючи (3.24) і (3.25) в умову сполучення (3.12), з огляду на малу величину радіального переміщення, внаслідок намотування i -го витка будемо мати

$$B\Delta q_{0,j} = \frac{r_0}{r_i^2 - r_0^2} \frac{1}{E_1} \{[(r_0^2 + r_i^2) - \mu_1(r_0^2 - r_1^2)]\Delta q_{0,j} - 2r_i^2\Delta q_{1,j}\} - \frac{d\delta}{dq} / q_{i,j-1} \Delta q_{0,j}, \quad (3.26)$$

або

$$\alpha_0 \Delta q_{0,j} + \beta_0 \Delta q_{1,j} = B\Delta q_{0,j}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (3.27)$$

де

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{r_0}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{E_1} [(r_0^2 + r_1^2) - \mu_1(r_0^2 - r_1^2)] - \frac{d\delta}{dq} / q_{\delta,j}, \sigma'_\delta, \\ \beta = \frac{-2r_1^2 r_0}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{E_1}, \end{cases} \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.28)$$

Тоді вираз (3.26) перепишеться у вигляді

$$\Delta q_{0,j} = \frac{\beta_0}{B - \alpha_0} \Delta q_{1,j}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.29)$$

У такий спосіб як гранична умова на внутрішній границі рулону виступає зв'язок між збільшенням тиску на зовнішній границі барабана моталки і внутрішньою границею i -го витка (внаслідок намотування j -го витка) у формі (3.29).

На зовнішній границі рулону, з умови рівноваги верхнього периферійного витка, його тиск дорівнює

$$\Delta q_{j,j} = \frac{\sigma_j \eta}{\sigma_{j-1}}, \quad (3.30)$$

де σ_j – натяг смуги при намотуванні j -го витка, η – товщина витка.

Отже, розрахунок напруженого деформованого стану рулону при намотуванні j -го витка зводиться до рішення алгебраїчної системи рівнянь (3.18) із тридіагональною матрицею, значення коефіцієнтів якої розраховуються відповідно до формул (3.19) або (3.20) із граничними умовами на внутрішній і зовнішній поверхні (3.29) і (3.30) відповідно.

Моделюючи процес, послідовно розраховуємо напружено-деформований стан рулону при намотуванні 2-х, 3-х, ... N витків.

При цьому на кожному етапі при намотці j^* витків у результаті рішення вихідної системи (3.18), (3.20) із граничними умовами (3.29), (3.30) визначаються

збільшення міжвиткових тисків $\Delta q_{0,j}$ ($i = 1, j^*$; $j = 2, j^*$) і обчислюються їхні повні значення

$$q_{i,j} = \sum_{j=2}^{j^*} \Delta q_{i,j}; \quad i = 1, 2, j^*. \quad (3.31)$$

По відомих величинах $q_{i,j}$ визначаються значення окружних напружень σ_i , відповідно до умов рівноваги витка

$$\sigma_i = \frac{q_i r_i - q_{i+1} r_{i+1}}{r_{i+1} - r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, j^*. \quad (3.32)$$

Після зняття рулону з барабана моталки внаслідок виключення обмежуючого впливу на радіальні переміщення внутрішніх витків відбувається перерозподіл натягів у рулоні.

Збільшення величини переміщення зовнішньої поверхні i -го витка при знятті рулону з барабана моталки ΔU_i^3 дорівнює сумі збільшення величини внутрішньої поверхні $i + 1$ -го витка і зміни величини зазору між i -им і $i + 1$ -м витками. Тоді умова сполучення контактуючих поверхонь суміжних витків запишеться

$$\Delta U_i^{3,C} = \Delta U_{i+1}^{B,C} + \Delta \delta_i (q_i), \quad (3.33)$$

тут індекс «С» позначає стан витків після зняття рулону з барабана моталки.

Зміна величини зазорів при знятті визначається відповідно до формули

$$\Delta \delta_i^C (q_i^C) = \delta_i^C (q_i^C) - \delta_i (q_i) \quad (3.34)$$

Примітка: лінеаризація функції (3.34) не може бути виконана тому що при розвантаженні рулону величина Δq_i^C може виявитися порівнянною з величиною q_i .

Підставляючи в умову сполучення (3.33) вираження для $\Delta U_i^{3,C}$ і $\Delta U_{i+1}^{B,C}$ згідно (3.9), (3.10) будемо мати вихідну систему алгебраїчних рівнянь, записану у формі системи з тридіагональною матрицею

$$A_i \Delta q_{i-1} - D_i \Delta q_i + B_i \Delta q_{i+1} = -F_i^C, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.35)$$

коефіцієнти якої визначаються виразами

$$\begin{cases} A_i = \frac{2r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \cdot \frac{1}{E_i}, \\ D_i = \frac{1}{E_i} \cdot \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \frac{1}{E_{i+1}} \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} - \frac{\mu_i}{E_i} + \frac{\mu_i}{E_{i+1}}, \\ B_i = \frac{-2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{E_{i+1}}, \\ F_i = -\frac{\Delta \delta_i^C}{r_i}, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.36)$$

або (у випадку однорідності матеріалу смуги)

$$\begin{cases} A_i = \frac{2r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2}, \\ D_i = \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2}, \\ B_i = \frac{-2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2}, \\ F_i = -\frac{E}{r_i} \cdot \Delta \delta_i^C, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.37)$$

Розглянемо граничні умови на внутрішній і зовнішній поверхнях рулону. Після зняття з барабана моталки тиск на внутрішній поверхні рулону знижується до нуля. Отже величина зменшення тиску Δq_0^C дорівнює величині тиску рулону на барабан моталки, а на зовнішній поверхні верхнього витка смуги в рулоні тиск дорівнює нулю. Тоді

$$\begin{cases} \Delta q_0^C = -q \delta & \text{при } r = r_0, \\ \Delta q_N^C = 0 & \text{при } r = r_{N+1}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Таким чином, розрахунок напружено-деформованого стану рулону знижується після зняття його з барабана моталки, зводиться до розв'язання вихідної алгебраїчної системи рівнянь, зведеної до трьохточечної форми (3.35), (3.37), із граничними умовами (3.38). В результаті цього визначається значення зменшення міжвиткових тисків Δq_i^C ($i = \overline{1, N}$) і наступним обчисленням значень безпосередньо міжвиткових тисків відповідно до виразу

$$q_i^C = q_i - \Delta q_i^C, \quad i = 1, N. \quad (3.39)$$

Примітка: тому що заздалегідь невідомі величини міжвиткових тисків q_i^C ($i = 1, N$) після зняття рулону з барабана, виникає необхідність в організації ітераційного процесу. Спочатку при визначенні значень міжвиткових зазорів думаємо

$$\Delta \delta_i^C(q_i^C) = 0 \quad (3.40)$$

і виходячи з даного припущення розв'язуємо задачу (3.35), (3.37), (3.38), визначаючи значення $\Delta q_i^{C, N}$, а також $q_i^{C, N}$ ($i = 1, N$). Узявши як вихідний розподіл тисків знайдене ($q_i = q_i^{C, N}$), продовжуємо процес доти доки нев'язка цих величин не буде менше як завгодно малого заздалегідь заданого числа.

3.3. Математична постановка задачі визначення напружено-деформованого стану рулонів при їхньому намотуванні і знятті з барабана моталки з урахуванням температурних ефектів

Задача розв'язується при наступних припущеннях. Ковзання витків рулону відносно один одного відсутнє. Витки смуги в рулоні розглядаються як концентричні кільця. Напруження і температура в межах одного витка вважаються постійними, але змінюються від витка до витка. Вважаємо, що витки смуги в рулоні, а також барабан моталки мають циліндричну анізотропію. Товщина і пружні властивості кожного витка можуть бути різними.

Умова сполучення контактуючих поверхонь суміжних витків смуги в рулоні запишеться у вигляді

$$u_i^H = u_{i+1}^b - \delta_i(q_i, T_i'), \quad (3.41)$$

де «У» – внутрішня поверхня, «З» – зовнішня поверхня, $\delta_i(q_i, T_i')$ – величина зазору між i -им і $(i+1)$ -им витками, q_i , T_i' – тиск і температура на контакті витків.

Температуру T_i' на контакті i -го і $(i+1)$ -го витків будемо вважати рівній півсумі температур цих витків. У свою чергу покладається, що температура в межах одного витка постійна.

Відповідно до розв'язанні задачі Ламе про напруження в трубі під дією внутрішнього і зовнішнього тисків величина переміщень внутрішньої поверхні кільцевого витка смуги з урахуванням температурних деформацій, визначається за допомогою рівняння

$$u_i^B = \frac{1 - \mu_i}{E_i} \cdot \frac{q_{i-1}r_{i-1}^2 - q_i r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} r_{i-1} + \frac{1 - \mu_i}{E_r} \cdot \frac{q_{i-1} - q_i}{r_i^2 - r_{i-1}^2} r_{i-1} r_i^2 + \alpha_T r_{i-1} \Delta T, \quad (3.42)$$

де E_i – модуль пружності матеріалу смуги i -го витка, μ_i – коефіцієнт Пуассона, r_{i-1} – внутрішній радіус i -го витка, r_{i+1} – зовнішній радіус, r – поточний радіус, q_{i-1} – внутрішній тиск, що діє на i -ий виток, q_i – зовнішній тиск, α_T – коефіцієнт лінійного розширення, ΔT – зміна температури.

Приводячи подібні будемо мати

$$u_i^B = \frac{r_{i-1}}{E_i(r_i^2 - r_{i-1}^2)} \left[-2r_i^2 q_i + ((r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu_i(r_{i-1}^2 - r_i^2)) q_{i-1} \right] + \alpha_T r_{i-1} \Delta T. \quad (3.43)$$

Аналогічно з (3.42) виходить вираз для переміщення зовнішньої поверхні i -го витка

$$u_i^3 = \frac{r_i}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i} \left\{ \left[-(r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu_i(r_{i-1}^2 - r_i^2) \right] q_i - 2r_{i-1}^2 q_{i-1} \right\} + \alpha_T r_i \Delta T. \quad (3.44)$$

У такий спосіб з урахуванням (3.43), (3.44) вираз для з'єднання контактуючих поверхонь переписеться

$$\begin{aligned} & \frac{r_i}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i} \left\{ \left[-(r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu_i(r_{i-1}^2 - r_i^2) \right] q_i - 2r_{i-1}^2 q_{i-1} \right\} = \frac{r_i}{(r_{i+1}^2 - r_i^2) E_{i+1}} \times \\ & \times \left\{ -2r_{i+1}^2 q_{i+1} + \left[(r_i^2 - r_{i+1}^2) - \mu_{i+1}(r_i^2 - r_{i+1}^2) \right] q_i \right\} - \delta_i(q_i) + \alpha_T r_i (T_i - T_{i+1}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Розглянемо зміну напружено-деформованого стану рулону, що складається з $(j-1)$ витка, викликаного намотуванням j -го витка. Далі при позначенні перемінних перший індекс буде вказувати номер розглянутого i -го витка, другий – номер j -го витка, вплив якого визначаємо. Тоді $q_{i,j}$ – тиск між i -ми і $(i+1)$ -м витками в рулоні з j витків. З урахуванням вищепринятих позначень, підставляючи вирази для U_i^3 і U_i^B згідно (3.43), (3.44) у (3.41), лінеаризуючи функцію величини міжвиткових зазорів, будемо мати базисну систему рівнянь для визначення змін міжвиткових тисків у рулоні при намотуванні j -го витка

$$\frac{2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \frac{1}{E_{i+1}} \Delta q_{i+1,J} + \left\{ \frac{\frac{1}{E_{i+1}} \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} + \frac{1}{E_i} \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \frac{\mu_{i+1}}{E_{i+1}} - \frac{\mu_i}{E_i} - \frac{1}{r_i} \frac{d\delta}{dq}}{q_{i,j-1} T_i'} \right\} \Delta q_{i,J} + \quad (3.46)$$

$$+ \frac{2r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i} \Delta q_{i-1,J} + \alpha_T E_i T_i - \alpha_T E_{i+1} T_{i+1} = 0, \quad i = 1, J^*, J^* = \overline{1, N}.$$

Привівши подібні, запишемо вихідну систему рівнянь (3.41) у трьохточечній формі (системи рівнянь із тридіагональною матрицею)

$$A_i \Delta q_{i-1,j} - D_i \Delta q_{i,j} + B_i \Delta q_{i+1,j} = -F_i, \quad i = \overline{1, J^*}, J^* = \overline{1, N} \quad (3.47)$$

з виразу для коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A_i = \frac{2r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i}, \\ D_i = \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i} + \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \frac{1}{E_{i+1}} - \frac{\mu}{E_i} + \frac{\mu_{i+1}}{E_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \frac{d\delta}{dq} / q_{i,j} T_{\delta}', \\ b_i = \frac{-2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \frac{1}{E_{i+1}}, \\ F_i = \alpha_T (E_i T_i - E_{i+1} T_{i+1}), \end{cases} \quad i = \overline{1, J^*}, J^* = \overline{1, N}. \quad (3.48)$$

У випадку однорідного матеріалу смуги вирази для коефіцієнтів (3.48) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases} A_i = \frac{2r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2}, \\ D_i = \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} - \frac{E}{r_i} \frac{d\delta}{dq} / q_{i,j} T_i', \\ B_i = \frac{-2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2}, \\ F_i = \alpha_T E (T_i + T_{i+1}), \end{cases} \quad i = \overline{1, J^*}, J^* = \overline{1, N}. \quad (3.49)$$

Примітка: докладне приведення вихідної системи рівнянь до трьохточечного вигляду (3.47), (3.48), (3.49) описане в [27].

Розглянемо граничні умови для рулону. Для внутрішньої границі покладається, що барабан моталки представляє товстостінний циліндр зовнішній радіус

якого r_{δ_H} , внутрішній r_{δ_δ} , E_δ і μ_δ – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу барабана. Коефіцієнт товстостінності барабана

$$\lambda = \frac{r_{\delta_H}}{r_{\delta_\delta}}.$$

Радіальна деформація зовнішньої поверхні барабана внаслідок зміни діючого на нього тиску на величину $\Delta q_{\delta,j} = \Delta q_{0,j}$ і з урахуванням термічних деформацій буде визначатися відповідно до (3.44)

$$\Delta U_{\delta,j} = B \Delta q_{0,j} + \alpha_T r_{\delta_H} T_\delta, \quad (3.50)$$

де

$$B = \frac{-r_{\delta_H}}{E_\delta} \left(\frac{\lambda^2 + 1}{1 - \lambda^2} - \mu_\delta \right). \quad (3.51)$$

Збільшення радіальної деформації внутрішньої поверхні 1-го витка згідно (3.43) визначиться виразом

$$\Delta U_{i,j}^{306} = \frac{r_0}{r_i^2 - r_0^2} \frac{1}{E} \left\{ \left[(r_0^2 - r_i^2) - \mu(r_0^2 - r_1^2) \right] \Delta q_{0,j} - 2r_i^2 \Delta q_{1,j} \right\} + \alpha_T r_0 T_1. \quad (3.52)$$

Підставляючи (3.51) і (3.52) до умови сполучення (3.41), з огляду на малу величину радіального переміщення, внаслідок намотування і-го витка будемо мати

$$\alpha_0 \Delta q_{0,j} + \beta_0 \Delta q_{1,j} = B \Delta q_{0,j} + \alpha_T r_0 (T_\delta - T_1), \quad (3.53)$$

де

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{r_0}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{E} \left[(r_0^2 + r_1^2) - \mu(r_0^2 - r_1^2) \right] - \frac{d\delta}{dq} / q_{\delta,j} T'_\delta, \\ \beta_0 = \frac{-2r_1^2 r_0}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{E}, \end{cases} \quad (3.54)$$

або

$$\Delta q_{0,j} = \frac{\beta_0}{B - \alpha_0} \Delta q_{i,j} + \frac{\alpha_T r_0 (T_i - T_\delta)}{B - \alpha_0}. \quad (3.55)$$

Таким чином, як гранична умова на внутрішній границі рулону виступає зв'язок між збільшенням тиску на зовнішній границі барабана моталки і внутрішньою границею і-го витка (унаслідок намотування J-го витка) у формі (3.55).

На зовнішній границі рулону з умови рівноваги верхнього периферійного витка, його тиск дорівнює

$$\Delta q_{j,j} = \frac{\sigma_j h}{\delta_{j-1}}, \quad (3.56)$$

де σ_j – натяг смуги при намотуванні J-го витка, h – товщина витка.

Отже, розрахунок напружено-деформованого стану рулону при намотуванні J-го витка зводиться до рішення алгебраїчної системи рівнянь (1.7) із тридіагональною матрицею, значення коефіцієнтів якої розраховуються відповідно до формул (3.48) або (3.49) з граничними умовами на внутрішній і зовнішній поверхні (3.55) і (3.56) відповідно.

Задача визначення напружень у рулоні знятому з барабана моталки зважується двома шляхами. У першому випадку необхідно спочатку визначити міжвитковий тиск у рулоні, що остигнув на барабані, а потім врахувати зміну напруженого стану рулону при знятті його з моталки.

У другому випадку спочатку визначаються напруження в рулоні після зняття його з моталки, а потім знаходиться збільшення міжвиткових тисків унаслідок температурних ефектів з наступним підсумовуванням цих величин.

Розглянемо зміну напружено-деформованого стану рулону після зняття його з барабана моталки внаслідок остигання (нагрівання).

Умова з'єднання контактуючих поверхонь суміжних витків запишеться у вигляді

$$\Delta U_i^{3,C} = \Delta U_{i+1}^{B,C} + \Delta \delta_i^{C_t}(q_i^{C_t}, t_i'), \quad (3.57)$$

де

$$\Delta \delta_i^{C_t}(q_i^{C_t}, t_i') = \delta_i^{C_t}(q_i^{C_t}, t_i') - \delta_i^C(q_i^C, T_i'). \quad (3.58)$$

Після приведення (3.57) до системи рівнянь із тридіагональною матрицею, будемо мати вираз для коефіцієнтів

$$\left\{ \begin{aligned} A_i &= \frac{2r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i}; \\ D_i &= \frac{1}{E_i} \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \frac{1}{E_{i+1}} \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} - \frac{\mu_i}{B} + \frac{\mu_{i+1}}{E_{i+1}}; \\ B_i &= \frac{-2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \frac{1}{E_{i+1}}; \\ F_i &= -\frac{E_i}{r_i} \Delta \delta_i^{C_t} + \alpha_t (E_i \Delta t_i - E_{i+1} \Delta t_{i+1}). \end{aligned} \right. \quad (3.59)$$

Граничні умови запишуться

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta q_0^{C_t} &= 0, \quad r = r_0 \\ \Delta q_N^{C_t} &= 0, \quad r = r_N \end{aligned} \right. \quad (3.60)$$

Зручним алгоритмом для розв'язку трьохточечних крайових задач є метод прогонки, докладно описаний у [39]. Залишаються незмінними вираз для прогоночних коефіцієнтів, сам процес прямого і зворотнього прогону. Конкретна задача реалізується через завдання значень коефіцієнтів тридіагональної матриці (3.49) або (3.59) і граничних умов.

Для задачі остигання (нагрівання) рулону на барабані моталки будемо мати

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\beta_0}{B - \alpha_0} \\ \beta_i &= \frac{\alpha_t r_0 (T_1 - T_\delta)}{B - \alpha_0}, \quad r = r_\delta \end{aligned} \right. \quad (3.61)$$

і

$$\Delta q_{j,j} = \frac{\sigma_j}{r_{j-1}}, \quad r = r_{N+1}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.62)$$

Для остигання (нагрівання) рулону після зняття

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \beta_1 &= 0 \end{aligned} \right., \quad r = r_\delta \quad (3.63)$$

і

$$\Delta q_N^{C_t} = 0, \quad r = r_{N+1}.$$

Зауваження: для уточнення величини зміни, зазорів $\Delta\delta_i^{C_t}$ при рішенні задачі остигання (нагрівання) рулону після його зняття з барабана моталки необхідна організація ітераційного процесу. Внаслідок зміни контактних напруг і температур по товщині намотування за знайденим значенням $q_i^{C_t}$ уточнюються значення $\Delta\delta_i^{C_t}$ доти, поки не буде задоволена необхідна точність збіжності ітерацій.

При намотці смуг, що прокочуються, на барабан моталки листового стану суміжні витки в рулонах прилягають друг до друга нещільно. Це обумовлено тим, що смуги мають деяку хвилястість, коробоватість, різнотовщість. Поверхня гарячекатаних смуг покрита кулею окалини. Крім того, поверхня смуг має шорсткість, що може змінитися під навантаженням. У зазор між витками смуги потрапляє вода, мастильно-охолоджуюча рідина. Розмір зазору між витками (не густина прилягання витків) залежить від міжвиткового тиску і температури смуг, оскільки податливість витків, спроможність до зменшення зазорів із збільшенням температури матеріалу, що прокочуються в рулоні, зростає. Відповідно до результатів робіт умова сполучення поверхонь суміжних витків, що контактують, смуги в рулоні має вигляд (рис. 3.2)

$$U_i^{306} = U_{i+1}^{6H} - \delta_i(q_i, T_i'), \quad (3.64)$$

де $\delta_i(q_i, T_i')$ – розмір зазору між i -тим та $(i+1)$ -им витками смуги в рулоні, що функціонально залежить від тиску q_i і температури T_i' на контакті цих витків.

Температуру T_i' на контакті i -го та $(i+1)$ -го витків будемо вважати рівній полусумі температур цих витків

$$T_i' = \frac{1}{2}(T_i + T_{i+1}). \quad (3.65)$$

Розглянемо зміну напружень в рулоні, що перебуває з $(j-1)$ витків, викликану намоткою j -го витка. Нижче, при позначенні змінних, перший індекс буде вказувати на номер розглянутого i -го витка, другий номер j -го витка, вплив якого визначаємо. Відповідно до такої індексації тиск між i -им та $(i+1)$ -им витками в рулоні з j витків буде позначатися $q_{i,j}$.

Зрозуміло, що при ідеальному (без зазорів) приляганні витків збільшення розміру переміщення зовнішньої поверхні i -го витка від дії якогось j -го витка, тобто $\Delta U_{i,j}^{306}$, буде рівно збільшенню переміщення внутрішньої поверхні $(i+1)$ -го

витка від дії того ж j -го витка ΔU_{i+1}^{308} . Інакше кажучи, в розглянутому випадку $\Delta U_{i,j}^{308} = \Delta U_{i+1}^{6H}$. У загальному випадку при наявності зазорів між витками їхньої вибірки (зближенні поверхонь) під дією тиску ця умова запишеться

$$\Delta U_{i,j}^{nap} = \Delta U_{i+1,j}^{6H} - \Delta \delta_{i,j}(q_{i,j}, T_i'), \quad (3.66)$$

де

$$\Delta \delta_{i,j} = \delta_i(q_{i,j}, T_i') - \delta_i(q_{i,j-1}, T_i'). \quad (3.67)$$

При намотці наступного витка збільшення міжвиткового тиску $\Delta \delta_{i,j} = q_{i,j} - \Delta q_{i,j-1}$ складає невеликий розмір. Тоді можна прийняти

$$\Delta \delta_{i,j} = \delta_i(q_{i,j}, T_i') - \delta_i(q_{i,j-1}, T_i') \approx \left. \frac{d\delta}{dq} \right|_{q_{i,j-1}, T_i'} \Delta q_{i,j}. \quad (3.68)$$

Відповідно до приведенного вище розв'язку задачі Ляме запишемо вираз $\Delta U_{i,j}^{308}$ і $\Delta U_{i+1,j}^{6H}$. Вважаємо, що намотування j -го витка не змінило температуру витків смуги в рулоні ($\Delta T = 0$). Тоді

$$\Delta U_{i,j}^{308} = \frac{r_i}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E} \left\{ - (r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu(r_{i-1}^2 - r_i^2) \right\} q_{i,j} - 2r_{i-1}^2 \cdot q_{i-1,j}, \quad (3.69)$$

$$\Delta U_{i,j}^{6H} = \frac{r_{i-1}}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i} \left\{ - (r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu(r_{i-1}^2 - r_i^2) \right\} q_{i-1,j} - 2r_i^2 \cdot q_{i,j}, \quad (3.70)$$

В останньому виразі індекс i збільшуємо на одиницю, тобто визначимо розмір переміщення внутрішньої поверхні $(i+1)$ -го витка

$$\Delta U_{i,j}^{6H} = \frac{r_{i-1}}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E_i} \left\{ - (r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu(r_{i-1}^2 - r_i^2) \right\} q_{i-1,j} - 2r_i^2 \cdot q_{i,j}, \quad (3.71)$$

Підставивши до рівняння (3.66) знайдені вирази $\Delta U_{i,j}^{308}$, $\Delta U_{i+1,j}^{6H}$, $\Delta \delta_i(q_{i,j}, T_i')$, матимемо

$$\begin{aligned} & \frac{r_{i-1}}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \frac{1}{E} \left\{ - (r_{i-1}^2 + r_i^2) - \mu(r_{i-1}^2 - r_i^2) \right\} \Delta q_{i,j} \} + \frac{r_{i-1}}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \cdot \frac{1}{E} \cdot 2r_{i-1}^2 \Delta q_{i-1,j} - \\ & - \frac{r_{i-1}}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \frac{1}{E} \left\{ - (r_i^2 + r_{i+1}^2) - \mu(r_i^2 - r_{i+1}^2) \right\} \Delta q_{i,j} \} + \frac{r_i}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{E} \cdot 2r_{i+1}^2 \Delta q_{i+1,j} + \\ & + \left. \frac{d\delta}{dq} \right|_{q_{i,j-1}, T_i'} \cdot \Delta q_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Після приведення подібних маємо

$$A_i \Delta q_{i-1,j} - D_i \Delta q_{i,j} + B_i \Delta q_{i+1,j} = -F_i, \quad (3.73)$$

$$\text{де } A_i = \frac{r_{i-1}}{r_i^2 - r_{i-1}^2};$$

$$D_i = \frac{r_{i-1} - r_i^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \frac{r_i - r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} - \frac{E}{r} \cdot \frac{d\delta}{dq} \Big|_{q_{i,j}, T_i'}; \quad B_i = \frac{2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2};$$

$$F_i = 0.$$

З урахуванням, що $r_i - 1 = r_i - h$, $r_i + 1 = r_i + h$, де h – товщина смуги в рулоні, спростимо вираз цих коефіцієнтів. Одержимо

$$A_i = 2(r_i - 1)^2 (2r_i + h); \quad D_i = 8r_i^3 - \frac{E}{r_i} \cdot \frac{d\delta}{dq} \Big|_{q_{i,j}, T_i'} \cdot (4r_i^2 - h^2) \cdot h; \quad B_i = 2(2r_i^3 + 3r_i^2 h - h^3)$$

Розглянемо напружено-деформований стан рулону під час намотування смуги на барабан моталки. Вважаємо, що барабан моталки являє собою товстостінний циліндр, зовнішній радіус якого дорівнює r_δ^{306} , внутрішній радіус – r_δ^{6H} , E_δ і μ_δ – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу барабана. Коефіцієнт товстостінності барабана $\lambda = \frac{r_\delta^{6H}}{r_\delta^{306}}$. Зміна радіальної деформації $\Delta U_{\delta,j}$ зовнішньої поверхні барабана, поданого у вигляді еквівалентного товстостінного циліндра з коефіцієнтом товстостінності λ , внаслідок зміни діючого на нього тиску на розмір $\Delta q_{\delta,j} = \Delta q_{0,j}$ при постійній температурі барабана визначається відповідно до розв'язку задачі Ляме формулою

$$\Delta U_{\delta,j} = B \cdot \Delta q_{\delta,j} = B \cdot \Delta q_{0,j}, \quad (3.74)$$

$$\text{де } B = -\frac{r_\delta^{306}}{E} \left(\frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2} - \mu_\delta \right).$$

Приріст радіальної деформації внутрішньої поверхні першого витка $\Delta U_{1,j}^{6H}$ під впливом зміни тиску на нього через дію j -го витка при $\Delta T = 0$ визначається виразом

$$\Delta U_{1,j}^{6H} = \frac{r_0}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{E_i} \left\{ - (r_0^2 + r_1^2) - \mu (r_0^2 - r_{i1}^2) \right\} q_{0,j} - 2r_1^2 \cdot q_{i,j} \} \quad (3.75)$$

Відповідно до загального випадку (3.66) приріст радіальної деформації поверхні барабана $\Delta U_{\delta,j}$ від дії j -го витка дорівнює приросту радіальної деформації внутрішньої поверхні першого витка $\Delta U_{1,j}^{en}$ мінус зміна розміру зазору між першим витком і барабаном $\Delta \delta_{0,j}$

$$\Delta U_{\delta,j} = \Delta U_{1,j}^{en} - \Delta \delta_{0,j}(q_{\delta,j}, T_{\delta}'), \quad (3.76)$$

де $T_{\delta}' = \frac{1}{2}(T_{\delta} + T_1')$; T_{δ} – температура поверхні барабана; T_1 – температура першого витка.

Підставляючи до рівняння (3.76) вирази (3.76) і (3.75), отримаємо

$$B \cdot \Delta q_{0,j} = \frac{r_0}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{E} \left\{ \left[(r_0^2 + r_1^2) - \mu(r_0^2 - r_{i1}^2) \right] q_{0,j} - \frac{2r_0 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{E} \cdot q_{1,j} - \Delta \delta_{0,j}(q_{\delta,j}, T_{\delta}') \right\}. \quad (3.77)$$

Оскільки $\Delta \delta_{0,j}(q_{\delta,j}, T_{\delta}') \approx \left. \frac{d\delta}{dq} \right|_{q_{\delta,j}, T_{\delta}'} \cdot \Delta q_{0,j}$, вираз (3.77) представимо у вигляді

$$\alpha_0 \Delta q_{0,j} + \beta_0 \Delta q_{1,j} = B \cdot \Delta q_{0,j}, \quad (3.78)$$

$$\text{де } \alpha_0 = \frac{r_0}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{E} \left\{ \left[(r_0^2 + r_1^2) - \mu(r_0^2 - r_{i1}^2) \right] \right\} - \left. \frac{d\delta}{dq} \right|_{q_{\delta,j}, T_{\delta}'}; \quad \beta_0 = \frac{2r_0 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{E}.$$

Далі виразимо розмір $\Delta q_{0,j}$, через $\Delta q_{1,j}$. Отримаємо $\Delta q_{0,j} = \frac{\beta_0}{B - \alpha_0} \cdot \Delta q_{1,j}$, або

$$\Delta q_{0,j} = Z_1 \cdot \Delta q_{1,j}, \quad \text{де } Z_1 = \frac{\beta_0}{B - \alpha_0}.$$

Підставляючи співвідношення (3.48) до розв'язку (3.43), записаного для першого витка ($i = 1$), і приймаючи до уваги, що $F_i = 0$, а значить $F_i = 0$, знаходимо:

$$\begin{aligned}
A_1 \Delta q_{0,j} - D_1 \Delta q_{1,j} + B_1 \Delta q_{2,j} &= 0; \\
A_1 Z_1 \Delta q_{1,j} - D_1 \Delta q_{1,j} + B_1 \Delta q_{2,j} &= 0; \\
(A_1 Z_1 - D_1) \Delta q_{1,j} + B_1 \Delta q_{2,j} &= 0; \\
\Delta q_{1,j} &= -\frac{B_1}{A_1 Z_1 - D_1} \Delta q_{1,j}; \\
\Delta q_{1,j} &= Z_2 \Delta q_{1,j};
\end{aligned}$$

$$\text{де } Z_2 = -\frac{B_1}{A_1 Z_1 - D_1}.$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (3.73), записане для іншого витка, визначимо залежність $\Delta q_{2,j}$ від $\Delta q_{3,j}$ і так далі. В загальному вигляді залежність приросту тиску на i -ому витку $\Delta q_{i,j}$ від приросту тиску на $(i+1)$ -ому витку $\Delta q_{i+1,j}$ виражається як

$$\Delta q_{i,j} = Z_{i+1} \cdot \Delta q_{i+1,j}, \quad (3.79)$$

$$\text{де } Z_{i+1} = -\frac{B_i}{A_i Z_i - D_i}.$$

Повний сумарний тиск $q_{i,N}$ на i -ий виток радіусом r_i у рулоні, що перебуває з N витків, буде являти собою суму приросту тисків $\Delta q_{i,j}$ від дії витків j , що лежать вище. Тобто

$$q_{i,N} = \sum_{j=i+1}^{j=N} \Delta q_{i,j}, \quad (3.80)$$

де $j = 1, 2, \dots, N$; $i = 0, 1, \dots, j-1$; N – кількість витків смуги в рулоні.

Тиск $q_{j-1,j}$ верхнього периферійного витка, обумовлений з умови його рівноваги, дорівнює

$$\Delta q_{j-1,j} = q_{j-1,j} = \frac{\sigma_{0,j} h}{r_{j-1}}, \quad (3.81)$$

де $\sigma_{0,j}$ – натяг смуги між останньою кліткою стану і барабаном моталки при намотці j -го витка.

Таким чином, тиск рулону, що складається з N витків, на барабан моталки q_δ визначається сумою $q_\delta = q_{0,N} = \sum_{i=1}^{j=N} \Delta q_{0,j}$. При розрахунку міжвиткових тисків

смуги в рулоні на барабані за допомогою залежностей (3.39), (3.77), виразів для $\alpha_0, \beta_0, Z_{i+1}, K_{i+1}$ і граничної умови (3.78) внутрішній цикл обчислень, передбачає зміну i , повторюється від 0 до $j-1$, а зовнішній цикл обчислень за змінною j від 1 до N . Рівняння (3.39) розв'язується методом «прогону». Спочатку послідовно від Z_1 до Z_{N-1} знаходимо значення всіх прогоночних коефіцієнтів Z_i і K_i . Далі, використовуючи умови (3.78) за допомогою рівняння (3.39) знаходимо всі значення $\Delta q_{i,j}$ послідовно для значення j . Потім за формулою (3.77) обчислюємо розміри $q_{i,j}$. За відомими розмірами $q_{i,j}$ тангенціальні (окружні) напруження $\sigma_{i,j}$ можуть бути визначені за допомогою рівняння, що виражає умову рівноваги витка

$$\sigma_i = \frac{q_i r_i - q_{i+1} r_{i+1}}{r_{i+1} - r_i}.$$

Викладена схема розрахунку дозволяє знайти всі значення $q_{i,j}$, $\sigma_{i,j}$.

Вважаємо, що змотаний рулон представляє багатошаровий циліндр (відповідно витки рулону – концентричні кола).

Рівняння теплопровідності для твердих тіл у випадку змінних теплофізичних характеристик має вигляд

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda \text{grad} T), \quad (3.82)$$

де T – температура, τ – час, ρ – щільність, c – питома теплоємність, λ – коефіцієнт теплопровідності.

З урахуванням циліндричної симетрії, обмежуючись розглядом поширення тепла в радіальному напрямку, запишемо загальний вигляд рівняння теплопровідності для багатошарових циліндрів з урахуванням внутрішніх джерел тепла

$$\frac{\partial(\rho_m c_m T)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \lambda_m \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_m \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \omega_m^*, \quad m = \overline{1, M}, \quad (3.83)$$

або в загальному вигляді

$$\frac{\partial(bT)}{\partial \tau} = c \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(d_m \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \omega_m^*, \quad (3.84)$$

де

$$\begin{cases} b_m = \rho_m c_m, \\ c_m = \frac{1}{r} \lambda_m, \\ d_m = \lambda_m, \quad m = \overline{1, M} \end{cases}, \quad (3.85)$$

тут $m = 1 \div M$ – номер шару, r_* – координата, ω_m^* – потужність стоку (джерела) тепла для m -го шару, M – кількість витків.

Якщо між дотичними поверхнями сусідніх витків здійснюється ідеальний тепловий контакт, то температури дотичних поверхонь рівні. Також має місце рівність теплових витків, що проходять через поверхні зіткнення

$$\begin{cases} T_m^+ = T_m^- \\ \left(h_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \right)^+ = \left(h \frac{\partial T_m}{\partial r} \right)^-, \quad m = 2, 3, \dots, M-1 \end{cases}. \quad (3.86)$$

Тут індекс «+», «-» вказує на значення температури і теплового потоку дотичних поверхонь «зверху» і «знизу» відповідно.

Більш загальний вид умов на стиках з урахуванням контактних термічних опорів і фізико-хімічних перетворень, що супроводжуються виділенням і поглинанням теплоти:

$$\begin{cases} T_m^+ - T_m^- = R_m \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \right)^+ \\ \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \right)^+ - \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \right)^- = \omega_m, \quad m = 2, 3, \dots, M-1 \end{cases}, \quad (3.87)$$

де R_m – значення коефіцієнта контактного термічного опору для m -го стику, ω_m – значення потужності джерела (стоку) тепла на m -ому стику.

Уніфіковані граничні умови записуються

$$\begin{cases} b_1 T + b_2 \frac{\partial T}{\partial r} = b_3; \quad r = r_0 \\ b_4 T + b_5 \frac{\partial T}{\partial r} = b_6; \quad r = r_M \end{cases}, \quad (3.88)$$

Як правило на внутрішній поверхні рулону задається умова теплоізоляції

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = 0, \quad r = r_0, \quad (3.89)$$

на зовнішній границі – умова конвективного теплообміну

$$\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} = \alpha_r (T_r - T_M), \quad (3.90)$$

де T_r – температура навколишнього середовища, α_r – коефіцієнт тепловіддачі на-
вколишнього середовища, λ_m – коефіцієнт теплопровідності на зовнішній границі
рулону, T_M – температура зовнішньої границі рулону.

Відповідно коефіцієнти граничних умов, b_i , $i = \overline{\alpha, \gamma}$ приймуть значення

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1, \\ b_3 = 0 \end{cases} \quad (3.91)$$

і

$$\begin{cases} b_4 = \alpha_r \\ b_5 = \lambda_M \\ b_6 = \alpha_r T_r \end{cases} . \quad (3.92)$$

І нарешті, запишемо початковий розподіл температури

$$T_{\tau=0} = T^*(r). \quad (3.93)$$

Перейдемо до чисельного розв'язку задачі. Приймемо для других похідних
за поперечною координатою різницеву апроксимацію другого порядку точності
відносно Δr_m (Δr_m – крок інтегрування по координаті для m -го шару). Для пер-
ших похідних – апроксимацію центральними різницями другого порядку точнос-
ті.

Для похідної за часом використовуємо апроксимації першого порядку точ-
ності відносно $\Delta \tau$. Тоді система (3.43) може бути записана

$$\begin{aligned} \frac{b_k^{j+1} T_r^{j+1} - b_r^j T_k^j}{\Delta \tau} = c_k \frac{T_{k+1}^{j+1} - T_{k-1}^{j+1}}{2 \Delta r_m} + \frac{d_{k+1/2}^{j+1} T_{k+1}^{j+1} - (d_{k+1/2}^{j+1} + d_{k-1/2}^{j+1}) T_k^{j+1} + d_{k-1/2}^{j+1} T_{k-1}^{j+1}}{\Delta r_m^2} + \\ + \omega_k^{*j+1}, \quad m=1, M \\ k \in [1, i_{eM}] \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$d_{k \pm 1/2} = \frac{d_k + d_{k \pm 1}}{2}$$

або тут у вигляді системи рівнянь із тридіагональною матрицею

$$A_k^{j+1} T_{k+1}^{j+1} + B_k^{j+1} T_k^{j+1} + C_k^{j+1} T_{k-1}^{j+1} = D_k^{j+1}, \quad k \in [1, i_{eM}], \quad (3.95)$$

де

$$\begin{cases} A_k^{j+1} = \frac{\Delta \tau c_k^{j+1}}{2\Delta r_m} + \frac{\Delta \tau (d_k^{j+1} + d_{k+1}^{j+1})}{2\Delta r_m^2}; \\ B_k^{j+1} = -[b_k^{j+1} + \frac{\Delta \tau (d_{k+1}^{j+1} + 2d_k^{j+1} + d_{k-1}^{j+1})}{2\Delta r_m^2}]; \\ C_k^{*j+1} = -\frac{\Delta \tau}{2\Delta r_m} c_k^{j+1} + \frac{\Delta \tau (d_k^{j+1} + d_{k-1}^{j+1})}{2\Delta r_m}; \\ D_k^{j+1} = -(b_k^j T_k^j + \omega_k^{*j+1} \Delta \tau), \end{cases} \quad k \in [1, i_{em}], \quad (3.96)$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} P_0 = \frac{\Delta \tau}{\Delta r_m^2} \\ q_0 = \frac{k\Delta r_m}{2}, \\ P_k = P_0 d_k^{j+1} \\ q_k = q_0 / r_k \end{cases}, \quad (3.97)$$

і перепишемо (3.96) у вигляді

$$\begin{cases} A_k = P_k (1/2 + q_k) + \frac{P_{k+1}}{2} \\ B_k = -\left(b_k + \frac{P_{k+1} + P_{k-1}}{2} + P_k \right), \\ C_k^* = P_k (1/2 - q_k) + \frac{P_{k-1}}{2} \\ D_k = (-b_k T_k + \omega_k \Delta \tau). \end{cases} \quad k \in [1, i_{em}], \quad (3.98)$$

Тут k – номер розрахункового вузла, i_{em} – кількість розрахункових вузлів m -го витка, j – номер тимчасового шару.

Умови на стижах (3.87) приймуть вигляд

$$\begin{cases} T_{jm}^+ - T_{jm}^- = a_m \lambda_{jm} + \frac{T_{jm+1}^+ - T_{jm}^+}{\Delta r_m^+} \\ \lambda_{jm} + \frac{T_{jm+1}^+ - T_{jm}^+}{\Delta r_m^+} - \lambda_{jm} - \frac{T_{jm}^- - T_{jm-1}^-}{\Delta r_m^-} = \omega_m \end{cases}, \quad m = 2, 3, \dots, M. \quad (3.99)$$

З 1-ої системи рівнянь (3.99) випливає

$$T_{jm}^- = T_{jm}^+ + \left(1 + \frac{a_m \lambda_{jm}^+}{\Delta r_m}\right) - \frac{a_m \lambda_{jm}^+}{\Delta r_m^+} T_{jm+1}, \quad m = 2, 3, \dots, M. \quad (3.100)$$

З 2-ої системи рівнянь (3.99) будемо мати

$$\frac{\lambda_{jm}^+ \Delta r_m^-}{\Delta r_m^+} (T_{jm+1} - T_{jm}^+) - \lambda_{jm}^- \left[T_{jm}^+ \left(1 + \frac{a_m \lambda_{jm}^+}{\Delta r_m^+}\right) - \frac{a_m \lambda_{jm}^+}{\Delta r_m^+} T_{jm+1} - T_{jm-1}^+ \right] = \omega_m \Delta r_m^-, \quad (3.101)$$

$$m = 2, 3, \dots, M$$

або у вигляді системи рівнянь

$$A_{jm} = T_{jm+1}^+ + B_{jm} T_{jm}^+ + c_{jm} T_{jm-1}^+ = D_{jm}, \quad (3.102)$$

де

$$\begin{cases} A_{jm} = \frac{\lambda_{jm}^+ \Delta r_m^-}{\Delta r_m^+} + \frac{\lambda_{jm}^- \lambda_{jm}^+ d_m}{\Delta r_m^+} \\ B_{jm} = - \left[\frac{\lambda_{jm}^+ \Delta r_m^-}{\Delta r_m^+} + \lambda_{jm}^- \left(1 + \frac{d_m \lambda_{jm}^+}{\Delta r_m^+}\right) \right], \\ C_{jm} = \lambda_{jm}^- \\ D_{jM} = \omega_m \Delta r_m^- \end{cases}, \quad m = 2, 3, \dots, M. \quad (3.103)$$

Вводимо позначення

$$\begin{cases} P_0 = \lambda_{jm}^+ / \Delta r_m^+ \\ P_m = P_0 \Delta r_m^- \\ q_m = P_0 \lambda_{jm}^- - d_m \end{cases}, \quad (3.104)$$

з (3.103) одержимо:

$$\begin{cases} A_{jm} = P_m + q_m \\ B_{jm} = -(P_m + \lambda_{jm}^- + q_m) \\ C_{jm} = \lambda_{jm}^- \\ D_{jm} = \omega_m \Delta r_m^- \end{cases}, \quad m = 2, 3, \dots, M. \quad (3.105)$$

Тут I_m – номер стику (збігається с) j_m^+ , I_m^- – номер фіктивного стику.

Зауваження: при $R_m = 0$ і $\omega_m = 0$, $m = 2, 3, \dots, M$ будемо мати умови ідеального контакту.

Отже, інтегрування вихідної системи рівнянь (3.83) з граничними умовами виду (3.89) з початковою умовою (3.93) зводиться до розв'язку алгебраїчної системи рівнянь із тридіагональною матрицею (3.95), зручним методом рішення, який при граничних умовах даного виду (3.89) є метод прогону [9].

Розглянемо безпосередньо алгоритм розрахунку теплової задачі – алгоритм прогону.

Різницеві рівняння визначення значень температури як для внутрішніх крапок багат шарової теплоізоляції, так і для стиків приводяться до єдиного стандартного виду у формі системи рівнянь із тридіагональною матрицею

$$A_i T_{i+1} + B_i T_i + c_i T_{i-1} = D_i, \quad (3.106)$$

де $i = i_b \div i_e$, коефіцієнти якої розраховуються за формулами (3.98) для внутрішніх точок кожного витка і за формулою (3.105), для стиків між дотичними поверхнями сусідніх витків.

Тут i_b – порядковий номер початкового розрахункового вузла різницевої сітки осі or , i_e – номер кінцевого вузла.

Відповідно до цього методу розв'язування системи алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею зводиться до розрахунку за наступною рекурентною формулою

$$T_{i-1} = \alpha_{i-1} T_i + \beta_{i-1}, \quad (3.107)$$

де $i = i_{b+1} \div i_e$.

Підставляючи рівності (3.107) при конкретному i у відповідне рівняння системи (3.106), одержимо вираз для прогоночних коефіцієнтів α_i, β_i у формі

$$\begin{cases} \alpha_i = -\frac{A_i}{B_i + \alpha_{i-1} c_i}; \\ \beta_i = \frac{D_i - \beta_{i-1} c_i}{B_i + \alpha_{i-1} c_i}, \end{cases} \quad (3.108)$$

де $i = (i_{b+1} \div i_e)$.

Якщо відомі значення $\alpha_{i_b}, \beta_{i_b}$ і T_{i_e} , то розрахунок здійснюється в два етапи.

На першому – прямий прогін – обчислюються прогоночні коефіцієнти α_i, β_i за рекурентними формулами (3.108) і запам'ятовуються. На другому – зворотний прогін – визначається значення температури за (3.107).

Для визначення $\alpha_{i_b}, \beta_{i_b}$ які необхідні для початку рахунку за формулами (3.107), а також для визначення значення температури T_{i_e} скористаємося граничними умовами на внутрішній і зовнішній поверхнях стінки, що записані в стандартному вигляді

$$\begin{cases} b_1 T_{i_b} + b_2 \frac{\partial T}{\partial r} \big|_{i=i_b} = b_3 \\ b_4 T_{i_e} + b_3 \frac{\partial T}{\partial r} \big|_{i=i_e} = b_6 \end{cases} \quad (3.109)$$

Розглянемо внутрішню поверхню при $i = i_b$.

Представимо похідну $\frac{\partial T}{\partial r}$ різницеvim співвідношенням з другим порядком точності

$$\frac{\partial T}{\partial r} = a_1 T_{i+2} + a_2 T_{i+1} + b_3 T_i, \quad (3.110)$$

де

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2\Delta r}; \\ a_2 = \frac{2}{\Delta r}; \\ a_3 = -\frac{3}{2\Delta r}. \end{cases} \quad (3.111)$$

Підставимо (3.110) в перше рівняння системи (3.109) і, використовуючи рівняння системи (3.106) при $i = i_b + 1$, одержимо співвідношення

$$\begin{cases} b_2 a_1 f_{i_b+2} + b_2 a_2 f_{i_b+1} + b_1 (1 + a_3) f_{i_b} = b_3 \\ A_{i_b+1} f_{i_b+2} + c_{i_b+1} f_{i_b+1} + B_{i_b+1} f_{i_b} = D_{i_b+1} \end{cases}. \quad (3.112)$$

При $i = i_b + 1$, для α_{i_b} й β_{i_b} одержимо наступні співвідношення:

$$\begin{cases} \alpha_{i_b} = b_2 \left(a_1 \frac{c_{i_b+1}}{A_{i_b+1}} - a_2 \right) / \left[b_2 \left(a_3 - a_1 \frac{B_{i_b+1}}{A_{i_b+1}} + b_1 \right) \right] \\ \beta_{i_b} = \left(b_3 - a_1 b_2 \frac{D_{i_b+1}}{A_{i_b+1}} \right) / \left[b_2 \left(a_3 - a_1 \frac{B_{i_b+1}}{A_{i_b+1}} \right) + b_1 \right] \end{cases}. \quad (3.113)$$

Для визначення T_{i_e} необхідно скористатися граничною умовою на зовнішній поверхні стінки при $i = i_e$, в якому замінимо похідну $\frac{\partial T}{\partial r}$ правим кінцеворізницеvim співвідношенням, записаним у формі

$$\frac{\partial T}{\partial r} = a_1 T_{i_b-2} + a_2 T_{i_e-1} + a_3 T_{i_e}, \quad (3.114)$$

де

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2\Delta r}; \\ a_2 = \frac{2}{\Delta r}; \\ a_3 = \frac{1}{2\Delta r}. \end{cases} \quad (3.115)$$

Підставимо (3.114) у граничні умови на зовнішній поверхні стінки і, використовуючи рівняння системи (3.106) при $i = i_e$, одержимо систему рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} b_5 a_1 f_{i_b-2} + b_5 a_2 f_{i_e-1} + (b_4 + b_5 a_3) f_{i_e} = b_1; \\ A_{i_e-1} f_{i_e-2} + B_{i_e-1} f_{i_e-1} + C_{i_e-1} f_{i_e} = D_{i_e-1}; \\ f_{i_e-1} = \alpha_{i_e-1} f_{i_e} + \beta_{i_e-1}. \end{cases} \quad (3.116)$$

Розв'язуючи її зокрема для T_{i_e} , одержимо

$$T_{i_e} = \frac{b_5 \beta_{i_e} + b_6 \Delta r}{b_4 \Delta r + b_5 (1 - \alpha_{i_e})}. \quad (3.117)$$

Метод розрахунку значень температури у вузлах різницевої сітки не залежить від їхньої належності до внутрішніх або граничних вузлів. Крім того, алгоритм застосуємо для розв'язання різних за типом контактів між шарами класів задач, що можливо через представлення різницевого виду умов сполучення температурного поля чи на стиках контактуючих витків у загальному вигляді (3.102).

Нелінійна задача про поширення тепла в багат шаровому рулоні розв'язується методом простих ітерацій.

При деякому початковому розподілу температури $T_k^0, (k=1 \div i_{e_1} + i_{l_e} + \dots + i_{e_M})$ знаходяться значення теплофізичних характеристик матеріалу смуги $\lambda_k^1, c_k^1, \rho_k^1$ і коефіцієнтів тридіагональної матриці $A_k^1, B_k^1, C_k^1, D_k^1$

$(k = 1 \div i_{e_1} + i_{e_2} + \dots + i_{e_M})$ за допомогою методу прогонки [39] розв'язується крайова задача (3.95), (3.108), (3.93), отримані сіткові значення функції T_k^1 знову використовуються для обчислення значень теплофізичних характеристик і коефіцієнтів тридіагональної матриці на новому тимчасовому шарі. Процес продовжується доти, доки для двох наступних ітерацій максимальна різниця між сітковими значеннями функції T у відповідних розрахункових вузлах не буде менше припустимої похибки.

У випадку, коли теплофізичні властивості матеріалу смуги не залежать від температури, необхідність в ітераціях відпадає.

Дану процедуру проробляли на кожному тимчасовому кроці, використовуючи значення температури на попередньому тимчасовому кроці, або початкове наближення, або попереднє розрахункове значення температури.

3.4. Параметричні розрахунки міжвиткових тисків і температур у рулонах холодно і гарячекатаної сталі

Як тестовий приклад для перевірки алгоритму були проведені розрахунки по визначенню напружено-деформаційного стану рулону при намотуванні смуги на барабані моталки.

При цьому результати чисельного розрахунку відповідають наступним пружним і геометричним характеристикам матеріалів смуги і барабана моталки

$$\left\{ \begin{array}{l} E = E_{\delta} = 2100 \text{ кгс / мм}^2, \\ \mu = \mu_{\delta} = 0,3, \\ \lambda = 0,7, \\ \delta = 250 \text{ мм}, \\ h = 1 \text{ мм}, \\ \sigma = 100 \text{ МПа}. \end{array} \right. \quad (3.118)$$

Вважаючи, що похідні від величин міжвиткових зазорів визначалися відповідно до формул

$$\left\{ \begin{array}{l} q \leq 0, \quad \frac{d\delta}{dq} = 0; \\ h \geq 0; \quad \frac{d\delta}{dq} = 0,505 \cdot 0,222 \cdot q^{-0,778} - \frac{6}{E}; \\ q > 0,6 \ (h < 6), \quad \frac{d\delta}{dq} = \left(0,9554 - 0,6199 \cdot 1,2 q^{1/5} + \frac{0,30296}{h^{1/2}} \right) \cdot \frac{h}{100}; \\ q < 0,6 \ (1,15 \leq h \leq 6), \quad \frac{d\delta}{dq} = \frac{1,11868}{5} q^{-4/5} \cdot \frac{h}{100}; \\ 0 < q < 1,15 \ (0 < h < 1,15), \quad \frac{d\delta}{dq} = 0,00995 + 0,00414 \cdot 1,2 q^{1/5} - \frac{0,00482}{h^{1/2}}. \end{array} \right. \quad (3.119)$$

Згідно рис. 3.2 при розрахунку напружень в рулонах без урахування зміни величини зазорів, тиск на барабан із збільшенням кількості намотаних витків, безупинно росте. Результати виходять істотно завищеними. Розрахунки, виконані з урахуванням реальних умов контактної взаємодії поверхонь смуги в рулоні (з урахуванням зазорів), показують, що з ростом кількості витків величина тиску підвищується до визначеного (критичного) значення, після чого практично не змінюється. Це обумовлено тим, що зусилля від дії наступних (після критичного числа) витків майже цілком затрачається на зміну зазору між витками. Отримані

розрахункові залежності тиску на барабан моталки від кількості намотаних шарів смуги повною мірою погоджуються з експериментальними даними.

Зв'язок між тепловою і пружною задачами здійснюється через коефіцієнти термічних напружень, що розраховуються за формулами:

$$R_{i,i+1} = \frac{0,96}{r_i} (2,60 + q_i)^{-0,28}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.120)$$

де r_i – радіус i -го витка, q_i – міжвитковий тиск на i -ому контакті.

Величинам, що входять до (3.120) відповідають розмірності

$$r_i [\text{мм}], \quad q_i [\text{кг/см}^2], \quad R_{i,i+1} [\text{м} \cdot \text{К/Вт}].$$

Для перевірки працездатності програми була проведена серія розрахунків по визначенню значень міжвиткових тисків при знятті рулону для різних способів завдання натягу.

Результати чисельного розрахунку відповідають наступним пружним та геометричним характеристикам матеріалів смуги і барабана моталки: $L=E_\delta=2100$ кг/мм², $\mu=\mu_\delta=0,3$, $\bar{\lambda}=0,7$, $\delta=250$ мм, $h=1$ мм, $\sigma=100$ МПа. Аналіз результатів, які приведені на рис. 3.2 показує, що при розрахунку напружень в рулонах без урахування величини зазорів тиск на барабан з підвищенням кількості намотаних витків неперервно зростає. Отримані результати суттєво завищені. Розрахунки, які виконані з урахуванням реальних умов контактної взаємодії поверхонь смуги в рулоні (з урахуванням зазорів), показують, що з ростом кількості витків величина тиску росте до визначеного (критичного) значення, після чого практично не змінюється. Це обумовлено тим, що зусилля від дії наступних (після критичного числа) витків майже повністю витрачаються на зміну зазорів між витками. Одержані смуги в повній мірі узгоджуються з експериментальними даними [27]. Також було розраховано температурне поле в рулоні (рис.3.3), який складається з 150 витків.

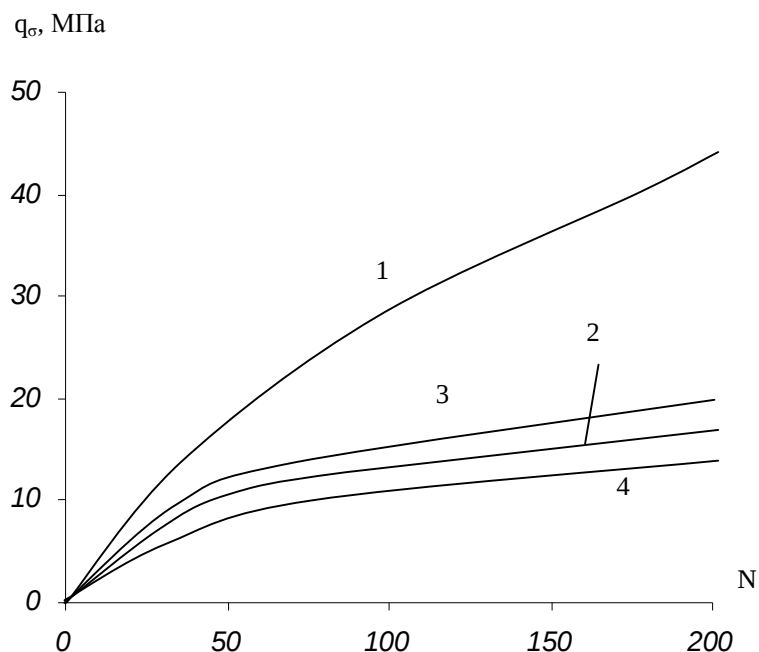
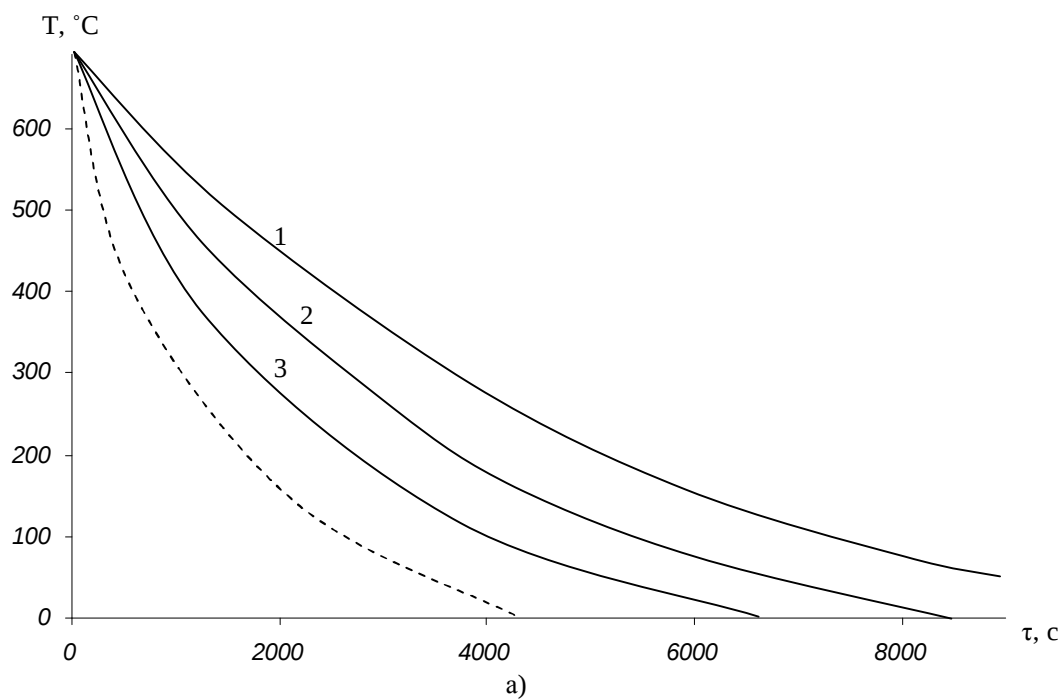


Рис. 3.2. Експериментальні та розрахункові залежності тиску рулону на барабан моталки від кількості витків при намотці з постійним натягом: 1 – розрахункова залежність тиску рулону на барабан моталки від кількості витків при намотці (без урахування зміни між виткових зазорів); 2 – розрахункова залежність тиску рулону на барабан моталки (з урахуванням зміни зазорів); 3, 4 – експериментальні залежності тиску рулону на барабан моталки [27].



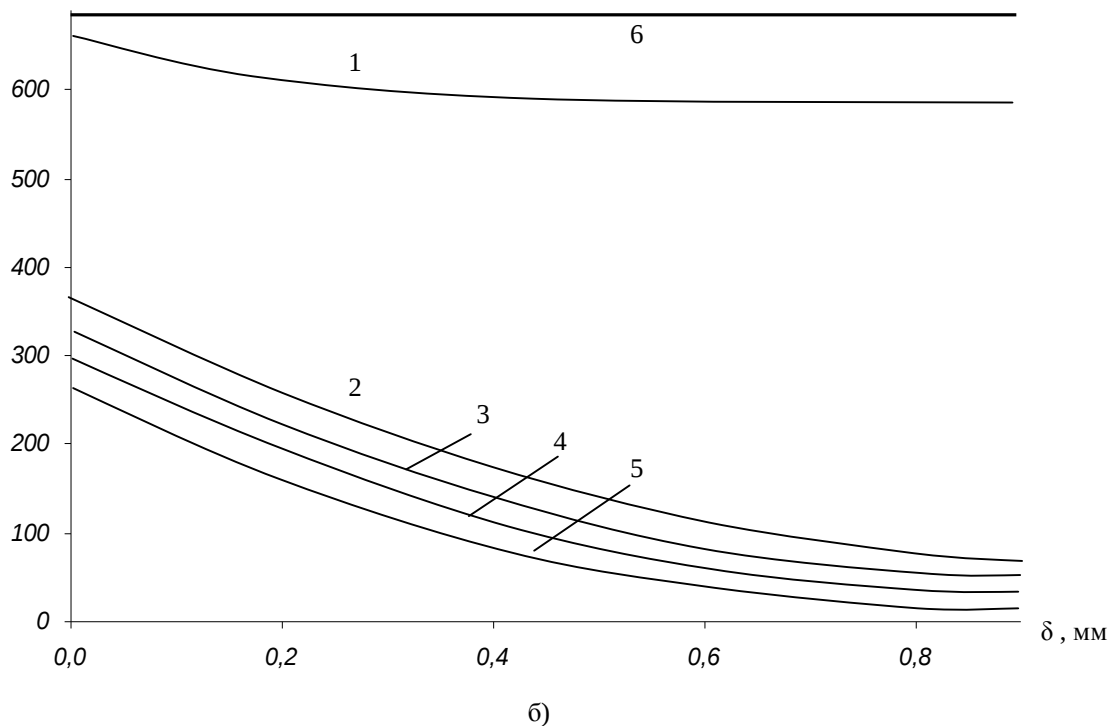


Рис. 3.3. Вплив зовнішніх умов теплообміну на температурне поле рулону: а) – зміні температури T у серединному витку рулону, який знято з барабану; б) – залежність температури від часу при різній товщині намотки.

Припускалося, що на внутрішній поверхні рулону задана умова теплоізоляції, на зовнішній – гранична умова третього роду. Початкова температура рулону $700\text{ }^{\circ}\text{C}$, температура навколишнього середовища $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Теплофізичні характеристики матеріалу смуги: коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності $\lambda=45\text{ Вт/мК}$, $a=1,47\cdot 10^{-5}\text{ м/с}^2$ відповідно. Товщина витка 1 мм . На кожному витку взято три внутрішніх розрахункових вузла. Контакт між витками неідеальний. Зв'язок між тепловою і пружною задачами здійснюється через КТС.

Результати чисельного розв'язання проілюстровані на рис. 3.3. у вигляді залежності температури від часу при різних умовах конвективного теплообміну з навколишнім середовищем (рис. 3.3а) і розподілу температури по товщині витка за конкретний проміжок часу (рис. 3.3б).

Зміна температури T у серединному витку рулону, який знято з барабана, показана на рис. 3.3а. Неперервною лінією показані результати, які отримані з урахуванням коефіцієнта термічних опорів і зім'яття нерівностей; штрихова лінія відповідає випадку $R_T=0$ (ідеальний тепловий контакт). Криві (рис. 3.3а), які позначені цифрою 1 – відповідають граничним умовам першого роду, тобто відсут-

ності теплообміну зовнішнього витка з навколишнім середовищем ($T_c=20\text{ }^{\circ}\text{C}$); 2 і 3 – граничним умовам третього роду, 2 – коефіцієнт тепловіддачі $\alpha=20\text{ Вт/м}^2\text{ К}$, 3 – $\alpha=200\text{ Вт/м}^2\text{ К}$. Видно, що неврахування контактних термічних опорів приводить до суттєвого зниження температурного поля рулону, підвищення інтенсивності теплообміну з навколишнім середовищем суттєво прискорює остигання рулону. Розподіл температури за товщиною витка за конкретний проміжок часу показаний на рис. 3.3б. Видно, що на зовнішньому 150-ому витку спостерігається великий градієнт температури за товщиною витка намотки. На 50-ому і 100-ому витках температура залишається незмінною незалежно від часу і товщини намотки (крива 6).

Таким чином, розроблені алгоритми розрахунку напружено-деформованого стану рулонів холоднокатаної і гарячекатаної сталі. Розрахунок зведен до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею і застосуванням методу прогонки. Порівняння розрахункових результатів з експериментальними даними, відомими з літератури, показує задовільне узгодження.

РОЗДІЛ 4

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І РОЗРАХУНОК ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ТРУБИ ПРИ ВИСОКОЧАСТОТНОМУ ЗВАРЮВАННІ

4.1. Основи технології процесу високочастотного зварювання

Винятково важливе значення має зварювання виробів при високочастотному нагріванні, особливо зварювання подовжніх швів труб, профілів і оболонок кабелів [17; 24]. У даний час на станах високочастотного зварювання виготовляються труби і профілі з низковуглецевих сталей і сплавів кольорових металів. Діаметр труб складає 10 – 530 мм при товщині стінки 0,5 – 10 мм. Досто-

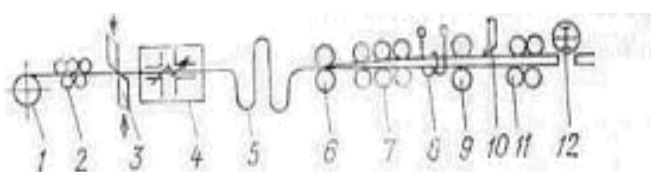


Рис. 4.1. Схема трубоелектрозварювального стану

їнства шовного зварювання при високочастотному нагріванні полягають в універсальності способу, що дозволяє зварювати практично будь-які метали без застосування захисних середовищ; високій економічності процесу, зв'язаній з локалізацією енергії у вузькій зоні

крайок; високій якості з'єднання і великій швидкості процесу, що досягає 120 м/хв. У деяких випадках, наприклад, при зварюванні алюмінієвих і сталевих оболонок кабелів зв'язку, високочастотний метод є єдино можливим способом нагрівання.

Процес зварювання здійснюється на спеціальних зварювальних станах (рис. 4.1), на яких штрипс із рулонів 1 розмотується, правиться у валках 2, обрізається ножицями 3 і приварюється до кінця попереднього рулону в стикозварювальній машині 4. Безупинна стрічка формується в клітках 6 і 7 у трубну заготовку, що зварюється в трубу в клітці 9 при нагріванні індуктором 8. Після зняття зовнішнього грату різцем 10 і охолодження шва труба калібрується валками 11 і ріжеться ножицями 12 на ділянки визначеної довжини та надходить на редукційний стан, що дозволяє з однієї звареної труби одержувати труби меншого

діаметра і товщини. Перед редукуванням труби вона нагрівається в циліндричних індукторах до температури 900 – 1000 °С. Процес безупинний; під час стикового зварювання рулонів стрічка надходить із спеціального нагромаджувача 5. Зварювальний пристрій стану складається з індуктора системи контактного токопідводу, магнітопроводів, високочастотного трансформатора і конденсаторів навантажувального контуру. Ці елементи об'єднані в один блок, що носить назву зварювальної голівки. Джерелом живлення служать лампові генератори та машинні перетворювачі частотою 10 кГц. Джерела живлення розташовуються в генераторному залі і з'єднуються зі зварювальною голівкою кабелями. Вибір частоти струму і способу підведення енергії до трубної заготовки залежить від діаметра і товщини стінки труби, якості штрипса й інших факторів.

Струм високої частоти, який підводиться до трубної заготовки індукційним або контактним методом, внаслідок ефекту близькості стягається на сторони крайок, звернені один до одного, і швидко розігріває тонкий шар металу до плавлення. Розплавлений метал видавлюється при осаді в зварювальних валках разом з окислами, утворюючи зовнішній і внутрішній грат. Мінімальна кількість розплаву визначається надійністю видалення забруднень. Збільшення глибини прогрітого шару приводить до росту споживаної потужності, зростанню обсягу грата і зниженню стійкості тонких крайок при осаді в зварювальній кліті. Основними параметрами зварювання є довжина крайок, що збільшується з ростом їхньої товщини, діаметра труби і знаходиться в межах 20 – 200 мм, кут сходження крайок, рівний 1 – 6°. Електричний режим характеризується частотою струму і витратою енергії ω_0 на одиницю довжини (м) і товщини труби (мм).

За основну частоту для зварювання труб прийнята частота 440 кГц, однак при малій товщині стінки ($\delta = 0,3 - 0,4$ мм) використовується частота 1760 кГц, а при $\delta \geq 6$ мм і великому діаметрі сталевих труб – частота 10 кГц. Зниження частоти поліпшує рівномірність нагрівання по товщині крайок, зменшує напруження на елементах схеми і швидкість охолодження металу в зоні шва, але приводить до росту витрат енергії. З підвищенням товщини труби наведена енергія ω_0 зростає при будь-якій частоті і способі підведення струму.

При індукційному підведенні енергії використовуються зовнішні і внутрішні індуктори. Зовнішній індуктор має один чи кілька витків (рис. 4.2) і може бути роз'ємним для полегшення монтажу. Магнітне поле індуктора 2 наводить у тілі заготовки 3 струм, частина якого (робочий) проходить по крайках і зами-

кається через точку їхнього сходження 4. Інший струм замикається на внутрішній стінці труби (шунтируючий). Для його зменшення в порожнину труби вводиться сердечник 1 з фериту або трансформаторної сталі (при 10 кГц), закріплений на кронштейні, що проходить через щілину заготовки. Сердечник інтенсивно охолоджується водою. З ростом діаметра труби збільшуються втрати в її тілі і росте ω_0 . Цей недолік індукційного підведення згладжується при використанні внутрішнього індуктора на частоті 10 кГц, що можливо, однак, лише при діаметрі труб понад 200 мм [17]. Можливе нагрівання одночасно також зовнішнім і внутрішнім індукторами, що підвищує швидкість зварювання і рівномірність нагрівання крайок.

Основними перевагами індукційного підведення, що забезпечують його використання, є висока надійність і знижені вимоги до якості поверхні штрипса.

Контактне підведення струму здійснюється за допомогою ковзних контактів із бронзовими або вольфрамовими наконечниками, а також з використанням обертових роликів (дисків), що притискаються з зусиллям 1000 – 10000 Н до крайок заготовки. В міру зносу контактні наконечники замінюються, а ролики переточуються. Підведення струму до роликів здійснюється через спеціальний повітряний трансформатор з обертовою вторинною обмоткою. Ковзні контакти можуть встановлюватися в будь-якій положенні за відношенням один до одного, що робить цей вид токопідводу основним при спіральному зварюванні труб, зварюванні несиметричних профілів і т. і. Роликове підведення має великий термін служби і використовується для труб діаметром 159 – 219 мм.

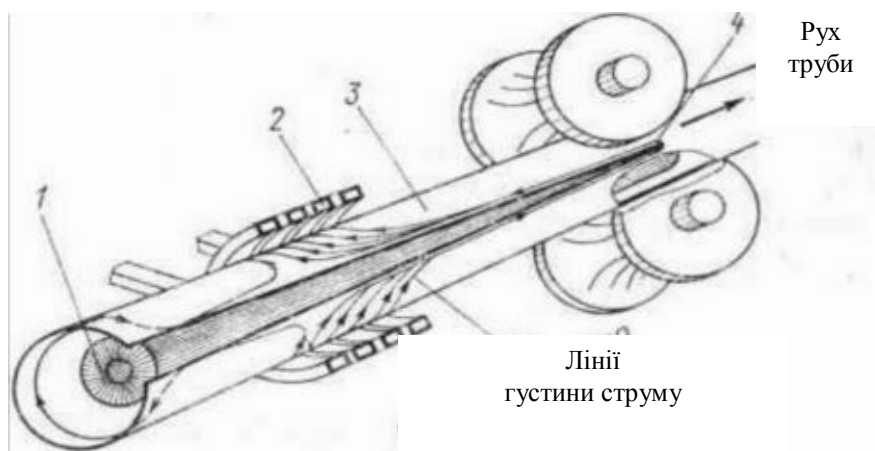


Рис. 4.2. Зварювання труби зовнішнім індуктором
(1 – сердечник; 2 – індуктор; 3 – заготовка; 4 – точка зходження)

Контактне підведення робиться тільки при частоті 440 кГц, тому що при цьому менше струм і більша напруга, чим при 10 кГц, що полегшує роботу контактів. Основний недолік – мала зносостійкість контактів, яка значно залежить від якості поверхні. Ковзні контакти доводиться змінювати після зварювання 20 – 25 км сталевих труб при гарній поверхні штрипса і 1 – 7 км труб – при поганій. Витрата енергії при використанні ковзних контактів мало залежить від діаметра труби.

До зварювальних високочастотних пристроїв пред'являються особливі вимоги у відношенні надійності, тому що вихід з ладу будь-якого елемента установки приведе до зупинки всього стану і до великих матеріальних втрат. Висока надійність забезпечується резервуванням елементів, застосуванням високоякісних вузлів і матеріалів, швидкодіючим захистом, блоковим виконанням устаткування.

Швидкість зварювання може бути знайдена за приведеною енергією ω_0 яка при використанні внутрішнього індуктора складає 3,5 – 4 кВтхв/(мм) при швидкості 40 – 60 м/хв і діаметрах до 530 мм і зростає до 5 – 8 кВтхв/(мм) при збільшенні діаметра труби до 1620 мм і зменшенні швидкості зварювання до 10 м/хв. Розрахунок числа витків індуктора й інших електричних параметрів утруднений через складність системи. Приблизний розрахунок можна виконати на основі схем заміщення при обчисленні їхніх елементів до графіків [17]. Орієнтовне значення коефіцієнта потужності індуктора 0,2 – 0,3. Енергія, що виділяється в крайках, складає 40 – 70% енергії, переданої в заготівку труби. В індукторі губиться приблизно 10% подведеної енергії.

При швидкості зварювання 120 м/хв і довжині крайок 40 мм час нагрівання елемента труби дорівнює 0,02 с, тобто має порядок періоду пульсацій спрямленої напруги. Щоб одержати стабільну якість звареного шва, до генераторів додаються фільтри анодної напруги, що знижують його пульсації до 1%. Точність стабілізації високочастотної напруги досягає 0,1%.

Розрахунок режимів зварювання на радіочастоті виконується за кривими залежності ω_0 швидкості зварювання, товщини і діаметра труби, отриманих експериментально [17, 24]. Для індукційного токопідводу ω_0 має мінімум при діаметрі труби 20 – 35 мм, рівний для сталі 0,8 – 1,0 кВтхв/(мм), а для алюмінію 0,5 – 0,6 кВтхв/(мм). При діаметрах 133 – 203 мм значення ω_0 зростає до 1,6 – 2,0 і 1,0 – 1,2 кВтхв/(мм) відповідно. Остаточний режим зварювання підбирається експериментально. Зі зменшенням швидкості зварювання якість шва

знижується; існує мінімальна швидкість, при якій зварювання ще можливе. Для сталі вона складає 1,5–2,0 м/хв. Орієнтовне значення коефіцієнта потужності при індукційному зварюванні на частоті 440 кГц складає 0,05 – 0,1, а при контактному підведенні – приблизно в два рази вище. Напруга на індукторі 1 – 1,5 кВ, на контактах 0,15 – 0,7 кВ.

Дуже ефективне високочастотне зварювання алюмінієвих і сталевих оболонок у кабелях зв'язку. Зварювання оболонок дозволяє різко знизити вартість кабелю, відмовитися від застосування дефіцитного свинцю, підвищити продуктивність устаткування. Оскільки в порожнині оболонки знаходяться жили кабелю (кабельний сердечник), помістити туди магнітопровід неможливо. Тому витрата енергії в 1,5 – 2 рази вище, ніж при зварюванні труб. Зварювання ведеться на частоті 440 або 1760 кГц при потужності 100 – 160 кВт. Швидкість зварювання досягає 80 – 90 м/хв, знижуючись до 20 – 25 м/хв під час зрощування кабельного сердечника.

Крім зварювання труб і оболонок кабелю, потрібно відзначити шовне зварювання смуг, у тому числі біметалічних, незамкнутих профілів, біметалічного дроту, приварку подовжніх чи спіральних ребер до труб, а також одночасне високочастотне зварювання незамкнутих швів кінцевої довжини.

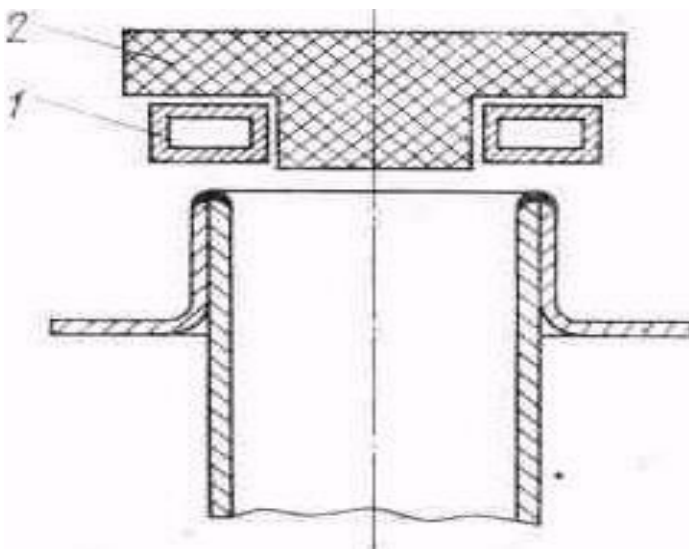


Рис.4.3. Зварювання замкнутих швів плавленням (1 – кільцевий індуктор; 2 – магнітопровід)

Високочастотне нагрівання використовується не тільки для безупинного шовного зварювання, але і для одержання замкнутих зварених швів за рахунок швидкого оплавлення крайок полем індуктора (рис. 4.3). Кільцевий індуктор 1 забезпечується феритовим магнітопроводом 2. Час нагрівання – від часток секунди до декількох секунд. Частота джерела 440 чи 66 кГц. Таким методом одержу-

ють герметизовані шви на конденсаторах, виходах трубчастих електронагрівників й інших виробів у масовому виробництві.

Труби з маловуглецевих сталей зварюються встик при нагріванні зони зварювання в кільцевому індукторі. Внутрішні шари прогріваються за рахунок теплопровідності, тому зварювання ведеться без плавлення, а час нагрівання великий – від одиниць до десятків секунд. Для обмеження зони нагрівання використовується магнітопровід. Частота струму 1 – 10 кГц. Потужність установок – до десятків сотень кіловат.

Індукційне нагрівання широко використовується для термообробки зварних з'єднань. Кільцеві зварні шви на трубах і апаратах нагрівають одночасним способом у кільцевих роз'ємних чи нероз'ємних індукторах промислової та середньої частоти. Температури залежать від марки сталі і мети обробки і коливаються в межах 600 – 1200 °С. Часто термообробку доводиться проводити під час монтажу. При цьому використовуються гнучкі індуктори зі спеціального кабелю з природним або водяним охолодженням, що накладаються на шар теплоізоляції. Випускаються спеціальні стаціонарні і переносні установки для термообробки кільцевих швів, що складаються з джерела живлення і гнучкого кабелю-індуктора, апаратури керування і конденсаторної батареї. Потужності установок складають десятки, рідше сотні кіловат.

За останні роки розроблено новий спосіб виготовлення зварних труб – безупинне зварювання при індукційному нагріванні. Вихідним матеріалом є металева стрічка в рулонах. Вона розмотується з рулону, правиться у валковому правильному пристрої і після обрізки кінця приварюється до кінця стрічки попереднього рулону. Далі стрічка надходить у многоклітевий формувальний стан, де поступово звертається в трубну заготовку і надходить у зварювальний пристрій. Після зварювання знімається зовнішній грат, охолоджується метал у зварювальному шві і труба надходить у калібрований стан, де її форма і розміри доводяться до встановлених у сортаменті.

Нагрівання крайок трубної заготовки під зварювання здійснюється за допомогою прямолінійного індуктора з магнітопроводом. При русі трубної заготовки в зварювальній установці її крайки проходять у безпосередній близькості до індуктора і нагріваються до зварювальної температури. Потім трубна заготовка надходить в обтискні валки, за допомогою яких до крайок прикладається тиск, тобто здійснюється осадження. В цей момент метал зварюється.

Магнітний потік створюваний струмом індуктора, перетинає трубну заготовку перпендикулярно її поверхні. Струм, який індукується в трубній заготовці, протікає вздовж її крайок. Енергія в трубну заготовку передається без контакту

з поверхнею, а струм не проходить через стик крайок, тому створюється можливість виготовляти цим способом труби з горячекатаної смуги з крайками без спеціальної підготовки поверхні і торців.

Подовжнє зварювання труб при нагріванні за допомогою прямолінійних індукторів може бути здійснене лише в пластичному стані без доведення металу до розплавлення. Було встановлено, що задовільне зварювання металів у пластичному стані при індукційному нагріванні, без застосування флюсів і захисних газових середовищ здійснюється при: температурі нагрівання металу – 1370 – 1450 °С; питомому тиску обтиснення – 4 – 5 кг/мм²; величині усадки ($\delta=0.5-1.0$) (де δ – товщина стінки деталей, що зварюються).

Зварювання металів струмами високої частоти одержало широке поширення через можливість високої концентрації енергії в одиницю часу на поверхнях, що зварюються, [9; 10; 14; 17], що дає перевагу перед іншими видами електричного зварювання.

Вдосконалення технології процесу високочастотного зварювання труб вимагає: встановлення взаємного зв'язку між технологічними параметрами (кутом сходження, довжиною зони оплавлення, температурою розігріву крайок, підведеною потужністю, швидкістю переміщення труби); створення системи автоматизованого керування роботою зварювального стану [24].

4.2. Фізичні особливості високочастотного зварювання

Розглянемо проходження струму високої частоти по крайках V-образної виїмки при контактному підведенні струму. Струм від джерела живлення через два контакти підводиться до крайки виїмки. Внаслідок поверхневого ефекту, ефекту близькості і кільцевого ефекту струми протікають по крайках прорізу. Напрямок струмів у крайках протилежний. Найбільша щільність струмів буде в точці зходження крайок, де радіус кривизни близький до нуля і щільності струму великі. При протіканні струму поверхні крайок нагріваються. Найбільша температура буде в точці зходження крайок. Ці явища використовуються при високочастотному зварюванні труб, оболонок кабелів та ін.

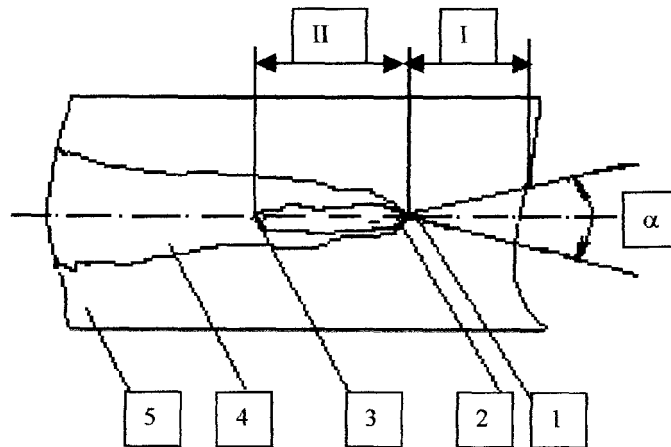


Рис.4.4. Схема ділянки високочастотного зварювання труби.

**I – ділянка нагрівання крайок трубної заготовки; II – ділянка оплавлення;
1 – точка прогріву; 2 – перемичка; 3 – точка з'єднання; 4 – грат; 5 – труба; α – кут зходження крайок трубної заготовки.**

Зварювання при нагріванні струмами високої частоти знайшло широке застосування через економічність. Підвищення надійності зварного з'єднання безпосередньо пов'язано з вдосконаленням технології зварювального процесу прямошовних труб способом високочастотного зварювання на стані. На рис.4.4 схематично представлена область нагрівання й оплавлення крайок трубної заготовки. На ділянці 1 крайки зходяться під кутом α і розігріваються поточним уздовж них струмом. Ділянка 2 характеризується появою за точкою зходження електричних контактів між крайками. Тут струм тече між крайками, розігріваючи і підриваючи перемички рідкого металу.

Першочерговою задачею вдосконалення технології зварювального процесу є визначення зв'язку між вимірюваними технологічними параметрами, такими як кут зходження, довжина зони оплавлення, усадки крайок, тиск зварювальних валків, температура розігріву крайок, підведена потужність, швидкість зварювання, механічні і структурні властивості отриманого шва. Їх одержують у процесі механічних випробувань і металографічного контролю. Це дає можливість вибору критерію для величини будь-якого технологічного параметра (або їхньої сукупності), підтримка якої на визначеному рівні сприяє стабілізації якості зварного шва в заданих межах.

Для розв'язання задачі був зроблений літературний пошук по високочастотному зварюванню за вітчизняними і закордонними виданнями.

На підставі аналізу джерел інформації [9], вивчення процесу високочастотного зварювання зроблені висновки: в даний час відсутні об'єктивні засоби контролю температури нагрівання трубної заготівлі, тому крайки нагріваються до оплавлення. Контроль параметрів режиму зварювання здійснюється за обумовленим візуально ступенем розігріву крайок, іскроутворенню і за характером зовнішнього грата. Реєстрації і контролю повинні бути піддані наступні характеристики процесу зварювання і технологічних параметрів: кут зходження трубної заготівлі; ділянка оплавлення крайок; характер утворення і вибуху перемичок; поводження крайок трубної заготівлі в зоні зварювання; величина струму і напруги заготівки; швидкість руху заготівки; температура трубної заготівки; характер зовнішнього грата.

Зварювання металів при високочастотному нагріванні засноване на швидкому нагріванні до зварювальних температур поверхонь, що підлягають з'єднанню, і швидкому їхньому обтисненню. Оскільки важливо довести до зварювальної температури лише поверхні, які підлягають зварюванню, то застосування струмів високої частоти є дуже ефективним унаслідок їхніх особливих фізичних властивостей.

Струми високої частоти протікають, головним чином, за поверхневими шарами металу. Ряд фізичних явищ, зв'язаних із протіканням струмів високої частоти, дозволяє здійснювати чисто поверхнєве нагрівання при виділенні енергії в дуже тонкому шарі металу, що лежить на поверхнях, які зварюються.

При протіканні постійного струму в плоскій металевій шині прямокутного перетину, розподіл струму за перетином буде рівномірним, тому теплова енергія, що виділяється в шині за законом Джоуля-Ленца, буде рівномірно розподілена за об'ємом шини. Якщо по шині пропустити змінний струм з частотою 440 кГц, то крім ЕРС (електрорушійна сила) джерела живлення в шині буде наводитись ЕРС самоіндукції, що будуть найбільш сильними у внутрішній частині шини. В результаті дії цих електрорушійних сил електричне поле у внутрішніх частинах шини буде ослаблене і струм за перетином шини буде розподілено нерівномірно. Більша частина струму буде протікати у поверхневих шарах шини. Щільність струму буде зменшуватися в міру переміщення за поверхнею шини в її глибину. Явище протікання струму у поверхневих шарах провідника має назву поверхневого ефекту.

Розподіл струму й електричного поля за товщиною шини у випадку, якщо ширина шини багато більше її товщини, визначається співвідношенням

$$E_m = E_{ml} \cdot \sqrt{(ch2z / \Delta + \cos 2z / \Delta) / (ch2a / \Delta + \cos 2a / \Delta)},$$

де E_m – амплітуда напруженості електричного поля на відстані z від середини шини; E_{ml} – амплітуда напруженості електричного поля на поверхні шини; $2a$ – товщина шини.

По мірі збільшення частоти струму глибина проникнення Δ зменшується, відношення $2a/\Delta$ росте і нерівномірність розподілу струму за перетином шини підсилюється. Тоді:

$$E_m = E_{ml} \cdot \exp(-x / \Delta),$$

де $x = a - z$ – відстань від поверхні шини до точки, в якій розглядається напруженість поля. Таким чином, при високих частотах струму можна досягти нагрівання до потрібних температур лише зовнішніх шарів шини, в той час як внутрішні шари залишаються, практично, холодними.

Вектори напруженості електричних і магнітних полів перпендикулярні один одному. Електромагнітне поле поширюється в напрямку, перпендикулярному поверхні труби. При сталих характеристиках середовища амплітуда напруженості електричного поля, (а значить і щільності струму) зменшується в міру проникнення в середовище за законом експоненти. За законом експоненти зменшується і напруженість магнітного поля. При цьому між напругами електричного і магнітного полів у будь-якій точці середовища має місце зрушення за фазою. Магнітне поле запізнюється стосовно електричного на одну восьму частину періоду коливань.

Швидкість протікання електромагнітної енергії з повітря через одиницю поверхні, чи активна потужність, визначається формулою

$$P_a = \left(\frac{H_{ml}}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\gamma \Delta} \right),$$

де H_{ml} – амплітуда напруженості магнітного поля на поверхні середовища. Точно такою ж формулою визначається і реактивна потужність. Струм, що протікає в крайках, нагріває їх. Тепло, що виділилося в поверхневих шарах матеріалу, інтенсивно поширюється всередину через наявність великих температурних градієнтів. Зона зходження крайок періодично зрошується водою зовнішнього охолодження.

Розглянемо наступні моделі температурних полів елементів конструкцій при високочастотному зварюванні. Елементи конструкцій, що зварюються, представлені у вигляді двошарової системи, на стику шарів якої є неідеальний тепловий контакт. Контактний опір зв'язаний зі скривленням ліній струму в значному обсязі металу, що прилягає до зварюваних крайок і змінюється в широких межах.

У міру просування труби і нагрівання крайок що зварюються, приконтатні ділянки труби швидко нагріваються і пластично деформуються, а струм від більш нагрітих ділянок відтискується до менш нагрітих, що при відсутності сильного окислювання сприяє вирівнюванню нагрівання.

У загальному випадку формула для визначення КТО може бути записана

$$R_k = (R_B + R_r) * f_1(\tau) * f_2(T) * f_3(\alpha),$$

де R_B – внутрішній опір контакту; R_r – геометричний опір контакту; $f_1(\tau)$ – функція, що виражає зміну опору за час процесу зварювання; $f_2(T)$ – функція, що визначає зміну опору в залежності від температури; $f_3(\alpha)$ – функція, що виражає зміну опору в залежності від кута сходження крайок труби. Контактний опір R_K при протіканні струму є концентратором нагрівання. При зварюванні опором він істотно більше опору металу труби. Високий опір початкових ділянок контакту при зварюванні обумовлюється плівками окислів і адсорбованого газу на поверхні і скривленням ліній струму.

Контактний опір R_K і зниження напруги в контакті при зварюванні залежить від площі первісних контактів і їхнього розташування на контактній поверхні. Останнє визначається зварювальним тиском у контакті P_K , величиною поверхні зіткнення крайок f_r , величиною нерівностей поверхонь, що зварюються і їхньою пластичністю. Зі збільшенням площі, що зварюється, форма первісних контактів ускладнюється, причому, незважаючи на їхню різну кількість сумарна площа завжди менша площі крайок, що зварюються. Внутрішній опір контакту R_B – складова повного опору контакту, зумовлювана скривленням електричного струму навколо мікроскопічних точок торкання. Він залежить від стану крайок труби (шороховатість, наявність окислів, забруднень і т. ін.), величини тиску в контакті

$$R_B = \frac{r_B}{P_k^{0.7}},$$

де R_B – одиничний внутрішній контактний опір при тиску 9,8 Н; P_K – тиск у крайках, що зварюються, на ділянці довжиною l (довжина ділянки контакту шва труби).

За умови добре захищених поверхонь крайок труби що зварюється, величина одиничного внутрішнього контактного опору складає $(5 - 6) \cdot 10^{-3}$. При наявності на поверхні крайок, що зварюються, іржі чи при забрудненні поверхонь величина одиничного опору може істотно мінятися.

Тиск на крайки, що зварюються, в контакті, тобто на ділянці l , може бути визначений за формулою

$$P_K = P_B f_K,$$

де P_B – питомий тиск у контакті; f – площа контакту, що приблизно дорівнює

$$f_K \approx 0.5 S l_H,$$

де S – відстань між крайками труби.

Геометричний опір контакту R_T – складова повного опору контакту, зумовлювана мікроскопічним скривленням ліній електричного струму навколо загальної площі взаємного зіткнення крайок. Ця складова контакту залежить, головним чином, від форми і розмірів крайок, які зварюються. Площа контакту залежить від опору металу деформації, що при високих температурах крайок приблизно дорівнює межі плинності σ_{3B} при температурі зварювання.

$$\text{Тоді, } f_K = \frac{P_K}{\sigma_{CB}}.$$

Залежність границі плинності при високих температурах може бути виражена

$$\sigma_{CB} = \sigma_{T_0} \left(1 - \frac{T_{CB}}{T_{ПЛ}}\right),$$

де σ_{T_0} – границя плинності при кімнатній температурі; T_{3B} – температура зварювання; $T_{ПЛ}$ – температура плавлення.

Площа ділянки шва труби, що відповідає довжині контакту l , дорівнює

$$f_{CB} = S l_H.$$

Тоді контактний термічний опір має вигляд:

$$R_K = 1.12 * \rho_0 * \left[\sqrt{\frac{2 * \sigma_{T_0} * \left(1 - \frac{T_{CB}}{T_{ПЛ}}\right)}{P_{CB} * S * l_H}} - \frac{1}{\sqrt{S * l_H}} \right],$$

де R_K – контактний термічний опір; σ – границя плинності при кімнатній температурі; $T_{пл}$ – температура плавлення; $T_{зв}$ – температура зварювання; $P_{зв}$ – питомий опір у крайках, що зварюються; S – відстань між крайками труби, що зварюється; l – довжина контакту ділянки шва труби; ρ_0 – питомий електричний опір при 20 °С.

Удосконалення технології процесу високочастотного зварювання труб вимагає: встановлення зв'язку між технологічними параметрами (кутом зходження, довжиною зони оплавлення, температурою розігріву крайок, підведеною потужністю, швидкістю труби); створення системи автоматизованого керування роботою зварювального стану [9; 11; 13 – 15; 51; 52].

Технологічний процес високочастотного зварювання труб полягає в проходженні чотирьох послідовних етапів. Перший – формування трубної заготовки, утворення кута зходження і прогрів у високочастотному індукторі до температури плавлення в точці зходження. Другий – плавлення й осадка крайок трубної заготовки. Він відбувається також в індукторі. Третій – охолодження труби і кристалізація оплавленої частини шва. Четвертий – охолодження труби і зняття внутрішніх термічних напруг шляхом рівномірного охолодження водою.

Усі чотири етапи відбуваються відповідно на послідовних ділянках стану: S_1, S_2, S_3, S_4 за час: $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$. Швидкості руху труби на ділянках V_1, V_2, V_3, V_4 . Завдяки тому, що технологічний процес високочастотного зварювання труб безупинний, швидкості руху труби на кожній з ділянок рівні

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V,$$

де V – швидкість руху труби на стані.

4.3. Математична постановка та розв'язок задач розрахунку температурних полів при високочастотному зварюванні

Ділянка нагрівання трубної заготовки. На ній відбувається процес формування трубної заготовки, утворення кута зходження і прогріву у високочастотному індукторі до температури плавлення крайок у тоці зходження.

Якщо трубку заготовку розрізати за лінією, діаметрально протилежною шву, що зварюється, одержимо систему двох необмежених пластин із щілиною V-образної форми. Таким чином, маємо двошарову систему пластин з неідеальним тепловим контактом. Термічний контактний опір обумовлений скривленням ліній струму в значному об'ємі металу, що прилягає до зварюваних крайок

і змінюється в широких межах. У міру просування труби і нагрівання крайок приконтантні ділянки труби швидко нагріваються і пластично деформуються, а струм від більш нагрітих ділянок відтискується до менш нагрітих, що при відсутності сильного окислювання сприяє вирівнюванню нагріву.

Контактний опір R_k при протіканні через нього струму є концентратором нагріву. При високочастотному зварюванні контактний опір істотно більший опору металу труби. Високий опір початкових ділянок контакту при зварюванні обумовлюється плівками окислів і адсорбованого газу на поверхні і скривленням ліній струму.

Вплив високочастотного електромагнітного поля на трубну заготовку можна виразити через інтенсивність миттєвих джерел тепла, рівну при нагріванні тіла струмом $F(x, \tau)$.

Математичне формулювання задачі нестационарної теплопровідності має вигляд

$$\frac{\partial T_v(x, \tau)}{\partial \tau} = a_v \frac{\partial^2 T_v(x, \tau)}{\partial x^2} + F_v(x, \tau), \quad (4.1)$$

$$T_v(x, 0) = \varphi_v(x), \quad v = 1, 2, \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial T_v(x, \tau)}{\partial x^2} \right|_{x=0_1}^{x=L_2} = 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = \frac{1}{R_{1,2}} [T_2(0, \tau) - T_1(L_1, \tau)] \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=L_1} - \lambda_2 \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0_2} = \omega \end{cases}, \quad (4.4)$$

де T_v – температура; x_v – координата; τ – час; a_v – коефіцієнт температуропровідності; $F_v(x, \tau)$ – потужність внутрішніх джерел тепла (джоулеве тепловиділення):

$$F_v(x, \tau) = I_v^2 \rho_v \left(\frac{1}{V_v X_v} \right), \quad (4.5)$$

I_v – струм; ρ_v – питомий електричний опір; V_v – обсяг погонного метра трубної заготовки; λ_v – коефіцієнт теплопровідності матеріалу; $R_{1,2}$ – контактний термічний опір на стику шарів [15]; ω – інтенсивність джерел тепла на ширині шару, рівній глибині проникнення

$$\omega = \frac{I^2 \rho_v}{S},$$

S – площа поперечного перерізу трубної заготовки; $\varphi_v(x)$ – деякі функції, що характеризують нерівномірний розподіл температури в початковий момент часу.

Ділянка оплавлення крайок трубної заготовки. За рахунок високочастотного нагрівання тут відбувається оплавлення крайок трубної заготовки, подальше обтиснення, з'єднання крайок і утворення труби. Розрізавши трубу по лінії, діаметрально протилежній зварному шву і по самому шву, одержимо систему двох необмежених пластин з фазовими перетвореннями по лінії шва.

Таким чином, маємо дві задачі для системи двох окремих пластин з фазовими перетвореннями на границі.

Математичне формулювання задачі нестационарної теплопровідності має вигляд

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F, \quad (4.6)$$

$$T(x,0) = \varphi(x), \quad \varphi(x) = T_1(x, \Delta\tau_{\text{ПРОГР}}), \quad (4.7)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (4.8)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\omega} = \rho L \frac{d\omega}{d\tau}, \quad (4.9)$$

де $T_1(x, \Delta\tau_{\text{ПРОГР}})$ – розподіл температури за перетином половини труби в кінцевий момент часу після проходження ділянки прогріву; F – потужність внутрішніх джерел тепла (джоулеве тепловиділення і випромінювання з поверхні)

$$F = I^2 \rho \left(\frac{1}{V_v x} \right) - \varepsilon \sigma V_v x [T_w^4 - T_c^4], \quad (4.10)$$

ε – ступінь чорності; σ – постійна Стефана-Больцмана; T_c – температура навколишнього середовища; T_w – температура поверхні.

При $\tau = \tau_0$, $\omega = \omega_0$, $T = T_{\text{ПЛ}}$, де $T_{\text{ПЛ}}$ – рівноважна температура фазового переходу (плавлення); L – теплота фазового переходу; $\omega_1 = k_1 \sqrt{\tau}$ – товщина оплавленої частини заготовки; k_1 – емпіричний коефіцієнт.

Ділянка остигання (кристалізації) зварного шва. Тут труба виходить з індуктора, відбувається остигання (кристалізація) зварного шва.

Розрізавши трубу по лінії, діаметрально протилежній зварному шву і за самим швом, одержимо систему двох необмежених пластин з фазовими пере-

твореннями за його лінією. Таким чином, маємо дві задачі для системи двох окремих пластин з фазовими перетвореннями на границі.

Математичне формулювання задачі має вид (4.6) – (4.10). Відмінність полягає в наступному. Потужність внутрішніх джерел тепла F у (4.10) має вигляд

$$F = -\varepsilon \sigma V_X [T_W^4 - T_C^4].$$

У (4.7) функція $\varphi(x) = T_2(x, \Delta\tau_{ПЛАВ})$, а умова на границі

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\omega_2} = \rho_2 L_2 \frac{d\omega_2}{d\tau}, \quad (4.11)$$

де $T_2(x, \Delta\tau_{ПЛАВ})$ – розподіл температури на перетині половини труби в кінцевий момент часу при проходженні ділянки оплавлення крайок, L_2 – теплота кристалізації.

Ділянка охолодження зварного шва і труби. Труба що рухається, і зварний шов охолоджуються водою для зняття термоупругих напруг. Розрізавши трубу за лінією, діаметрально протилежною зварному шву, одержимо систему двох необмежених пластин з конвективним охолодженням за площиною.

Математична постановка задачі має вигляд

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F(x, \tau), \quad (4.12)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad \varphi(x) = T_3(x, \Delta\tau_{KP}) \quad (4.13)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.14)$$

$$F(x, \tau) = \frac{\alpha P}{\lambda A} [T(x, \tau) - T_C], \quad (4.15)$$

α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні труби; P , A – периметр і площа поверхні погонного метра труби; $T_3(x, \Delta\tau_{KP})$ – розподіл температури на перетині половини труби в кінцевий момент часу при проходженні ділянки охолодження (кристалізації).

Розв'язання нелінійних задач нестационарної теплопровідності, сформульованих для ділянок 1 – 4, можливе в даний час тільки чисельними методами [9; 11].

Алгоритм розв'язання задачі. Рівняння теплопровідності загального виду, що описує розподіл температурного поля всередині шарів, записується у формі

$$\frac{\partial(b_m^* T)}{\partial \tau} = c_m^* \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(d_m^* \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \omega_m^*, \quad m=1,2,\dots,M. \quad (4.16)$$

У випадку змінних теплофізичних характеристик матеріалів шарів значення коефіцієнтів b_m^*, c_m^*, d_m^* визначаються системою рівностей:

$$b_m^* = \rho_m c_m; \quad c_m^* = \frac{V}{r} \lambda_m; \quad d_m^* = \lambda_m, \quad (4.17)$$

де ρ_m, c_m, λ_m – значення щільності, теплоємності, коефіцієнта теплопровідності для m -го шару, V – індекс системи координат ($V=1$ для плоскої системи).

Для постійних теплофізичних характеристик будемо мати

$$b_m^* = 1; \quad c_m^* = \frac{a_m \lambda}{r}; \quad d_m^* = a_m, \quad (4.18)$$

де a_m – значення коефіцієнта температуропровідності для m -го шару.

Загальний вид умов на стиках з урахуванням контактних термічних опорів і фізико-хімічних перетворень, що супроводжуються виділенням (поглинанням) теплоти:

$$T_m^+ - T_m^- = a_m \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \right)^+; \quad \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \right)^+ - \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \right)^- = \omega_m, \quad (4.19)$$

де a_m – значення коефіцієнта контактного термічного опору для m -го стику;

ω_m – значення потужності джерела тепла на m -му стику.

Запишемо систему (4.16) в кінцево-різницевого виді. Введемо на відрізках $[r_m, r_{m+1}]$, $m=1,2,\dots,M$ осі r різницеву сітку з відстанню Δr_m між вузлами. Нехай i_{lm} – кількість вузлів різницевої сітки на шарі m . Тоді, враховуючи, що δ_m – товщина m -го шару будемо мати:

$$\Delta r_m = \frac{\delta_m}{i_{lm} - 1}, \quad m = 1,2,\dots,M. \quad (4.20)$$

Друга похідна по координаті апроксимується з другим порядком точності

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} d^* \frac{\partial T}{\partial r} \right)_i = \left(d_{i+1/2}^* \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} - d_{i-1/2}^* \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r} \right) / \Delta r, \quad d_{i\pm 1/2}^* = (d_{i\pm 1} + d_i) / 2. \quad (4.21)$$

Перша похідна за координатою апроксимується центральними різницями

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_i = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta r}, \quad (4.22)$$

похідна за часом з першим порядком точності щодо кроку за часом:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta \tau}. \quad (4.23)$$

Тоді (4.28) переписеться у формі

$$\begin{aligned} \frac{b_i^{*n+1}T_i^{n+1} - b_i^{*n}T_i^n}{\Delta \tau} &= c_i^{*n+1} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_k} + \\ &+ \frac{d_{i+1/2}^{*n+1}T_{i+1}^{n+1} - \left(d_{i+1/2}^{*n+1} + d_{i-1/2}^{*n+1}\right)T_i^{n+1} + d_{i-1/2}^{*n+1}T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta r)^2} + \omega_k. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Привівши подібні, будемо мати

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta \tau c_i^{*n+1}}{2\Delta r_k} + \frac{\Delta \tau d_{i+1/2}^{*n+1}}{(\Delta r_k)^2}\right)T_i^{n+1} + \left(-b_i^{*n+1} - \frac{\left(d_{i+1/2}^{*n+1} + d_{i-1/2}^{*n+1}\right)}{(\Delta r_k)^2}\right)T_i^{n+1} + \\ + \left(-\frac{\Delta \tau c_i^{*n+1}}{2\Delta r_k} + \frac{\Delta \tau d_{i-1/2}^{*n+1}}{(\Delta r_k)^2}\right)T_{i-1}^{n+1} = -b_i^{*n}T_i^n - \omega_k \Delta \tau. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Тобто, одержимо рівняння в трьохточечній формі

$$A_i T_{i+1} + B_i T_i + C_i T_{i-1} = D_i. \quad (4.26)$$

Тут і далі значення верхнього індексу (n+1)ʹ яке вказує, що значення параметрів береться в даний момент часу опущено.

Значення коефіцієнтів трьохдіагональної матриці визначається системою рівностей:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\Delta \tau c_i^*}{2(\Delta r_k)} + \frac{\Delta \tau (d_{i+1}^* - d_i^*)}{2(\Delta r_k)^2}; \quad B_i = -\left(b_i^* + \Delta \tau \frac{d_{i+1}^* + 2d_i^* + d_{i+1}^*}{2(\Delta r_k)^2}\right); \\ C_i &= -\frac{\Delta \tau c_i^*}{2\Delta r_k} + \frac{\Delta \tau (d_i^* + d_{i-1}^*)}{2(\Delta r_k)^2}; \quad D_i = -(b_i^{*n}T_i^n + \omega_k \Delta \tau). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Увівши систему позначень:

$$P_i = \frac{\Delta \tau d_i^*}{(\Delta r_k)^2}; \quad q_i = \frac{v(\Delta r_k)}{2r_i} \quad (4.28)$$

з урахуванням

$$P_i q_i = \frac{\Delta \tau d_i^*}{(\Delta r_k)^2} \cdot \frac{v(\Delta r_k)}{2r_k} = \frac{\Delta \tau v d_i^*}{2r_i(\Delta r_k)}; \quad \frac{\Delta \tau c_i^*}{2(\Delta r_k)} = \frac{\Delta \tau v d_i^*}{2r_i(\Delta r_k)} \quad (4.29)$$

перепишемо вирази для коефіцієнтів (4.27) у вигляді

$$A_i = P_i q_i + \frac{P_{i+1} + P_i}{2}; \quad B_i = -\left(b_i^* + \frac{P_{i+1} + 2P_i + P_{i-1}}{2}\right);$$

$$C_i = -P_i q_i + \frac{P_i + P_{i-1}}{2}; \quad D_i = -(b_i^{*n} T_i^n + \omega_k \Delta \tau). \quad (4.30)$$

Для випадку постійних теплофізичних характеристик рівності (4.30) перепишуться у формі

$$A_i = P(1 + q_i); \quad B_i = -(1 + 2P); \quad C_i = P(1 - q_i); \quad D_i = -(T_i^n + \omega_k \Delta \tau), \quad (4.31)$$

де $P = P_{i-1} = P_{i+1}$.

Надалі не змінюючи символіки позначень варто мати на увазі, що

$$T_{ym}^+ - T_{ym}^- = a_m \lambda_{ym}^+ T_{ym+1} - T_{ym}^+,$$

але

$$\lambda_{ym}^+ \frac{T_{ym+1} - T_{ym}^-}{\Delta r_m^+} - \lambda_{ym}^- \frac{T_{ym}^- - T_{ym-1}}{\Delta r_m^-} = \omega_m \quad (4.32)$$

міра розрахункових вузлів y_{m+n} і y_m збігається, а вузол різницевої сітки y_m^- – деякий фіктивний вузол, уведений для індексації значення температури на нижній границі m -го стику.

З (4.32) випливає, що

$$T_{ym}^- = T_{ym}^+ \left(1 + \frac{a_m \lambda_{ym}^+}{\Delta r_m^-}\right) - \frac{a_m \lambda_{ym}^+}{\Delta r_m^-} T_{ym+1}, \quad m = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (4.33)$$

Підставляючи (4.33) у другу рівність (4.32) будемо мати

$$A_{ym} T_{ym+1} + B_{ym} T_{ym} + C_{ym} T_{ym-1} = D_{ym}, \quad (4.34)$$

де

$$A_{ym} = \frac{\lambda_{ym}^+ \Delta r_m^-}{\Delta r_m^+} + \frac{\lambda_{ym}^- \lambda_{ym}^+ a_m}{\Delta r_m^+};$$

$$\begin{aligned}
B_{ym} &= - \left[\frac{\lambda_{ym}^+ \Delta r_m^-}{\Delta r_m^+} + \lambda_{ym}^- \left(1 + \frac{a_m \lambda_{ym}^+}{\Delta r_m^+} \right) \right]; \\
C_{ym} &= \lambda_{ym}^-; \\
D_{ym} &= \omega_m \Delta r_m^-.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

З урахуванням позначень

$$\begin{aligned}
P_m &= \lambda_{ym}^+ \Delta r_m^- / \Delta r_m^+; \\
q_m &= \lambda_{ym}^- \lambda_{ym}^+ a_m / \Delta r_m^+, m = 1, 2, \dots, M
\end{aligned} \tag{4.36}$$

перепишемо (4.35) у формі

$$A_{ym} = P_m + q_m; B_{ym} = -(P_m + \lambda_{ym}^- + q_m); C_{ym} = \lambda_{ym}^-; D_{ym} = \omega_m \Delta r_m^-, m = 1, 2, \dots, M. \tag{4.37}$$

Так, одне з умов на стику записується у формі системи алгебраїчних рівнянь із тріохдіагональною матрицею і використовується незалежно від іншого для визначення значень поля температур на верхній границі стиків, що цілком вписується в алгоритм розв'язку задачі.

Для визначення значень температури на нижній границі стику використовується рівність (4.33).

Граничні умови записуються у формі:

$$b_1 T + b_2 \frac{\partial T}{\partial r} = b_3, r = \delta_0; b_4 T + b_5 \frac{\partial T}{\partial r} = b_6, r = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_M, \tag{4.38}$$

де δ_0 – початок відліку; $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M$ – значення товщин шарів.

У випадку теплоізованих поверхонь:

$$b_1 = 0; b_2 = 1; b_3 = 0; b_4 = 0; b_5 = 1; b_6 = 0. \tag{4.39}$$

Отже інтегрування вихідної системи рівнянь у частинних похідних (4.16) з умовою сполучення на стику (4.19) зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь із тріохдіагональною матрицею, зручним методом рішення якої є метод прогонки. Таким чином, обчислення значення температури у вузлі одноманітно, не залежить від його належності до внутрішніх, граничних вузлів або до стику.

В момент часу $\Delta \tau$ за потужністю джерел тепла і коефіцієнта термічного опору на стику для перетину Δz обчислюються значення температурного поля в системі за допомогою методу прогонки. Перебираються всі перетини за довжи-

ною і визначаються значення температурного поля в системі в даний момент часу. Перейшовши на новий часовий шар і використовуючи як початкову температуру знайдене, визначимо розподіл температури системи в будь-який момент часу.

Розроблені математичні моделі і сформульовані на їхній основі задачі розрахунку температурних полів трубних заготовок при високочастотному зварюванні, що враховують у взаємозв'язку протікання процесів деформації, переносу тепла й електромагнітних явищ вирішені з використанням аналітичних і чисельних методів. Рішення реалізовані у виді програм для ПЕОМ. Вірогідність отриманих рішень підтверджується порівнянням з рішенням відомих у науковій літературі задач.

Для уточнення розроблених математичних моделей і отриманих рішень необхідне порівняння з даними експериментальних досліджень температурних полів трубних заготовок у реальних умовах діючого стану високочастотного зварювання труб.

4.4. Аналіз теплообміну при високочастотному зварюванні і чисельні параметричні дослідження

Потужність, необхідна для високочастотного зварювання труби. Визначимо потужність, необхідну для нагрівання поверхні крайок до зварювальної температури $T_{зв}$, з урахуванням тепловідводу в тіло труби при заданих параметрах процесу: швидкості зварювання, фізичних властивостях і товщині металу, відстані від контактів до точки сходження крайок, частоти зварювального струму. Для цього вивчимо процес нагрівання точок матеріалу, що розташовуються на підлягаючих зварюванню поверхнях крайок. Систему координат зв'яжемо з виробом, тобто розглянемо нестационарний процес нагрівання в рухомих координатах.

У момент часу $\tau=0$ точка, прийнята за початок координат, знаходиться під струмопідводячим пристроєм, що рівноцінно початку нагрівання. Відстань від контактів до точки сходження крайок досліджувана точка проходить за час

$$\tau = \frac{L}{V_{зв}},$$

де τ – час розігріву, L – відстань від контактів до точки сходження крайок, $V_{зв}$ – швидкість зварювання.

Задача зводиться до того, щоб знайти поверхневу щільність струму I_0 при якій температура поверхні крайки за час τ досягає значення T_{3B} . Скористаємося диференціальним рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial T(x, \tau)}{a \partial x^2} = F(x, \tau), \quad (4.40)$$

де $F(x, \tau)$ виражає інтенсивність і розподіл миттєвих джерел тепла, рівну при нагріванні тіла струмом

$$F(x, \tau) = \frac{I^2 \rho}{c \gamma}, \quad (4.41)$$

де T – температура; x – координата; a – коефіцієнт температуропровідності; c – теплоємність; ρ – щільність матеріалу труби; γ – питома електропровідність.

Враховуючи залежність I від координати x , одержимо

$$F(x) = \left(\frac{I_0^2 \rho}{c \gamma} \right) e^{-2x/\Delta}, \quad 0 < x < \infty, \quad (4.42)$$

де $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\varpi \mu \gamma}}$ – параметр, що має розмірність довжини і носить назву глибини проникнення струму; $\varpi = 2\pi f$, f – частота струму; μ – магнітна проникність матеріалу шини.

Функція $T(x, \tau)$, що є рішенням рівняння (4.40), повинна задовольняти наступним початковим і граничним умовам задачі

$$T(x, \tau)|_{\tau=0} = T_0(x), \quad (4.43)$$

де T_0 – температура навколишнього середовища;

$$\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (4.44)$$

тобто тепловідвід з поверхні відсутній;

$$T(x, \tau)|_{x=R} = f(\tau), \quad (4.45)$$

де $f(\tau)$ – функція температури.

Для розв'язання задачі (4.40) – (4.45) скористаємось операційним методом, заснованим на інтегральному перетворенні Лапласа за змінною τ [9]. Тоді розв'язок задачі (4.40) – (4.45) має вигляд

$$T(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(\mu_n(x), \varphi_n) f^{(n)}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{f(p_k)}}{\psi'(p_k)} Q(x, p_k) \text{Exp}(p_k, \tau) + Z(x, \tau), \quad (4.46)$$

де

$$\Omega_0 = \frac{\mu_0(x)}{\varphi_0}, \quad \Omega_n = \frac{\mu_n(x)}{\varphi_0} - \sum_{j=1}^n \Omega_{n-j} \frac{\varphi_j}{\varphi_0},$$

$$\mu_n(x) = \frac{(x^2/a)^n}{(2n)!}, \quad \varphi_n = \frac{(R^2/a)^n}{(2n)!}, \quad (4.47)$$

$$P_k = \frac{-\gamma_k^2 a}{R^2}, \quad \gamma_k = \frac{\pi}{2} * (2k-1),$$

$$Q(x, p_k) = \text{Cos}\left(\gamma_k \frac{x}{R}\right), \quad \psi(\varphi_n, p_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P_k^n, \quad (4.48)$$

$$Z(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n * \tau^n}{(2n)!} * \left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} * T_0(x) + \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} * F(x) \right].$$

Тому що $F(x)$ має вид (4.42), а $T_0(x)=0$,

де

$$Z(x, \tau) = \frac{I_0^2 \rho}{c\gamma} e^{-2x/\Delta} \text{Ch}\left(\frac{2}{\Delta\sqrt{a\tau}}\right). \quad (4.49)$$

Отримана функція $T(x, \tau)$ дає розподіл температур крайки труби, що зварюється в залежності від координати точки, часу нагрівання, величини струму та інших характеристик електромагнітного поля.

Температуру поверхні крайки знаходимо із значення функції $T(x, \tau)$ при $x=0$. Аргумент гіперболічної функції у формулі (4.49) $y = \frac{2}{\Delta\sqrt{a\tau}}$ – безрозмірна величина.

$$T_{3B} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(\mu_n, \varphi_n) \big|_{x=0} f^{(n)}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{f(p_k)}}{\psi'(p_k)} Q_k(\mu_n, P_k) \text{Exp}(P_k, \tau) +$$

$$+ \left(\frac{I_0 \rho}{c\gamma} \right) e^{-2x/\Delta} \text{Ch}\left(\frac{2}{\Delta\sqrt{a\tau}}\right). \quad (4.50)$$

Таким чином, щільність зварювального струму може бути знайдена за формулою

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{T(\tau)c\gamma}{\rho Ch\left(\frac{2}{\Delta\sqrt{a\tau}}\right)} \right) e^{\frac{2x}{\Delta}}} = \sqrt{\left(\frac{\bar{T}(\tau)V_{CB}c\gamma\tau}{\rho * l * Ch\left(\frac{2}{\Delta\sqrt{a\tau}}\right)} \right) e^{\frac{2x}{\Delta}}}, \quad (4.51)$$

де

$$\bar{T}(\tau) = T_{CB}(\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(\mu_n, \varphi_n) \Big|_{x=0} f^{(n)}(\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}(P_k)}{\psi'(\varphi_n, P_k)} Q_k(\varphi_n, P_k) \text{Exp}(P_k, \tau).$$

Тоді потужність, необхідна для нагрівання поверхні крайок до зварювальної температури, визначається за формулою

$$P = I_0^2 \rho \Delta l = \frac{\bar{T}(\tau)c\gamma}{\rho * Ch\left(\frac{2}{\Delta\sqrt{a\tau}}\right)} e^{\frac{2x}{\Delta}}. \quad (4.52)$$

Тут розглянут випадок, коли температура поверхні крайок T_{3B} буде досягнута в точці сходження крайок. Однак при зварюванні потрібна температура T_{3B} на деякій відстані до точки сходження, що визначається практично при розробці технології зварювання. Тоді визначається нагрівання на ділянці l_1 , що складає якусь частину всієї зони нагрівання l , а розрахунок потужності ведеться по всій довжині l .

Як приклад, розглянемо випадок зварювання труб з нержавіючої сталі 1X18H9T з товщиною стінки $\delta=2$ мм, струмом частотою 70 і 440 кГц.

Задамося наступними параметрами процесу і властивостями матеріалу: $V_{3B}=30$ м/хв; довжина ділянки нагрівання $l=60$ мм; відстань від точки початку оплавлення до точки сходження крайок $l-l_1=8$ мм, звідки $l_1=52$ мм. Відстань до сердечника $\delta_1=2$ мм. Ефективна глибина проникнення $\Delta(70 \text{ кГц})=2$ мм, $\Delta(440 \text{ кГц})=0.8$ мм при 800°C . Звідси $\Delta_1(70)=4$ і $\Delta_1(440)=1.6$, об'ємна теплоємність $c\gamma=4.78 \cdot 10^6$ Дж/м³ К.

Необхідна для зварювання потужність: при 70 кГц – $P=50,724$ кВт; при 440 кГц – $P=27,0$ кВт.

Таким чином, при підвищенні частоти зварювального струму необхідна потужність зменшується не пропорційно $\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}=2,5$, а всього в 1,8 рази через неоднаковий відвід тепла в тіло крайок.

Параметричні дослідження температурних полів. Для розрахунку температурних полів при високочастотному зварюванні труб використовувалися вихідні дані, характерні для труб середнього діаметра Новомосковського трубного заводу [24]. Матеріал труби – сталь, товщина трубної заготовки – $\delta = 6$ мм, коефіцієнт температуропровідності – $a = 6 \cdot 10^{-6}$ м²/с, коефіцієнт теплопровідності – $\lambda = 28,7$ Вт/мК, ступінь чорності – $\varepsilon = 0,8$, об'ємна теплоємність – $c_v = 4,78 \cdot 10^6$ Дж/м³К, температура плавлення $T_{пл} = 1490$ °С, температура зникнення твердої фази – $T_{ис} = 1440$ °С.

Механічні характеристики: границя текучості $\sigma_T = 3000$ кг/м², модуль пружності $E = 2 \cdot 10^6$ кг/м². Питомий електричний опір $\rho = 0,18 \cdot 10^{-6}$ Ом·м, величина струму $I = 1300$ А.

Результати розрахунку температурних полів трубної заготовки на ділянках 1– 4 представлені в таблиці 4.1 і на рис. 4.5 – 4.8.

Таблиця 4.1

Температурне поле труби

Відстань від крайки труби	Температура на ділянках технологічного процесу			
	1	2	3	4
1	1450	1500	1280	92
1-Δ	120	125	220	75
1-2Δ	81	83	87	53

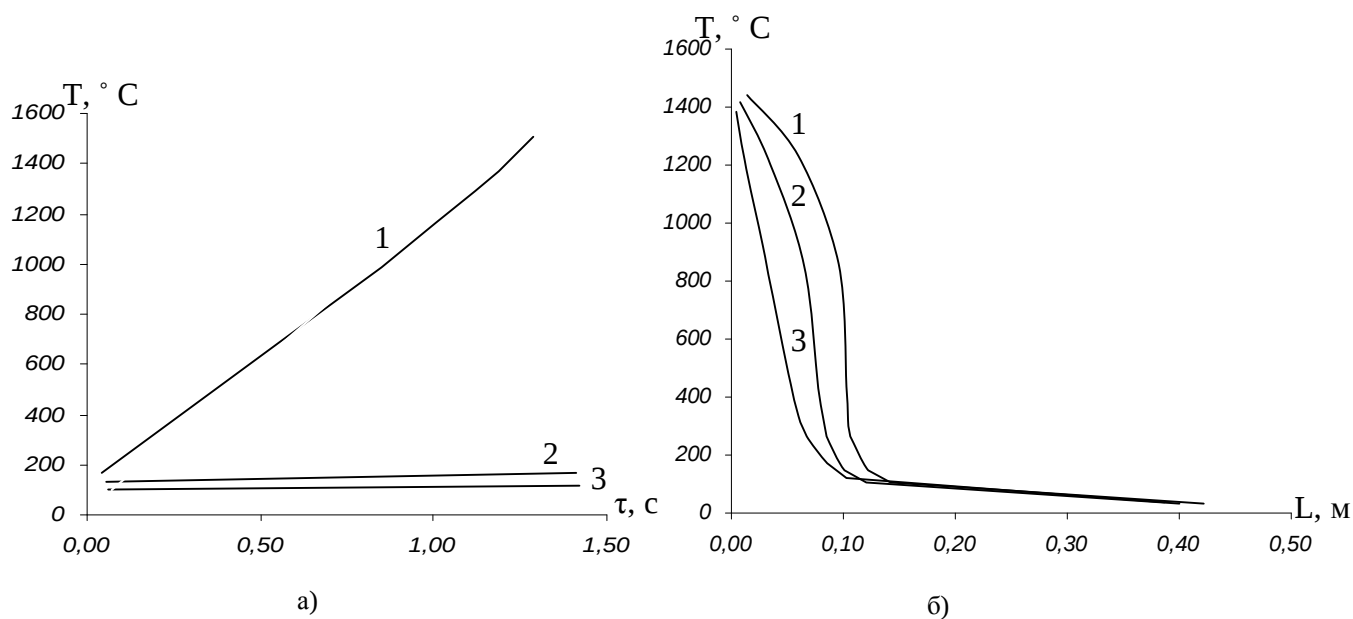


Рис. 4.5. Температурне поле труби на ділянці нагрівання

На рис.4.5а показана зміна температури трубної заготовки в точках: $x=1$ – крива 1, $x=1-\Delta$ – крива 2, $x=1-2\Delta$ – крива 3, де Δ – крок за координатою. Тривалість нагрівання трубної заготовки до температури плавлення крайки труби $\Delta\tau_1 = 1,2$ с. На рис.4.5б показана зміна температури трубної заготовки за координатою в момент часу $\tau = 0,6$ с. Аналіз результатів показує, що при високочастотному нагріванні, в основному, нагрівається поверхневий шар крайки труби.

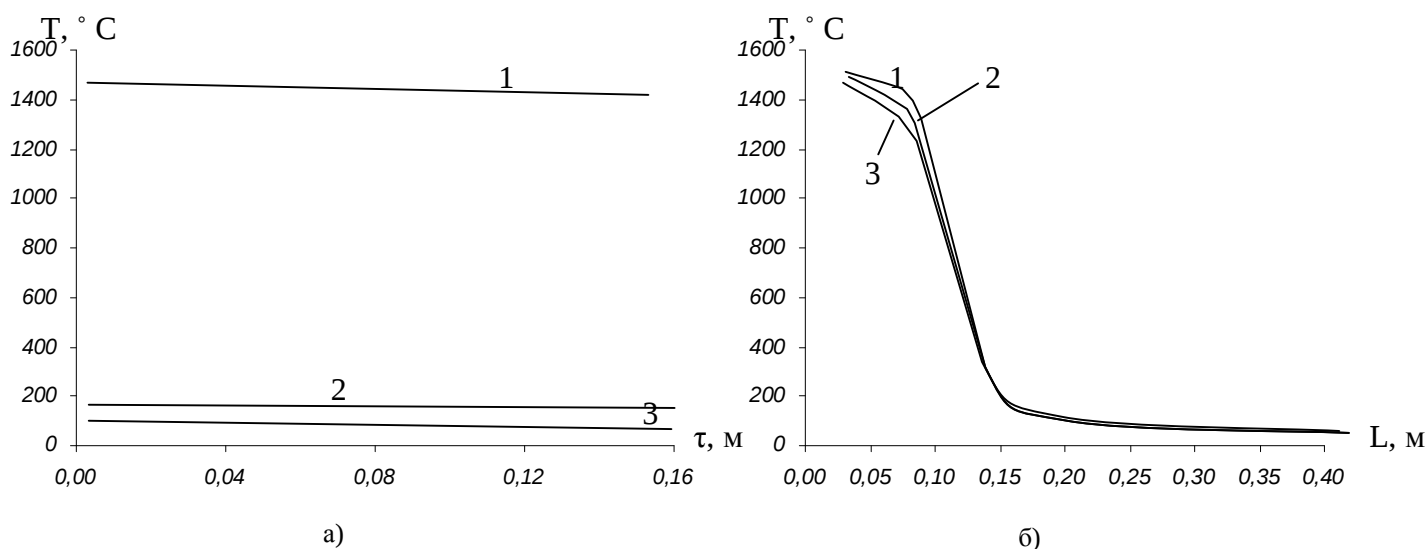


Рис. 4. 6. Температурне поле труби на ділянці оплавлення

На рис.4.6а і 4.6б показана зміна температури трубної заготовки на ділянці оплавлення. Криві 1–3 на рис.4.6а і 4.6б відповідають кривим на рис.4.5а і 4.5б. Тривалість оплавлення крайки труби $\Delta\tau_2 = 0,15$ с. (рис.4.6а). У момент часу $\tau = 0,075$ с. зміни температури по координаті практично не відбувається. Використовуючи дані експериментальних досліджень по визначенню довжини зони оплавлення $l_{3.оп}$ [17], одержимо швидкість труби на ділянці оплавлення $v_2 = l_{3.оп} / \Delta\tau_2$. При $l_{3.оп} = 0,113$ м $v_2 = 0,75$ м/с.

Знаючи довжину зони оплавлення і довжину індуктора, визначимо довжину зони прогріву $l_{пр}$ і швидкість трубної заготовки на I-тій ділянці $l_{пр} = l_{інд} - l_{3.оп}$, $v_1 = l_{пр} / \Delta\tau_1$. При $l_{інд} = 0,96$ м, $l_{пр} = 0,85$ м, $v_1 = 0,7$ м/с.

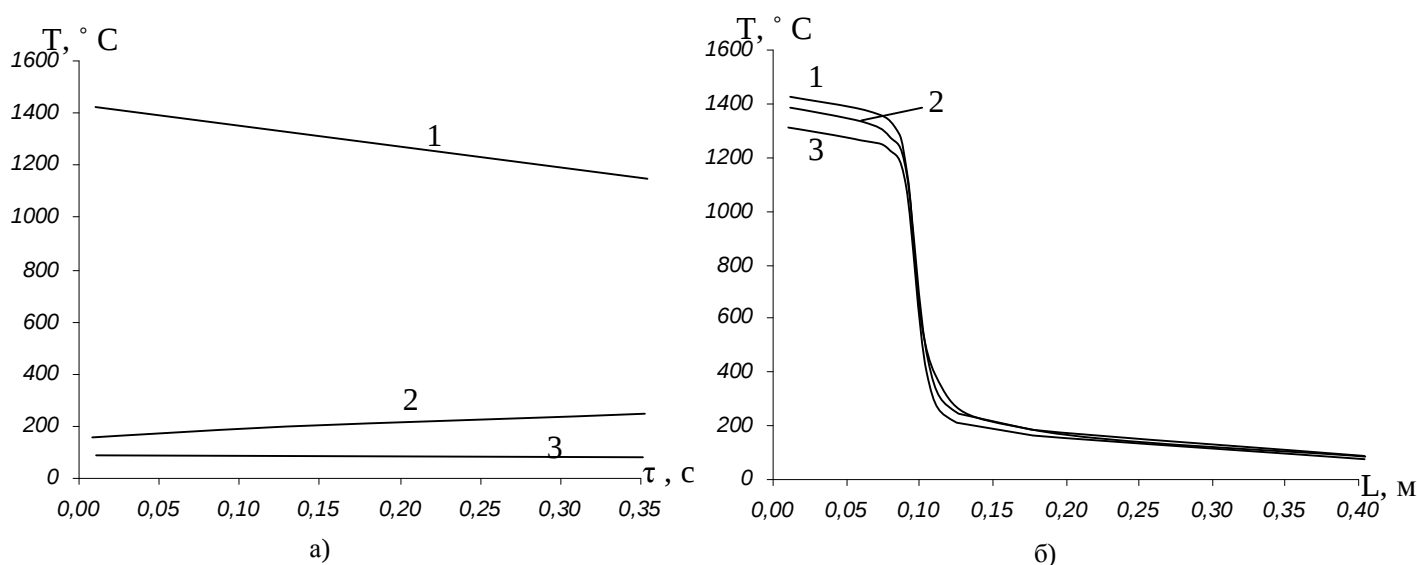


Рис. 4.7. Температурне поле труби на ділянці кристалізації

На рис.4.7а показана зміна температури трубної заготовки на ділянці кристалізації звареного шва. Криві 1–3 на рис 4.7а і 4.7б відповідають кривим на рис 4.5а і 4.5б. На рис 4.7б показана зміна температури трубної заготовки за координатою в момент часу $\tau=0,15$ с.

Тривалість процесу кристалізації $\Delta\tau_3 = 0,30$ с. (рис 4.7а). Зміни температури за координатою практично не відбувається. Враховуючи, що довжина ділянки до початку водного охолодження $l_{кр} = 0,22$ м, швидкість труби на третій ділянці

$$V_3 = \frac{l_{кр}}{\Delta\tau_3} = \frac{0,22}{0,30} = 0,73 \text{ м/с.}$$

На рис.4.8б показана зміна температури трубної заготівлі на ділянці охолодження зварного шва і труби. Криві 1 – 3 на рис.4.8а і 4.8б відповідають кривим на рис.4.5а і 4.5б. На рис. 4.7б показана зміна температури трубної заготовки за координатою в момент часу $\tau = 0,18$ с. Тривалість процесу охолодження $\Delta\tau_4 = 0,36$ с (рис.4.8а). На ділянці спостерігається істотна зміна температури за координатою.

Тоді як довжина зони охолодження $l_{з.ох.} = 0,285$ м, то швидкість труби на четвертій ділянці

$$V_3 = \frac{l_{з.ох.}}{\Delta\tau_4} = \frac{0,285}{0,36} = 0,76 \text{ м/с.}$$

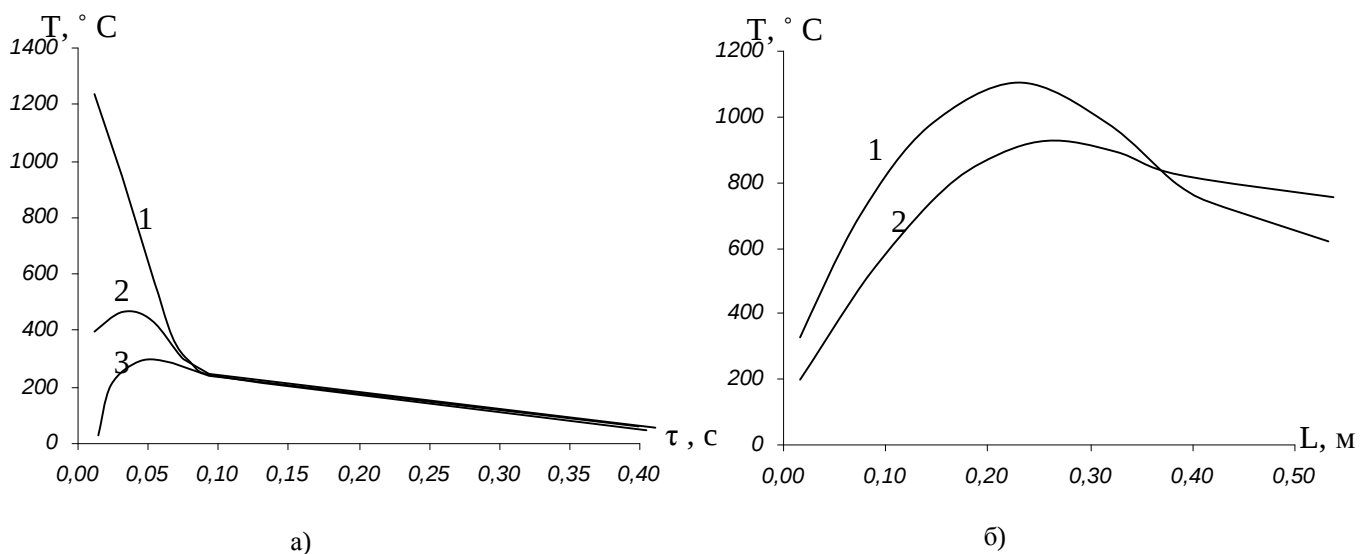


Рис 4.8. Температурне поле труби на ділянці охолодження

Таким чином, отримані значення швидкості зварювання для кожної ділянки технологічного процесу зварювання. Всі чотири значення близькі до оптимального значення швидкості труби $v = 0,75$ м/с, що отримане експериментальним шляхом [9; 24]. У результаті аналізу експериментальних даних і результатів чисельних параметричних досліджень встановлено зв'язок між температурними полями і швидкістю труби при високочастотному зварюванні.

РОЗДІЛ 5

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І РОЗРАХУНОК ПРОГРІВУ ТА ВІДНОВЛЕННЯ ЗАЛІЗОРУДНИХ МАТЕРІАЛІВ У ДОМЕННІЙ ПЕЧІ

5.1. Основи технології доменного виробництва

У земній корі залізо зустрічається тільки у вигляді різних з'єднань з киснем, кремнієм, сіркою та ін. Найважливішими залізними рудами, з яких воно виплавляється, є магнітний залізняк (Fe_3O_4), червоний залізняк (Fe_2O_3) і бурий залізняк ($2\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$).

Одержання заліза засноване на відновленні оксидів заліза вуглецем. Але тому що розплавлене залізо розчиняє вуглець, то при виплавці виходить не чисте залізо, а сплав, що містить до 5% вуглецю, який називають чавуном.

Виплавляється чавун у доменних печах (домнах) рис. 5.1. Нижня частина 1 домни називається горном. Вище розташована конічна частина печі – запічки 2. Ще вище знаходиться сама широка циліндрична область домни – розпар 3 і, нарешті, конічна шахта 4. Нагорі шахти є отвір – ко-

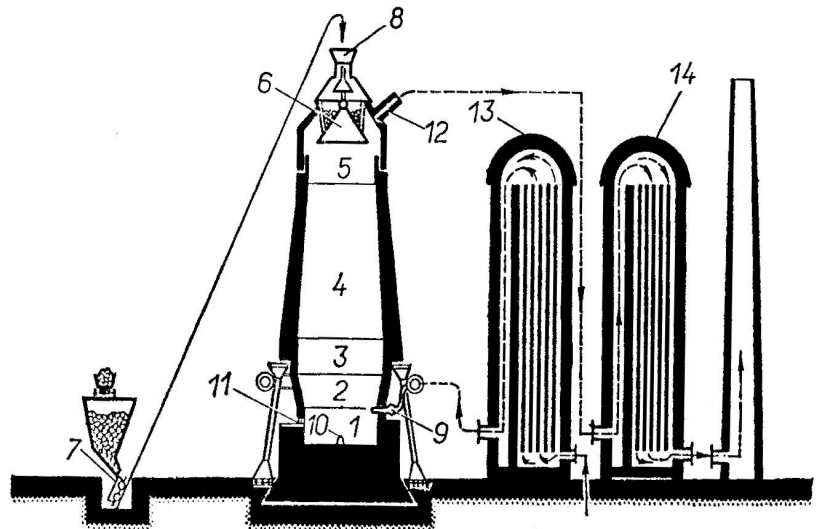


Рис.5.1. Схема доменної печі

лошник 5, який закривається металевим конусом - колошниковим затвором 6.

Домну завантажують пошарово шихтою, що складається з руди, коксу і флюсів (вапняку і деяких інших речовин). Кокс одержують в особливих коксових печах шляхом нагрівання кам'яного вугілля без доступу повітря. Всі матеріали піднімають скіпом 7 на верхню площадку домни і звалюють у чавунну лійку 5. При опусканні затвора 6 суміш попадає в домну.

Необхідне для горіння коксу повітря нагнітають у трубу, що оперізує нижню частину печі, а потім по вигнутих трубах через спеціальні отвори – фурми 9 – у горн. Там кокс згорає, утворюючи оксид вуглецю (IV) (вуглекислий газ), який, піднімаючись нагору, проходить через шар коксу і перетворюється в

оксид вуглецю (II). Він і відновлює руду, переходячи знову в оксид вуглецю (IV). Реакція відновлення відбувається головним чином у верхній частині шахти і виражається формулою $\text{Fe}_2\text{O}_3 + 3\text{CO} = 2\text{Fe} + 3\text{CO}_2$.

Порожня порода і зола, що утворюються від згорання коксу, з'єднуються з флюсами і утворюють рідкі шлаки. Залізо, що виділяється, ще в твердому виді опускається в більш гарячу частину печі – розпар. Тут воно при температурі 1200 °С плавиться і частково розчиняє вуглець, перетворюючись в чавун, що стікає в нижню частину горна. Більш легкі рідкі шлаки збираються на поверхні чавуну, охороняючи його від окислювання. Чавун випускають з домни через лютку 10, а шлаки – через лютку 11. В інший час лютки забиті глиною. В міру опускання шарів руди і коксу в домну додають нові порції коксу і шихти.

Розплавлений чавун з домни надходить у розливочну машину для одержання чавунних злитків, або до чавуновозного ковша, в якому його перевозять у сталеливарний цех для переробки в сталь. Такий ківш уміщає до 125 т. Усередині він обкладений вогнетривкою цеглою і добре зберігає тепло, що дозволяє тримати в ньому рідкий чавун протягом багатьох годин і транспортувати на велику відстань.

Коли оксид вуглецю (IV), що утворюється при відновленні руди, піднімається у верхню частину домни, деяка його кількість знову перетворюється в оксид вуглецю (II). Тому доменні газу, які виходять з газовідводу 12 містять до 25% С. Їх спалюють у високій циліндричній вежі каупері 14, складеної з цегли, що має всередині вертикальні канали, стінки яких розжарюються. Одночасно через каупер 13 пропускають повітря, що вдувається в домну, нагріте раніше таким же способом. У каупері воно нагрівається, що підвищує ККД домни. Потім повітря направляють у каупер 14, а каупер 13, нагрівають доменними газами і т. п.

Отриманий з доменних печей чавун йде для виливки машинних станин, махових коліс, плит, каналізаційних труб і т. п. З нього одержують також сталь – сплав заліза з 0,3 – 2% вуглецю, що грає визначальну роль у сучасній техніці.

Аналіз інтенсивності й ступеню розвитку технологічних процесів у доменній печі вимагає знання температурного поля по висоті печі, яке можна одержати експериментальним шляхом, або в результаті математичного моделювання [20]. Процеси теплообміну в доменній печі є нестационарними через порушення режиму їхньої роботи як за температурами потоків на вході в до-

менну піч (температура шихти, що завантажується, температура дуття), так і при зміні витрат потоків шихти й газу. Специфіка тепломасообмінних процесів у доменних печах – наявність високорозвиненої поверхні кускового матеріалу, що піддається тепловій обробці, участь у теплообміні всіх видів теплопередачі, висока інтенсивність процесів теплообміну – визначила їхню головну роль у тім різноманітті складних процесів, що описуються теорією доменної плавки [20].

Факторами, що значно впливають на процес доменної плавки, є гідродинамічні й тепломасообмінні процеси в області горна і заплічок. Ці явища визначають рівень інтенсифікації процесу і тісно зв'язані не тільки з теплообміном, але і з такими практичними питаннями, як дренаж горна і заплічок, горіння фурм. Численні практичні дані визначили, що процесом, який лімітує продуктивність доменної печі, є захльобування пінливого (недовідновленого) шлаку на коксовій насадці. В нижній частині доменної печі температурний потенціал, що визначає швидкість плавлення, наростає швидше потенціалу, що визначає швидкість металізації на поверхні шматка руди, тому можливе розплавлення шматка раніш, ніж він встигне відновитися до металу і тому можливе одержання у відновленому середовищі розплавів з високим вмістом Fe. У цьому полягає небезпека тугого ходу і нижнього зависання [20].

Встановлено, що при наявності 2% Fe можливе значне вспінювання шлаку. При подальшому підвищенні вмісту Fe у шлаку до 10% його проходження через шар коксу стає взагалі неможливим через гази, що бурхливо виділяються при реакції $\text{FeO} + \text{C} \rightarrow \text{Fe} + \text{CO}$.

Таким чином, тепловий стан доменної печі необхідно підтримувати на рівні, максимально сприятливому для розвитку відновлювальних процесів у твердій фазі. Чим інтенсивніше організовано теплообмін, тим раніш шихта нагріється до 900 °C и швидше підуть відновлювальні процеси, що дозволить уникнути розвитку явища, що лімітує зависання розплаву на коксовій насадці в районі заплічок, краще буде проходити дренаж горна.

Актуальною проблемою при інтенсифікації процесів доменної плавки є розробка методів розрахунку і дослідження процесів тепломасообміну окискованих залізорудних матеріалів до температур оптимального розвитку процесів відновлення багатоконпонентним газом.

Математичний опис теплофізики доменного процесу, дослідження температурних полів доменних печей виконано в [9; 20; 38]. Однак, як відзначають автори [20], незважаючи на великий обсяг експериментальних даних, відсутня досить логічна і надійна математична модель, що описує тепломасообмін матеріалів, які рухаються, в доменних печах.

Аналіз розвитку нестационарних теплових процесів у доменній печі вимагає кількісної оцінки величин теплоємкостей потоків шихти і газів, яку варто проводити з обліком не тільки фізичних особливостей процесу, але й найважливіших хімічних реакцій. Другою проблемою з розрахунку тепломасообміну є облік джерел і витоків тепла, обумовлених розвитком фізико-хімічних процесів.

Дослідження відновних і тепломасообмінних процесів у доменному виробництві, особливо актуальні для печей, шихта яких складається з в'юститних брикетів, що є механічною сумішшю в'юститу і вуглецю. При цьому розглядається наступна фізична задача. В доменній печі безупинним потоком зверху вниз рухаються зі швидкістю V_w в'юститні брикети. Газ рухається назустріч матеріалу зі швидкістю V_r . Теплофізичні властивості матеріалу і газу залежать від температури, а коефіцієнти тепловіддачі від швидкості, складу і властивостей газу, а також геометричних розмірів в'юститних брикетів. Тепловий потік від газу до брикету визначається законом Ньютона, тобто пропорційною різницею температур між газом і матеріалом.

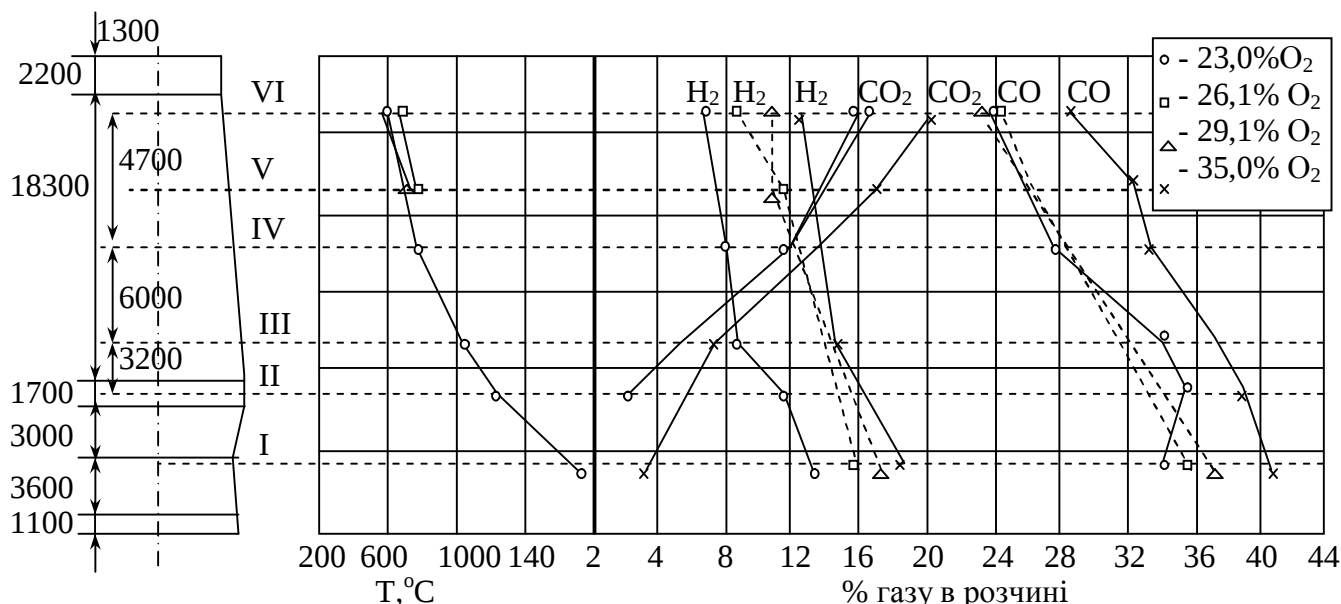


Рис 5.2. Зміст різних газів доменної печі на дослідницьких горизонтах II–VI

Рух газу в доменній печі підкоряється різним закономірностям на різних об'єктах печі. Нижче рівня фурм і в деякому обсязі вище них, плин газів тримірний; вектор швидкості має 3 компоненти. Потім, починаючи з деякого об'єкта вище рівня фурм, потік перебудовується; горизонтальна компонента швидкості, нормальна до напрямку швидкості витікання, зникає, і потік здобуває чітку двомірну структуру. Тут вектор швидкості має лише дві компоненти, одна з яких спрямована за радіусом печі, а інша за рівнем засипання. Нарешті, з цілком визначеного для кожного набору геометричних параметрів фурменого пристрою потік газів стає одномірним, а радіальна компонента швидкості зневажливо мала [20]. Надалі передбачається, що потік газу є тільки одномірним.

Зміст різних газів у доменній печі на дослідницьких об'єктах зображено на рис.5.2.

Змінювання температури газу та вміст двоокислу вуглецю в об'ємі шахти, типові для доменної печі показано на рис.5.3.

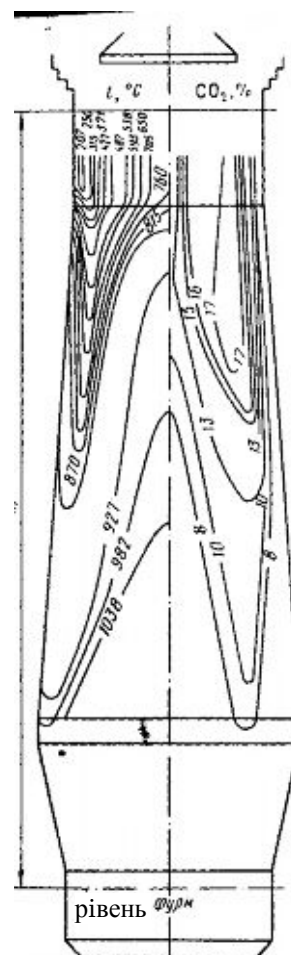


Рис.5.3. Зміна температури газу та вмісту CO_2

5.2. Математичне моделювання і розрахунок прогріву і відновлення залізородних матеріалів

Розглянутий матеріал брикету містить у своєму складі дві зовсім різних за характеристиками компоненти: в'юстит (W) і вуглець (C). Маса компонентів m_1 і m_2 , складає 95 і 5% відповідно. Пористість тіла – 15%. Розподіл компонента C за обсягом рівномірний.

У процесі нагрівання при температурі T^* починається термічний розклад матеріалу (фізико-хімічні перетворення), що супроводжується поглинанням тепла, приводить до утворення значних мас газоподібних продуктів розкладу і відповідно формує пористу структуру брикету. Температурне поле впливає на кінетику термічного розкладу двоюким чином: через, власне, величину температури і через її зміну (температура нагрівання $\frac{\partial T}{\partial \tau}$).

Брикети в'юстити, знаходячись у різних зонах доменної печі піддаються впливу конвективних q_k і радіаційних q_r , теплових потоків, що в загальному випадку поглинаються та розсіюються за рахунок наступних ефектів:

$$q_k + q_r = \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I_w) + q_r = G_{\Sigma} \Delta Q_{\text{плавл}} + \varepsilon \sigma T_w^4 + q_{\lambda} + q_{\text{вод}} + G_w \Delta Q,$$

де $G_{\Sigma} \Delta Q$ – тепловий ефект плавлення, G_{Σ} – сурмарі витрати маси $G_{\Sigma} = G_w + G_g + G_{\text{пл}}$, які складаються з маси речовини, що утворилася при поверхневих перетвореннях - G_w , виділений в брикеті газ G_d , і маси, що зноситься із плівкою розплаву $G_{\text{пл}}$; $\varepsilon \sigma T_w^4$ – випромінювання з поверхні; T_w – температура поверхні; q_{λ} – тепловий потік, що йде на прогрів тіла; $q_{\text{вод}}$ – тепло, що відводиться за рахунок вдуву; $G_w \Delta Q$ – тепловий ефект фізико-хімічних перетворень на поверхні; I_e – ентальпія гальмування; α – коефіцієнт теплообміну; I_w – термодинамічна ентальпія на стінці.

Для спрощення розв'язку задачі зробимо припущення: кусень в'юстити з рівнодоступною поверхнею має форму кулі радіусом R ; кульовий брикет піддається впливу конвективних потоків, що йдуть на нагрівання тіла і розсіюються при фізико-хімічних перетвореннях у тілі.

Процес нагрівання кульового брикету можна розбити на три етапи. Перший – нестационарний прогрів пористого двухкомпонентного матеріалу до температури внутрішніх фізико-хімічних перетворень T^* . Другий – прогрів при фізико-хімічних перетвореннях окремих компонентів брикету.

Схематично цей процес можна представити співвідношенням $T^* - \Delta T^* \leq T \leq T^* + \Delta T^*$, де ΔT^* – інтервал фізико-хімічних перетворень. Припустимо, що характерна температура внутрішніх фізико-хімічних перетворень є центром температурного інтервалу $(T^* \pm \Delta T^*)$, в якому може реалізуватися тепловий ефект фізико-хімічного перетворення ΔQ^* , а також змінюватися щільність вихідного матеріалу, якщо розкладу піддавався первісний компонент з виділенням деякої кількості газу G_g , пропорційно зміні щільності матеріалу.

Природно допустити, що поза температурним інтервалом $(T^* \pm \Delta T^*)$ тепловий ефект $\Delta Q^* = 0$, а витрата матеріалу газоподібних продуктів, що виділилися при фізико-хімічному перетворенні G зберігається сталою й дорівнює його значенню на відповідній границі зони реакції (рис.5.4.).

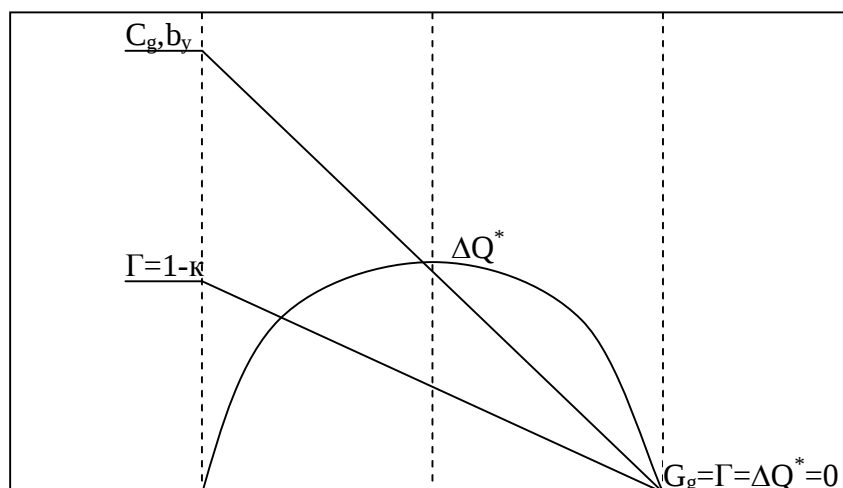


Рис. 5.4. Характер зміни основних термодинамічних параметрів процесу прогріву в зоні внутрішніх фізико-хімічних перетворень

Витрата газоподібних продуктів розкладу G_g є інтегральною характеристикою, що підсумовує швидкості локальних фізичних процесів за всією зоною реакції $G_g \approx \rho_0 \Gamma \frac{dR_1}{d\tau}$.

Тут ΔH^* – тепловий ефект фізико-хімічного перетворення; Γ – параметр газифікації, який позначає частку вихідної твердої речовини, що може перейти в газоподібні продукти при даній температурі. Параметр газифікації зв'язаний з температурою апроксимаційною формулою

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{T - T^*}{\Delta T^*} \right)^2 \right] = \nu_0 f(T, T^*),$$

де Γ_k – граничний коефіцієнт газифікації; ΔT^* – напівінтервал температур фізико-хімічного перетворення

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \rho_0 \frac{3}{4\Delta T^*} \left[1 - \left(\frac{T - T^*}{\Delta T^*} \right)^2 \right] = \rho_0 f(T, T^*).$$

Функція $f(T, T^*)$ нормована таким чином, щоб її інтеграл по всьому температур-

ному інтервалі зони фізико-хімічних перетворень давав $\int_{T^* - \Delta T}^{T^* + \Delta T} f(T, T^*) dT = 1$.

Апроксимації для Γ и $d\rho/dT$ справедливі тільки для зони фізико-хімічних перетворень. У процесі прогріву розглянутого кульового брикету можна виділити два основних етапи. Перший – це прогрів брикету від початкової темпера-

тури T_e до температури початку хімічних реакцій $T^* - \Delta T^*$ на зовнішній поверхні кулі. На цьому етапі стоки тепла і джерела газоподібної фази в середині брикету відсутні. Тому математичне формулювання задачі для цього випадку буде мати вигляд

$$C_0(T_1)\rho_0(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \lambda_0(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial r}); \quad (5.1)$$

$$T_1|_{\tau=0} = T_0; \quad (5.2)$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad (5.3)$$

$$-\lambda_0(T_1) \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=R} + \alpha [T_{cp} + T_1]_{r=R} = 0; \quad (5.4)$$

$$(0 \leq r \leq R, \quad T_1|_{r=R} < T^* - \Delta T^*).$$

Тут рівняння (5.1) дає закон розподілу температур у кулі при рівномірному початковому розподілі температур (5.2) і симетричному прогріві (5.3). Умова теплообміну з зовнішнім середовищем задана формулою (5.4).

Коли температура поверхні досягає в деякий момент часу значення T^* , настає другий етап прогріву брикету. Утворюються зона фізико-хімічних перетворень $R_1 < r < R_2$, що просувається до центра кулі. Розподіл температур буде визначатися рівняннями:

$$C_{\Sigma}(T_2)\rho_{\Sigma}(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_{\Sigma}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) - C_g(T_2)G_g \frac{\partial T_2}{\partial r} - \Delta Q; \quad (5.5)$$

$$T_2|_{\tau=\tau_1} = T_1|_{\tau=\tau_1}; \quad (5.6)$$

$$-\lambda_{\Sigma}(T_2) \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=R} + \alpha [T_{cp} - T_2]_{r=R} = 0, \quad (5.7)$$

в області $R_1 < r < R$, а в області $0 \leq r \leq R_1$ рівняннями (5.1) – (5.3). На поверхні розділу двох зон $r=R_1$ має місце умова теплового контакту

$$T_1|_{r=R_1} = T_2|_{r=R_1} = T^* - \Delta T^*, \quad (5.8)$$

$$\lambda_0(T_1) \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=R_1-0} = \lambda_{\Sigma}(T_2) \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=R_1+0} + \rho_0(T_1) \Delta H^* \frac{dR_1}{d\tau}. \quad (5.9)$$

При досягненні деякого моменту часу τ_2 настає третій етап прогріву кульового брикету, що характеризується появою з боку зовнішньої поверхні металізованого шару $R_2 < r < R$, в якому відсутні фізико-хімічні перетворення, однак існує пористе охолодження за рахунок вивільнюваного газу в зоні проходження реакцій. Температурне поле брикету в даному випадку буде описуватися рівняннями:

$$C_M(T_3)\rho_M(T_3)\frac{\partial T_3}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \lambda_M(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial r}) - C_g(T_3)G_g \frac{\partial T_3}{\partial r}, \quad (5.10)$$

$$T_3|_{\tau=\tau_2} = T_2|_{\tau=\tau_2}, \quad (5.11)$$

$$-\lambda_M(T_3)\frac{\partial T_3}{\partial r}\bigg|_{r=R} + \alpha[T_{cp} - T_3]_{r=R} = 0, \quad (5.12)$$

для області $R_2 < r \leq R$; (5.5) для області $R_1 < r < R_2$; (5.1)-(5.3) для області $0 \leq r \leq R_1$.

На їхніх границях мають місце умови теплового контакту:

$$T_2|_{r=R_2} = T_3|_{r=R_2} = T^* - \Delta T^*, \quad (5.13)$$

$$\lambda_\Sigma(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=R_2-0} = \lambda_M(T_3)\frac{\partial T_3}{\partial r}\bigg|_{r=R_2+0} + \rho_\Sigma(T_2)\Delta H^* \frac{dR_2}{d\tau}, \quad (5.14)$$

на границі $r=R_2$, і (5.8)-(5.9) – при $r=R_1$.

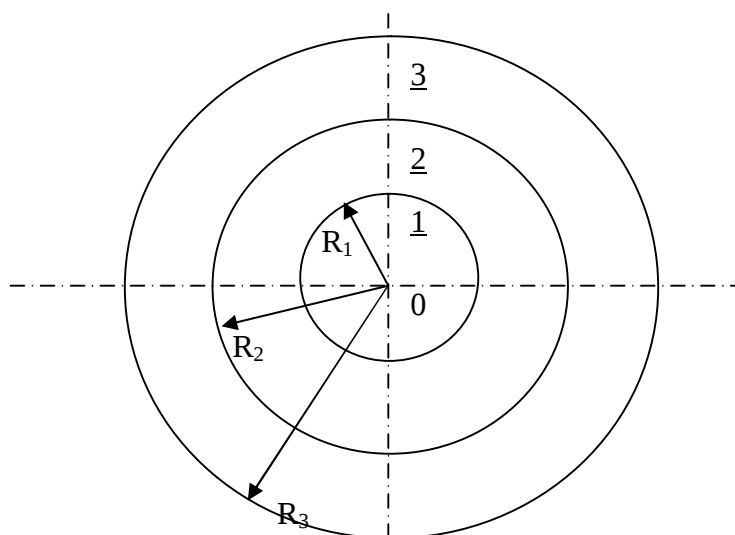


Рис.5.5. Розрахункова схема прогріву та відновлення брикету

Розглянемо алгоритм чисельного розв'язку задачі, розрахункова схема якої наведена на рис.5.5.

Нехай задані рівномірні сітки $W_x = \{r_i = ih; i=0,1,...,N,N+1; h=R/N\}$,
 $W_\tau = \{\tau_n = nl; n=0,1,...; 1=const\}$.

Введемо позначення: $t_{v,i}^n = T_v(r_1, \tau_n); v = 1,2,3, \quad \delta_\tau t_{v,i}^n = \frac{t_{v,i}^{n+1} - t_{v,i}^n}{l},$

$$\delta_r t_{v,i}^n = \frac{t_{v,i+1}^n - t_{v,i-1}^n}{2h}, \quad \delta_{rr} t_{v,i}^n = \frac{t_{v,i+1}^n - 2t_{v,i}^n + t_{v,i-1}^n}{h^2}, \quad R_1^n = R_1(\tau_n); \quad R_2^n = R_2(\tau_n).$$

Для визначення значень температурних функцій рівняння теплопровідності, початкові та крайові умови апроксимуються різницевиими аналогами

$$C_0(t_{1,i}^n) \rho_0(t_{1,i}^n) \delta_\tau t_{1,i}^n = \lambda_0(t_{1,i}^n) (\delta_{rr} t_{1,i}^{n+1} + \frac{2}{r_i} \delta_r t_{1,i}^{n+1}) + \lambda_0(t_{1,i}^n) (\delta_r t_{1,i}^{n+1})^2, \quad (5.15)$$

$$t_{1,i}^0 = T_0, \quad (5.16)$$

$$t_{1,0}^{n+1} = t_{1,1}^{n+1}, \quad (5.17)$$

$$-\lambda_0(t_{1,N}^n) \delta_r t_{1,N}^{n+1} + \alpha [T_{cp} - t_{1,N}^{n+1}] = 0, \quad (5.18)$$

$$C_\Sigma(t_{2,i}^n) \rho_\Sigma(t_{2,i}^n) \delta_\tau t_{2,i}^n = \lambda_\Sigma(t_{2,i}^n) (\delta_{rr} t_{2,i}^{n+1} + \frac{2}{r_i} \delta_r t_{2,i}^{n+1} + \lambda_\Sigma(t_{2,i}^n) (\delta_r t_{2,i}^{n+1}) - C_g(t_{2,i}^n) G_g^n \delta_r t_{2,i}^{n+1} - \Delta Q_i^n) \quad (5.19)$$

$$t_{2,i}^{n_1} = t_{1,i}^{n_1}, \quad n_1 l = \tau_1, \quad (5.20)$$

$$-\lambda_\Sigma(t_{2,N}^n) \delta_r t_{2,N}^{n+1} + \alpha [T_{cp} - t_{2,N}^{n+1}] = 0, \quad (5.21)$$

$$t_{1,R_1^{n+1}}^{n+1} = t_{2,R_1^{n+1}}^{n+1} = T^* - \Delta T^*; \quad (5.22)$$

$$\lambda_0(T^*) \frac{T^* - \Delta T^* - t_{1,k-1}^n}{R_1^n - (k-1)h} = \lambda_\Sigma(T^*) \frac{t_{2,k}^n - T^* + \Delta T^*}{kh - R_1^n} - \rho_0(T^*) \Delta H^* \delta_\tau R_1^n, \quad (5.23)$$

$$C_M(t_{3,i}^n) \rho_M(t_{3,i}^n) \delta_\tau t_{3,i}^n = \lambda_M(t_{3,i}^n) (\delta_{rr} t_{3,i}^{n+1} + \frac{2}{r_i} \delta_r t_{3,i}^{n+1} + \lambda_\Sigma(t_{3,i}^n) (\delta_r t_{3,i}^{n+1}) - C_g(t_{3,i}^n) G_g^n \delta_r t_{3,i}^{n+1}) \quad (5.24)$$

$$t_{2,i}^{n_2} = t_{2,i}^{n_2}, \quad n_2 l = \tau_2, \quad (5.25)$$

$$-\lambda_M(t_{3,N}^n) \delta_r t_{3,N}^{n+1} + \alpha [T_{cp} - t_{3,N}^{n+1}] = 0, \quad (5.26)$$

$$t_{2,R_2^n}^{n+1} = t_{3,R_2^n}^{n+1} = T^* - \Delta T^*; \quad (5.27)$$

$$\lambda_M(t_{2,m-1}^n) \frac{t_{2,R_2^n}^{n+1} - t_{2,R_2^{n-1}}^{n+1}}{h} = \lambda_M(t_{3,m-1}^n) \frac{t_{3,R_2^{n+1}}^{n+1} - t_{3,R_2^n}^{n+1}}{h} - \rho_\Sigma(t_{2,m+1}^n) \Delta H^* \frac{h}{jl}, \quad (5.28)$$

де $k=I$ при $0 < ih - R_1^n < h$; $m=i$ при $0 < ih - R_2^n < h$; j – число кроків по τ , за які границя R_2 переміщується на відстань h .

При описі закономірностей теплообміну необхідно мати дані про зв'язок теплофізичних параметрів матеріалів і газів з їхнім складом і температурою, а також знати поверхню теплообміну на різних об'єктах доменної печі та залежність його коефіцієнту від параметрів газу і властивостей матеріалу. Взаємодія суміші газового потоку з кульовими вуглецевими в'юститними брикетами в загальній критеріальній формі описується формулою

$$Nu = a_1 + (a_2 Re^{a_3} + a_4 Re^{a_5}) Pr^{a_6} \left(\frac{\eta_b}{\eta_w} \right)^{a_7} a_8, \quad (5.29)$$

де $Nu = \alpha d / \lambda$ – критерій Нуссельта; $Re = V_{\Gamma} d / \nu$ – критерій Рейнольдса; $Pr = C_p \mu / \lambda$ – критерій Прандтля; d – діаметр кульового брикету; V_{Γ} , λ , ν , μ , C_p – відповідно швидкість, теплопровідність, кінематична в'язкість, динамічна в'язкість і теплоємність газу; де $a_i (i=1,2,\dots,8)$ – коефіцієнти, що дозволяють одержати критеріальні формули різних авторів. При $a_1=2$; $a_2=0,4$; $a_3=0,5$; $a_4=0,06$; $a_5=2/3$; $a_6=0,4$; $a_7=0,25$; $a_8=1$ одержимо формулу по обтіканню одиничної кулі, приведену в [9]. Формула справедлива при $3,5 < Re < 7,6 \cdot 10^4$; $0,7 < Pr < 380$. При продуванні нагрітого газу через шар часток числа Рейнольдса і Нуссельта визначаються за формулами:

$$Re = \frac{V_m D}{\eta_f (1 - \Pi)}; \quad Nu = \frac{\alpha D}{\lambda_f} \left(\frac{\Pi}{1 - \Pi} \right),$$

де Π – пористість; η_f – коефіцієнт в'язкості газу; λ_f – коефіцієнт теплопровідності газу; V_m – масова швидкість; D – приведений діаметр частки, дорівнює шестиразовому обсягу V_s частки, поділеному на поверхню частки S_s ($D_p = 6V_s/S_s$), η_b – коефіцієнт в'язкості газу при середній температурі.

Для визначення динамічного коефіцієнта в'язкості суміші газів скористаємося формулою, приведеною в [9; 32]

$$\mu_{\Gamma} = \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i}{1 + \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^N B_{ij} r_j}, \quad j \neq i,$$

де r_i – об'ємна частка компонента газової суміші; I, J – індекси, що вказують на приналежність до визначеного компонента суміші;

$$B_{ij} = 0,4317 \sigma_{ij}^2 \frac{\sqrt{M_{ij}}}{m_i} \cdot \frac{\Omega_{ij}^{(1,1)*}}{\sqrt{T}} \mu_i \cdot 10^6,$$

де M_Γ – молекулярна маса;

$$M_{ij} = \frac{2M_i M_j}{M_i + M_j}; \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \xi^{-1/6};$$

$\Omega_{ij}^{(1,1)*} = f(T_{ij}^*)$ – інтеграл, що враховує динаміку зіткнень; σ , ε/K – величини, що характеризують взаємодію молекул, вимірювані в $^\circ\text{A}$ й K відповідно; ξ – коефіцієнт, що враховує вплив полярності молекул одного з компонентів; обчислюється з виразу, запропонованому в [9; 32]; якщо молекули компонентів неполярні, то $\xi=1$.

Деякі автори рекомендують наближену формулу для визначення динамічного коефіцієнта в'язкості газової суміші [4]

$$\mu_\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^N r_i M_i}{\sum_{i=1}^N r_i \frac{M_\Gamma}{\mu_i}} = \frac{M_\Gamma}{\sum_{i=1}^N r_i \frac{M_\Gamma}{\mu_i}}.$$

Для обчислення коефіцієнта теплопровідності багатокомпонентної газової суміші в [4; 32] рекомендується експериментальна формула

$$\lambda_\Gamma = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{1 + \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^N A_{ij} r_j},$$

$$\text{де } A_{ij} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{N_i}{N_j} \right)^2 \frac{1 + C_{sij}/T}{1 + C_{si}/T}, \quad N_i = \sqrt{\frac{\mu_i (1 + C_{si}/T)}{M_i^{3/4}}}, \quad N_j = \sqrt{\frac{\mu_j (1 + C_{sj}/T)}{M_j^{3/4}}},$$

C_{si}, C_{sj} – постійні Сутерленда; $C_{sij} = C_{sji} = \sqrt{C_{si} \cdot C_{sj}}$; якщо один з компонентів пари має сильну полярну молекулу (наприклад, водяна пара), то $C_{sij} = 0,733 \sqrt{C_{si} \cdot C_{sj}}$.

Для наближеної оцінки коефіцієнта теплопровідності газової суміші в [4; 9] передбачається формула $\lambda_\Gamma = \frac{1}{M_\Gamma} \sum_{i=1}^N r_i M_i \lambda_i$, де M_Γ – молекулярна вага газової суміші;

$M_\Gamma = \sum_{i=1}^N r_i M_i$; r_i – об'ємна частка компонентів суміші; M_i – молеку-

лярна вага компонентів суміші. Щільність і об'ємна теплоємність газової суміші визначається співвідношеннями:

$$\rho_{\Gamma} = \sum_{i=1}^N r_i \rho_i; \quad C_{\Gamma} = \sum_{i=1}^N r_i C_i,$$

де ρ_i , C_i – щільність і об'ємна теплоємність компонентів суміші.

Теплофізичні властивості двокомпонентного матеріалу можна розрахувати, якщо відомі теплофізичні властивості і масові частки складових (в'юстита – W і вуглецю – C). За умовами задачі маса в'юститу – m_1 , маса вуглецю – m_2 , тоді маса матеріалу $M = m_1 + m_2$. Масові частки в'юститу φ_w і вуглецю φ_c визначимо із співвідношень $\varphi_w = \frac{m_w}{M}$, $\varphi_c = \frac{m_c}{M}$. За умовами задачі відомо, що $\varphi_w = 0,95$,

$\varphi_c = 0,05$. Щільність ρ_0 в'юститного брикету $\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi_w}{\rho_w} + \frac{\varphi_c}{\rho_c}$, де ρ_w – щільність в'юститу, ρ_c – щільність вуглецю. Теплоємність C_0 : $C_0 = \varphi_w C_w + (1 - \varphi_w) C_c$, де C_w – теплоємність в'юститу; C_c – теплоємність вуглецю. Коефіцієнт теплопровідності λ_0

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_w \varphi_w \rho_c + \lambda_c \varphi_c \rho_w}{\rho_c \varphi_w + \varphi_c \rho_w},$$

де λ_w – коефіцієнт теплопровідності в'юститу; λ_c – коефіцієнт теплопровідності вуглецю.

За першим наближенням коефіцієнт теплопровідності матеріалу можна представити сумою $\lambda_0 = \lambda_w X_w + \lambda_c X_c$, де $X_w = \frac{\varphi_w}{\rho_w} \rho_0$; $X_c = \frac{\varphi_c}{\rho_c} \rho_0$.

При розрахунку λ_0 визначальним параметром є не масова частка компонентів, а їхній об'ємний вміст, що зв'язаний з масовою часткою через відношення щільності суміші до щільності даного компонента.

Приймається, що в міру відновлення зовнішня поверхня кульового брикету покривається шаром заліза. Це третій етап нестационарного прогріву і відновлення брикету, що приводить, з одного боку, до виникнення додаткового дифузійного опору і до уповільнення процесу при дифузійному режимі, а з іншого – до зменшення обсягу невідновленого ядра і його внутрішньої поверхні, що є причиною уповільнення процесу при кінетичному режимі.

Слід зазначити наступні теплові аспекти розглянутого явища. В середині матеріалу, на невідомій заздалегідь глибині передбачається існування теплового стоку і джерела утворення газів. Ці гази, фільтруючись крізь пори вище лежачого шару, відбирають частину тепла від стінок пор.

У першому наближенні будемо вважати, що в будь-якій точці брикету температура газоподібних продуктів фізико-хімічних перетворень і стінок пор рівні (незалежно від швидкості фільтрації цих продуктів). Далі допускаємо, що гідравлічним опором пористого середовища можна зневажити, що виключає нагромадження газоподібних продуктів у середині шару з матеріалу, що прореагував.

Тепловий ефект ΔQ , а також маса газу, що виділився при фізико-хімічному перетворенні Gg , однозначно зв'язані з масою вихідного матеріалу, що знаходиться в зоні перетворення. Вони повинні визначатися швидкістю переміщення ізотерми $T=T^*$ у матеріалі в напрямку прогрітого шару. Якщо позначити координату цієї ізотерми через R , то швидкість її зміни буде $\frac{dR}{d\tau}$.

Звичайно вводять два параметри: Γ і ΔQ , що характеризують ступінь реалізації закладених у матеріалі «термодинамічних» можливостей при заданих параметрах зовнішнього обтікання. Параметр Γ називають коефіцієнтом газифікації. Він показує, що частина маси в рідкій фазі чи у виді твердих часток істотно змінюється з зовнішніми умовами обтікання. Припустимо, що для всіх реакцій у твердій фазі всередині матеріалу можна використовувати рівняння арреніусовського типу

$$\frac{dh}{d\tau} = (\Gamma - h)B^* \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad h = 1 - \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Тут через $h(T, \omega)$ позначена частка газоподібних продуктів реакції, а через Γ – максимально можливий вміст цих продуктів у загальній масі прореагуваної речовини: B – передекспоненціальний множник, моль/с; $\bar{R}$ – універсальна газова постійна, кДж/моль·К; T – температура реагуючих речовин, К; E – енергія активізації реакції (кДж/моль), обумовлена звичайно з експерименту. Поглинання тепла при хімічній реакції визначається виразом

$$\Delta Q = \varphi_w \rho_0 \Delta H^* B (\Gamma - h) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right).$$

Відповідно об'ємна пористість Π , масова пористість Π_m і щільність твердої фази ρ_s зв'язані з масовою часткою газоподібних продуктів реакції h наступними співвідношеннями

$$\Pi = \frac{\varphi_w * \rho_0}{\rho_w} \left[1 - (1 - h) \frac{\rho_w}{\rho_c} \right], \quad \Pi_m \approx \varphi_w * h, \quad \rho_s = \rho_0 (1 - \varphi_w h).$$

Щільність газу, що заповнює пористий каркас, багато менше щільності твердої фази ρ_s , тому можна обмежитися наступним співвідношенням $(\rho C)_{\Sigma} = (\rho C)_0 (1 - \Gamma)$. Тепловий ефект ΔQ безпосередньо зв'язаний зі швидкістю зміни маси вихідної твердої речовини $\Delta Q = \Delta H^* \frac{d\rho}{d\tau} \approx (\Delta H^* \frac{d\rho}{dT}) \frac{dT}{d\tau}$.

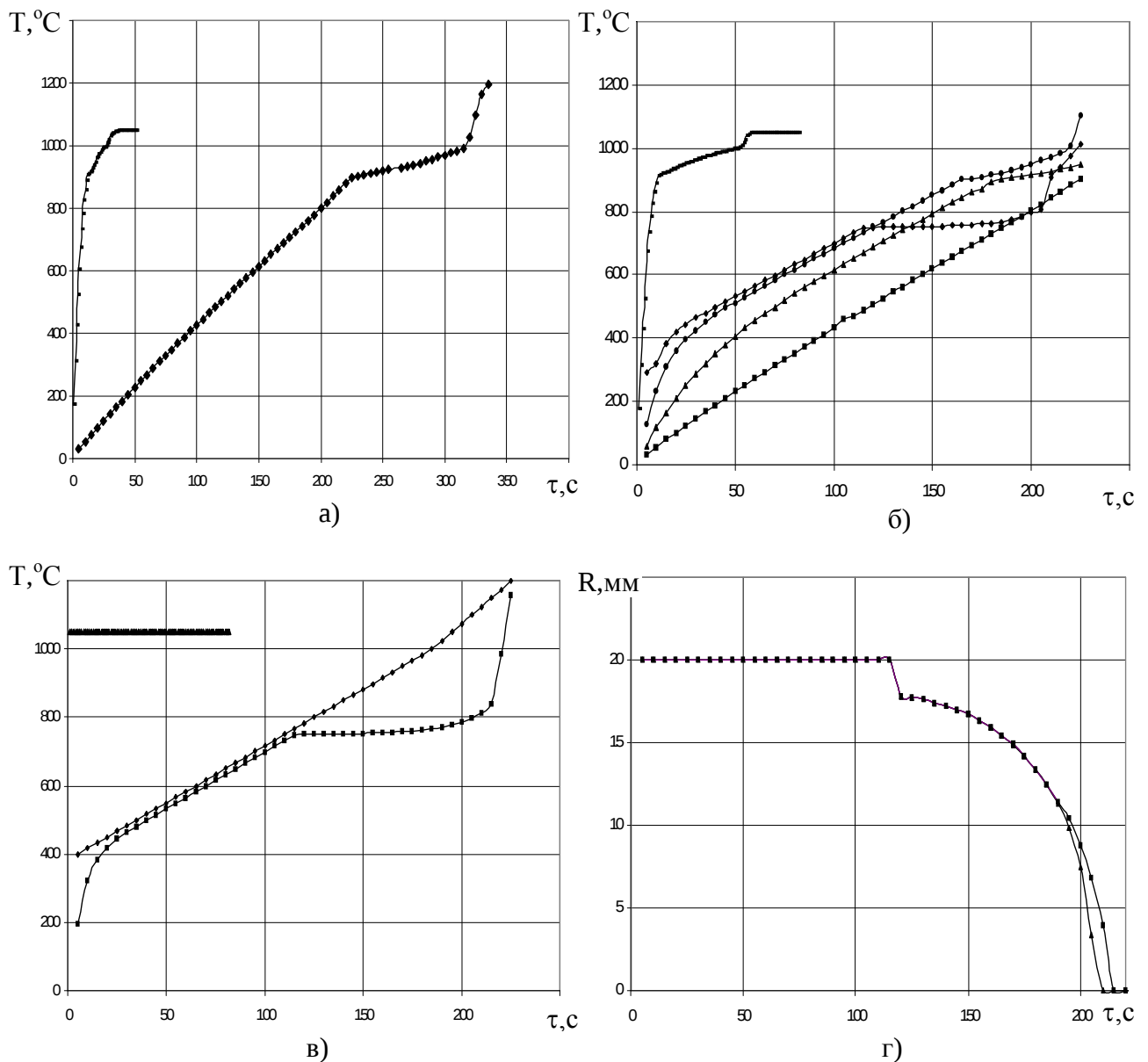


Рис.5.6. Температурні поля брикету: а – температура центру; б – температура поверхні брикету; в – температура середовища; г – закон переміщення ізотерми

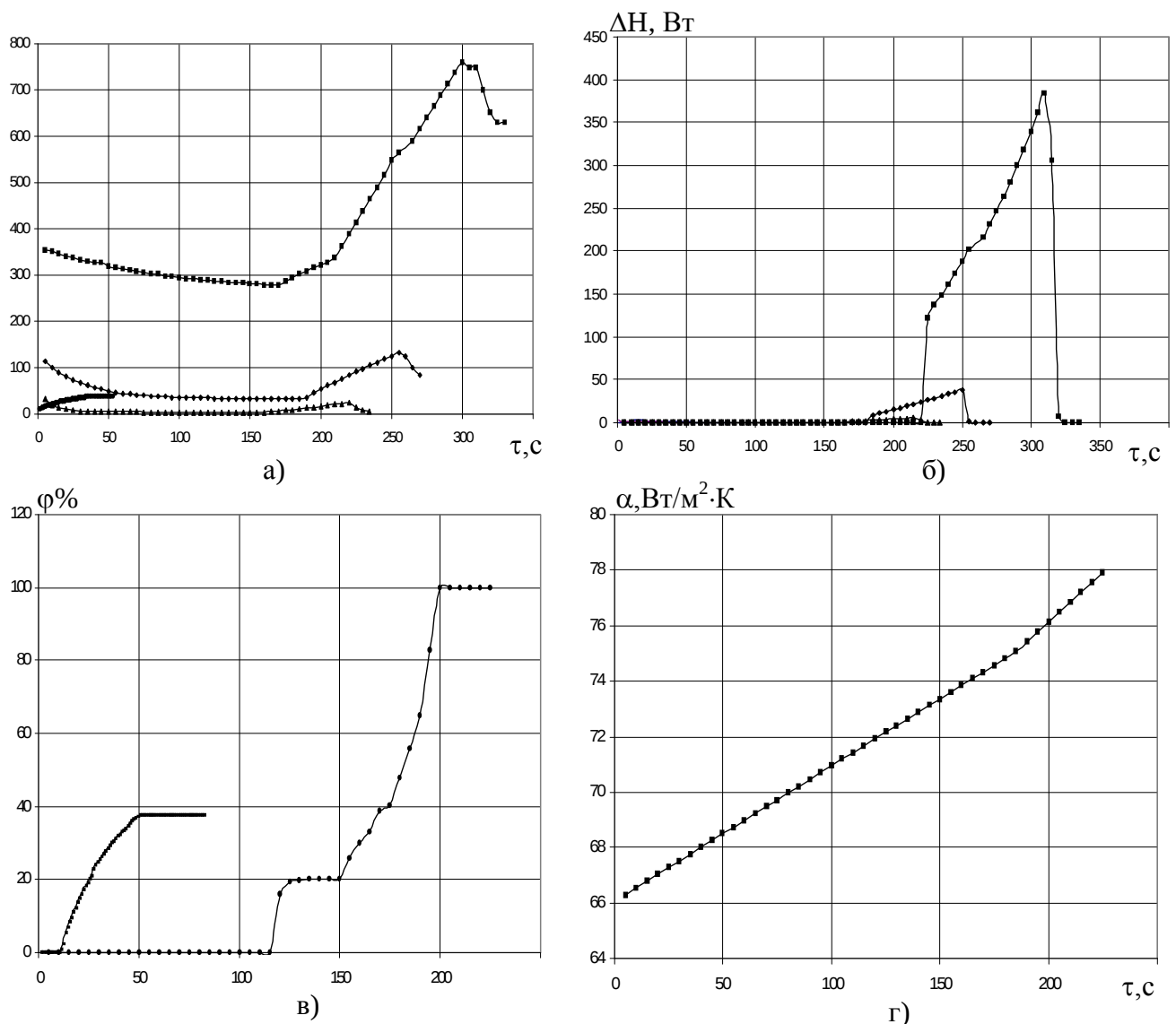


Рис. 5.7. Теплові параметри задачі: а – підведений тепловий потік; б – тепло хімічної реакції; в – ступень відновлення; г – залежність коефіцієнта теплопередачі від

Аналіз чисельних результатів показує, що нестационарний прогрів і відновлення в'юститних брикетів істотно залежить від їхніх розмірів. (рис.5.6, 5.7.). При аналізі теплової роботи доменної печі найбільш доцільно розглядати дві зони. Як граничну, звичайно приймають температуру матеріалів 850–950 °С. Це значення пов'язано, в основному, з початком прямого відновлення заліза. Мінімальна різниця температур шихти і газу коливається в широких межах, досягаючи до 150 °С і більше. При цьому вважається, що в нижній зоні відбуваються: частковий розклад вапняку, газифікація вуглецю, пряме відновлення заліза й інших елементів, шлакоутворення, плавлення, перегріву чавуну і шлаку.

Аналіз впливу температури $T_{\text{инт}}$ на прогрів і розвиток відбудовних процесів показує, що тепловий стан доменної печі варто підтримувати на рівні мак-

симально сприятливому для розвитку відбудовних процесів у твердій фазі. Чим інтенсивніше організований теплообмін, тим раніше брикет прогріється до температури $T_{\text{нт}}$, тим краще підуть відбудовні процеси. В залежності від складу суміші газу в потоці що набігає, розмірів кульових брикетів і інтенсивності плавки значення коефіцієнта тепловіддачі змінюється від 40 до 80 Вт/(м² °С).

Таким чином, коефіцієнт тепловіддачі впливає на всі показники процесу.

Одержані результати показують, що нагрів брикетів відбувається нерівномірно: спочатку брикети нагріваються порівняно швидко, а потім нагрівання сповільнюється. Максимальний вплив на розподіл температури роблять розміри брикету, що впливає і на швидкість просування фронту фазових перетворень.

В'юститні брикети великих розмірів досягають нижньої частини доменної печі раніш ніж вони встигають відновитися до металу, тобто можливе одержання у відновленому середовищі сильно залізистих розплавів з високим вмістом Fe, тобто можливе розплавлення брикету раніш, ніж він встигне відновитися до металу.

5.3. Інтенсифікація процесів доменної плавки

Технічний прогрес в області підготовки сировини, застосування інжекції різних видів палива через фурми, збагачення дуття киснем створив сприятливі умови для ведення доменного процесу і зажадав удосконалювання не тільки методів ведення плавки, але і конструкцій доменних печей, зокрема, їхнього, профілю. В нових роботах з розвитку теорії доменного процесу відзначається тенденція комплексного дослідження всього різноманіття явищ, зв'язаних з перетворенням сирих матеріалів у чавун і шлак.

Розвиток теплофізики доменного процесу дозволив сформулювати типові явища в схемах і математичному описі тепломасообміну в доменних печах, які охоплюють процес нагрівання в протivotоті не тільки термічно тонких, але і масивних тіл з урахуванням теплових ефектів найважливіших фізико-хімічних процесів. У результаті цього з'явилися можливості уточнення оптимального профілю і використання численних даних по термодинаміці і кінетиці відновлювальних процесів.

Сучасний рівень математичного опису явищ у доменній печі, в тому числі явищ теплообміну, не дозволяє розкрити всі тонкощі доменного процесу. Якоюсь мірою математичний опис виявляється спрощеним зображенням процесів, що відбуваються в доменній печі.

Виробництво чавуну, що становить початковий і найбільш енергоємний етап виробничого циклу в чорній металургії, вирішальним чином визначає техніко-економічні показники роботи всього гірничо-металургійного комплексу, однією з головних задач якого є підвищення рентабельності чорної металургії. Найбільш прийнятним рішенням головної проблеми, що стоїть перед чорною металургією України, є зменшення питомої витрати коксу на виплавку чавуну, що дозволить знизити енергетичні і фінансові витрати на виробництво металу і ліквідувати дефіцит в Україні коксівного вугілля. Аналізу і реалізації заходів, спрямованих на вирішення зазначеної проблеми присвячені Державна програма розвитку гірничо-металургійного комплексу України до 2010 року і Державна програма енергозбереження.

В нижніх частинах доменної печі створюються всі умови для завершення теплообміну. Вони визначаються високим значенням коефіцієнтів теплопередачі, наявністю сильно розвитої поверхні нагрівання, тому що значна частина шихти знаходиться в розплавленому стані, і розвитком ендотермічних процесів,

інтенсивність протікання яких зростає з підвищенням температури (по мірі наближення шихти до фурм). Ці обставини приводять до того, що висота в кілька метрів виявляється достатньою для того, щоб температури газу і шихти вирівнялися. Тому температура, з якою газовий потік виходить із процесу теплообміну, визначається умовами відновлення двоокису вуглецю коксом.

Доменний газ на колошнику має відносно більш високу температуру, чим завантажена шихта. Тоді як шихта, що опускається, нагріваючи до значення гранично можливого в зоні помірних температур, не може поглинути більшої кількості тепла газів, то в колошникових газах завжди залишається надлишок тепла. Так, наприклад, у сучасних умовах плавки з застосуванням охолодженого агломерату чи окатишів температура на колошнику досягає 300–350 °С. Збільшення кількості тепла, що поглинається шихтою в цій області за рахунок росту вологості шихти (застосування сирих вологих руд, коксу з підвищеною вологістю), приводить до зниження температури газів до 200 °С і більш.

Таким чином, тепловий стан доменної печі варто підтримувати на рівні, максимально сприятливому для розвитку відбудовних процесів у твердій фазі. Чим інтенсивніше організований теплообмін, тим раніш шихта нагріється до 900 °С, тим краще підуть відновлювальні процеси, легше можна буде уникнути розвитку явища, що лімітує зависання розплаву на коксовій насадці в районі заплічок, краще буде проходити дренаж горна. Численні практичні дані підтверджують гіпотезу про те, що процесом, який лімітує продуктивність доменної печі, є зависання пінливого (недовідновленого) шлаку на коксовій насадці.

На практиці встановлено, що велика кількість шлаку приводить до зниження продуктивності печі, і навпаки. Цей вплив значно сильніший, ніж вплив простого збільшення тепло-споживання шихти.

Очевидно, для збереження нормального газодинамічного режиму доменної печі при вдуванні різних палив через фурми необхідно мати таку кількість горнового газу щоб, при проходженні через шар шихтових матеріалів перепад тиску газу не перевищував би критичної величини ($\Delta P = \text{optimum}$), коли починається підвисання шихти.

Інжекція палив у фурми доменної печі в даний час завоювала загальне визнання як один із прогресивних напрямків розвитку доменного процесу. В результаті інжекції природного газу і мазуту на ряді доменних печей вдалося скоротити витрату коксу на 13–15% і збільшити продуктивність на 2,5–3,0%

.При збагаченні дуття киснем з одночасною інжекцією палива продуктивність печі збільшується на 9,8%, а витрата коксу знижується на 17,1%.

У процесі впровадження інжекції виявилися нові переваги роботи печей на комбінованому дутті. В деяких випадках заощаджується не тільки кокс, але досягається й абсолютна економія палива. Крім того, можна більш гнучко керувати технологією і насамперед тепловим станом доменної печі.

Використання природного газу і кисню, особливо на стадії їхнього освоєння в доменній плавці, поставило цілий ряд питань, які необхідно було вирішити, щоб повніше використовувати теплові, відновлювальні і газодинамічні характеристики комбінованого дуття. Ці питання визначалися складністю і різноманіттям процесів, що характеризують технологію виплавки чавуну. Як відомо, головними з них є процеси горіння у фурмених зонах і наступний теплообмін між газовим потоком і шаром шихти, процеси прямого і непрямого відновлення, зосереджені практично за усією висотою доменної печі, і процеси гідро-, газодинаміки, що істотно впливають на рівність сходу шихтових матеріалів, а отже, і на продуктивність доменної печі.

Таким чином, дослідженнями встановлено, що циклічна нестационарність газодинамічних процесів у шарі шихтових матеріалів визначає наявність істотних резервів з погляду газопроникності шихти при існуючій технології доменної плавки.

При інжекції палива в доменну піч необхідно використовувати теплові резерви, що мають у розпорядженні технологів цеху: підвищення температури дуття, зменшення його вологості, підігріву інжектovanого газу. Цими факторами і визначається величина економії коксу і кількість інжектovanого добавки, що доменна піч може прийняти.

У даний час в Україні єдиним замінником частини коксу в доменній плавці є природний газ, вартість якого досягла, а в ряді випадків перевищила, вартість заміненого ним коксу. До того ж основна частина природного газу імпортується в Україну. В цій ситуації розробка і реалізація технології доменної плавки з заміною частини або всього природного газу іншими енергоносіями може позитивно вирішити комплекс економічних, паливно-енергетичних і соціально-структурних проблем чорної металургії на шляху підвищення ефективності її функціонування. Тому на даному етапі особливу значущість набувають технології доменної плавки з заміною природного газу коксовим газом, пиловугіль-

ним паливом і продуктами газифікації не коксівного вугілля. В ситуації, що склалася, проблема коксозбереження може бути вирішена реструктуризацією паливного балансу, суть якої полягає в тому, що природний газ у доменній плавці замінюється коксовим, а потреба коксового газу покривається за рахунок виробництва високо теплотворного газу, не коксівних вугілля у звільнених у зв'язку зі зменшенням загальної виплавки чавуну об'ємах доменних печей. Коксовий газ у даний час використовується в якості високотеплотворного газового палива для енергетичних потреб металургійних і коксохімічних підприємств. Однак його металургійна цінність значно вище теплотехнічної, оскільки в складі коксового газу 94–95% відновлювальних компонентів (водень, вуглеводи, монооксид вуглецю) – потенційних замінників коксу в процесах відновлення в доменних печах.

Розробка нової технології має за мету вирішення комплексу науково-технічних задач, найважливішою з яких є визначення на основі паливного балансу підприємства максимально можливих обсягів вивільнення коксового газу для вдування в доменні печі з визначенням альтернативних палив для використання в коксохімічному, металургійному виробництвах і на ТЕЦ.

Однак в області вивчення механіки руху теплоносіїв у доменній печі існує ще безліч невирішених проблем. Насамперед слід зазначити ізолюваність математичних описів руху шихтових матеріалів і газів як один від одного, так і від процесів тепло- і масообміну. Необхідно підсилити роботу по створенню фізично і математично бездоганних моделей руху матеріалів у шарі, а також утворенню і розвитку фурмених вогнищ. Очевидно, це можна буде зробити спільним рішенням рівнянь вихрового плину газів і рівнянь руху шихтових матеріалів, розроблених з урахуванням дотримання законів збереження маси і кількості руху. Варто також форсувати реалізацію моделей руху теплоносіїв при граничних умовах, більш наближених до реального профілю печі і параметрів доменної плавки.

РОЗДІЛ 6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ В РОЗПЛАВАХ

6.1. Поняття про сучасні технології виробництва сталі

На сьогоднішній день і, видимо, ще дуже довгий час сталь є і буде основним конструкційним матеріалом у господарській діяльності людини. Тому задачі по поліпшенню якості сталі і підвищенню ефективності сталеплавильного виробництва є актуальними для розвитку сучасного промислового комплексу. Особливо важливо це для України, де металургійне виробництво є основою економіки країни і, разом з цим, являє найбільш енергоємну галузь.

На сучасній стадії розвитку сталеплавильного виробництва для виплавки сталі застосовують кисневі конвертери, мартенівські печі і електросталеплавильні печі. Структура світового сталеплавильного виробництва і динаміка її зміни представлені на рис. 6.1 згідно даних [8].

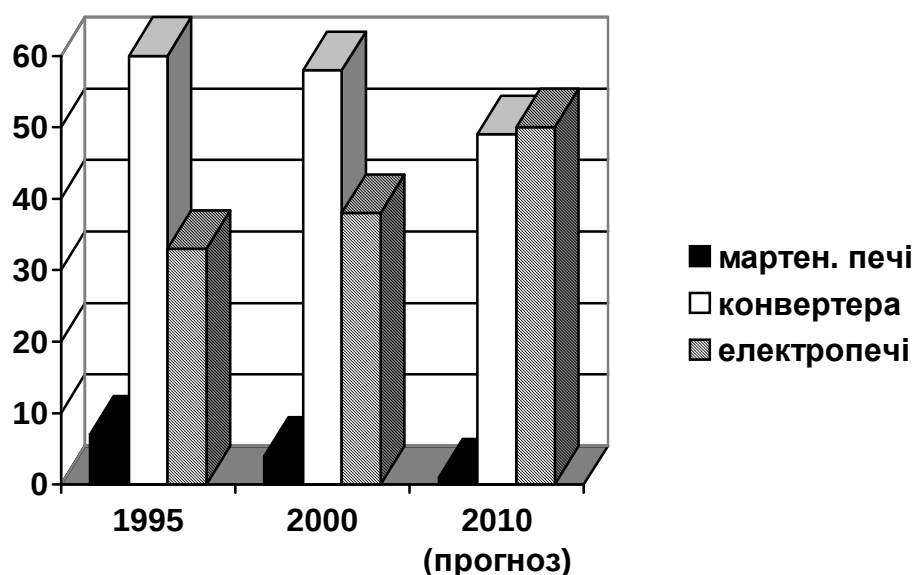


Рис.6.1. Частка (%) сталі виплавленої в різних сталеплавильних процесах у світовому обсязі виробництва

Як видно з наведеного рисунку, існує тенденція до скорочення мартенівської сталі і росту електросталі. Застосування електротехнології є найбільш перспективним способом виплавки, в той же час досить високою залишається ступінь конвертерної сталі, а для України саме останній вид виробництва є основним.

Власно сталеплавильний процес складається з трьох основних етапів: підготовка шихтових матеріалів, плавка і розливання сталі.

Сталеплавильний процес є окисним. В окисних умовах відбувається окислювання домішок (Cr, Mn, C, P), а також до деякої міри і заліза, хоча це і небажано. Сталеплавильні агрегати працюють періодично. Розглянемо коротко основні сталеплавильні процеси і агрегати. Для більш докладного знайомства зі згаданими технологіями рекомендуємо читачу книгу [23].

Кисневий конвертер являє собою реторту, що має металевий кожух, внутрішня поверхня якого футерована вогнетривким матеріалом.

Киснево-конвертерний процес здійснюється в такий спосіб. У звільнений від металу і шлаку попереднього циклу конвертер за допомогою крана з лотка завантажують брухт, потім заливають необхідну кількість чавуну (температура біля 1200°C), встановлюють у вертикальне положення, опускають кисневу фурму і починають продувку. Струмінь газу (технічно чистий кисень, повітря та ін.) є термодинамічно активним і може вводитися до ванни різними способами: зверху, знизу, збоку, комбінований (схему продувки зверху показано на рис.6.2).

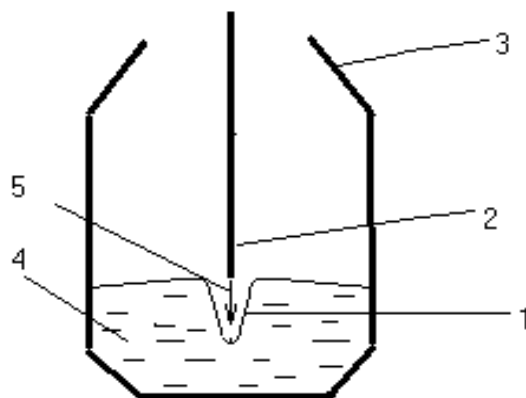


Рис.6.2. Схема конвертерної ванни з продувкою зверху: 1 – поверхня лунки (реакційна зона); 2 – продувочний модуль; 3 – корпус конвертера; 4 – рідкий метал; 5 – струмінь газу

Під впливом струменю утворюється реакційна зона, температура в якій досягає значень $1800 - 2000^{\circ}\text{C}$, і кисень, який входить до складу газу, окислює домішки металу. Це лежить в основі процесів, що рафінують. Крім того, струмін газу разом з пузирями, що утворюються в результаті хімічних реакцій, є стимулятором гідродинамічних процесів і сприяє перемішуванню ванни. При цьому виникає циркуляційний потік рідкого розплаву у ванні який є дуже важливим фактором і багато в чому обумовлює процеси шлакоутворення, зменшення хімічної та температурної неоднорідності розплаву і, як наслідок, ефективність плавки в цілому. Один цикл триває в залежності від конвертору триває 20—40 хв.

Мартенівська піч є подовим агрегатом і відноситься до печей відбивного типу. Робочий простір печі футеровано вогнетривкими матеріалами. Опалюється він паливом органічного походження з високою теплою згоряння, що забезпечує одержання світлого полум'я. Схема мартенівської печі з показом подачі палива і повітря з правого боку і відводом продуктів згоряння ліворуч, показана на рис.6.3.

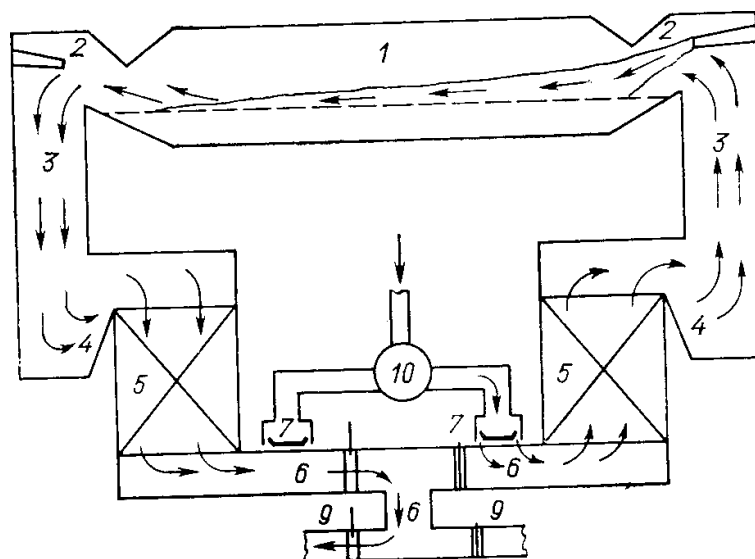


Рис.6.3. Схема мартенівської печі: 1 — робочий простір; 2 — головки; 3 — вертикальні канали; 4 — шлаковики; 5 — регенератори; 6 — горизонтальні канали; 7 — перекидні клапани: 7(лев.) — засувка в каналі до казана-утилізатора; 7(прав.) — засувка в каналі до димаря; 10 — вентилятор

Проходячи через попередньо нагріту насадку регенераторів повітря нагрівається до $1100 - 1200^{\circ}\text{C}$ і через головку вводиться в робочий простір печі. Таким чином згоряння палива відбувається в атмосфері високотемпературного повітря, тому в робочому просторі розвиваються температури, при яких сплави

з низьким змістом вуглецю (сталі) виходять у рідкому стані. В результаті згоряння палива утворюється смолоскип з температурою до 1900°C , що інтенсивно віддає (переважно випромінюванням) теплоту ванні і внутрішній поверхні огороження робочого простору.

Особливістю мартенівського виробництва сталі є те, що окисні процеси значною мірою розвиваються під дією кисню атмосфери печі. Це обумовлено тим, що мартенівську піч опалюють рідким чи газоподібним паливом, підтримуючи надлишок повітря для досягнення високої повноти згоряння палива. Для інтенсифікації мартенівського процесу ванну продувають киснем. Окислювання вуглецю супроводжується виділенням бульбашок і кипінням мартенівської ванни. Цей процес грає дуже важливу роль, тому що вирівнювання складу і температури металу в мартенівській печі здійснюється винятково в результаті кипіння ванни.

Протягом плавки, через певні моменти часу, за допомогою засувки і перекидних клапанів змінюють напрямок подачі палива і відводу продуктів згоряння. За один цикл (6 – 9 год.) у мартенівській печі можна виплавити до 900 т сталі.

Електродугова сталеплавильна піч є, як і мартенівська, подовим агрегатом, але джерелом теплоти для процесу виплавки сталі з твердої металевої шихти в ній служать електричні дуги, що утворюються в розрядному проміжку між торцями електродів і поверхні металу в результаті трансформації електричної енергії в теплову. Приклад електродугової печі непрямого нагрівання показаний на рис.6.4.

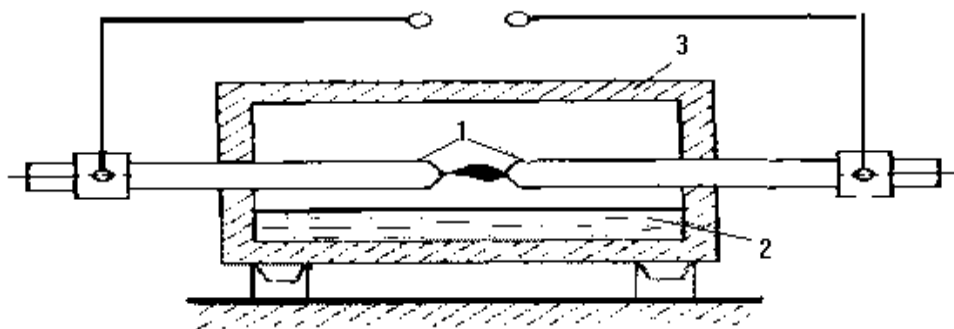


Рис.6.4. Схема електродугової печі непрямого нагрівання: 1 – електроди; 2 – рідкий метал; 3 – футерівка

У представлений на рис.6.4. печі дуга горить між електродами і вогнище температур трохи віддалене від поверхні металу. Значна частина теплоти, під

дією якої здійснюється плавка, у виді випромінювання досягає розплав після відображення від зводу печі, тому футерівка випробує високі теплові навантаження.

Для одержання високоякісних злитків металу використовують технологію *електрошлакового переплавляння* (ЕШП). Установка ЕШП є електропіччю опору, приклад такої установки показано на рис.6.5.

Принцип дії печей опору заснований на виділенні теплоти при проходженні струму по провіднику, який володіє великим електричним опором. Кількість теплоти (Дж), що виділяється в провіднику за законом Джоуля-Ленца, пропорційна квадрату сили струму, електричному опору провідника і часу. Опором може служити провідник чи матеріал, що нагрівається. Так, елементом опору в установках ЕШП є розплавлений шлак, який є електропровідним середовищем зі значним електричним опором. Крім того, шлак є середовищем, у якому відбувається рафінування металу.

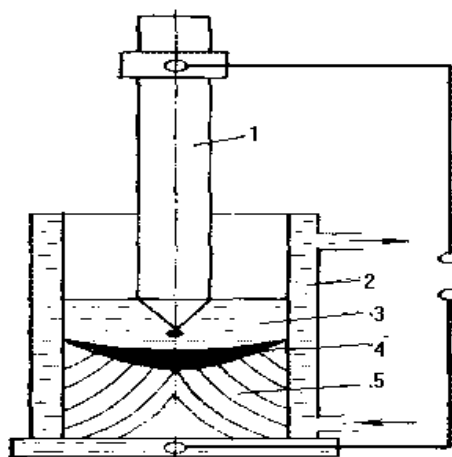


Рис.6.5. Схема установки ЕШП: 1 – електрод; 2 – кристалізатор; 3 – рідкий шлак; 4 – рідкий метал; 5 – наплавлений шар металу

Електрод подається в зону шлаку, де плавиться під дією джоулевої теплоти, після чого кристалізується в наплавлений шар. Переплавлений метал має значно кращі властивості за змістом домішок і має кращу структуру. Крім того, технологія ЕШП є більш екологічно чистою в порівнянні з іншими плавильними процесами. Ця технологія використовується для отримання злитків підвищеної якості, але має дуже високу вартість.

Існують також електропечі індукційні і електроновипромінюваного нагрівання принципи роботи яких викладені, наприклад, у [23; 38] і які тут не розглядаються. Слід відмітити, що електропечі потребують досить великих витрат

електричної енергії, що обумовлює значну собівартість електросталеплавильних процесів.

Специфіка сталеплавильного виробництва України істотно відрізняється від світового [8]. Більшість металургійних підприємств є ресурсо- і енергоємними та екологічно брудними і потребують технічної модернізації як у плані обладнання так і в плані технологій. Ці задачі обумовлюють проведення необхідних наукових досліджень і розробки науково обґрунтованих технічних та технологічних рішень.

Оскільки всі сталеплавильні процеси є високотемпературними то одним із шляхів їхнього вдосконалення є вплив на теплофізичні процеси, та розробка методів керування ними.

6.2. Загальні підходи до побудови математичних моделей і алгоритмів розрахунку процесів переносу в розплавах

Система рівнянь конвективного теплообміну. В силу специфіки металургійного виробництва, зв'язаної з високими температурами, агресивністю і непрозорістю розплавленого металу, відсутністю в багатьох випадках надійних експериментальних методик і приладів, значними матеріальними витратами на проведення експерименту, для проведення комплексних досліджень технологічних процесів доцільно використовувати методи математичного моделювання з проведенням обчислювальних експериментів на ЕОМ.

Відповідно до класифікації Самарського [39], дослідження на основі обчислювального експерименту складаються з п'яти основних стадій: побудова математичної моделі, написання обчислювального алгоритму, його програмування, виконання чисельного розрахунку, обробка та аналіз отриманих результатів рахунка.

Під математичною моделлю процесу розуміють рівняння чи систему рівнянь і відповідні умови однозначності, що зв'язують параметри процесу з факторами, що впливають на них.

Алгоритм розрахунку – точний і повний опис, що визначає обчислювальний процес, послідовність обчислювальних дій, що дозволяють переводити вихідні дані в кінцевий результат. Алгоритм є основою для створення програми розрахунку на ЕОМ.

Процеси плавки сталі, з погляду математичного моделювання, є дуже

складними системами, оскільки хід і результати плавки визначаються великим числом (сотнями) взаємозалежних величин, більшість з яких змінюється в широкому діапазоні в залежності від типу процесу та умов його реалізації. Можливо кілька типів математичних моделей, які різняться за обсягом параметрів, що охоплюються – повні і неповні (часткові, спрощені); за врахуванням зміни параметрів у часі – стаціонарні і нестаціонарні; за способом складання – статистичні (засновані на методах математичної статистики), детерміновані (що виражають функціональні зв'язки між параметрами плавки і факторами, що впливають,) та змішані. Оскільки створення всеосяжної детермінованої динамічної (нестаціонарної) моделі плавки являє собою надскладну задачу, застосовується декомпозиція процесу: розбивка плавки на елементарні фізико-хімічні процеси та їхній математичний опис. Об'єднання таких окремих досліджень дозволяє одержати картину плавки в цілому.

Загальні теоретичні відомості, щодо теплових процесів в металургійних агрегатах, викладені, наприклад, в [38]. Значною мірою ефективність плавки визначається взаємообумовленими процесами гідродинаміки та тепломасопереносу, що протікають у розплаві під час процесу. Вивчення даних процесів з метою розробки методів керування ними, є основою для вдосконалення існуючих і створення нових технологій виробництва сталі. Саме на це робиться акцент в даному розділі.

Розвиток обчислювальної техніки (збільшення швидкодії і пам'яті ЕОМ), а також розробка нових математичних методів дає можливість побудувати адекватну реальному процесу математичну модель і одержати повні і достатньо точні результати дослідження на основі обчислювальних експериментів.

Відмітимо, що в основі сталеплавильних процесів лежать фазові та хімічні перетворення внаслідок чого робочі середовища є багатофазними. Таким чином у загальному випадку необхідно розглядати гетерогенне середовище на основі рівнянь теплофізики багатофазних середовищ [31]. Обмежимося розглядом тільки газорідного середовища (рідка сталь з різноманітними газовими включеннями). Система рівнянь, що складають математичну модель, з урахуванням протікання в розплаві хімічних реакцій і при наявності електромагнітних впливів, буде мати вид [30].

Рівняння переносу імпульсу:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \rho \nabla v_{eff} \nabla \mathbf{V} - \nabla p + \beta (\rho - \rho_0) \mathbf{g} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}). \quad (6.1)$$

Рівняння нерозривності:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (6.2)$$

Рівняння переносу теплоти:

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right) = \nabla \lambda_{eff} \nabla T + q_j + q_v. \quad (6.3)$$

Рівняння переносу маси i -компоненти:

$$\rho \frac{\partial m_i}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) m = \rho \nabla D_{eff} \nabla m_i + w_i \quad (6.4)$$

Рівняння переносу газової фази:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) C = 0. \quad (6.5)$$

В (6.1) – (6.5) $\mathbf{V}$ – вектор швидкості м/с; t – час с; $v_{eff} = v + v_t$ – ефективна, молекулярна і турбулентна в'язкості м²/с; p – тиск Па; $\mathbf{g}$ – прискорення вільного падіння м/с²; T – температура °К; ρ – густина кг/м³; ρ_0 – густина, що відповідає початковій температурі розплаву кг/м³; c – теплоємність Дж/кг·°К; $\lambda_{eff} = \lambda + \lambda_t$ – ефективна молекулярна і турбулентна теплопровідності Вт/м·°К; $q_j = j^2 / \sigma_{eff}$ – потужність джоулева тепловиділення Вт/м³; q_v – потужність тепловиділення за рахунок хімічних реакцій Вт/м³; $w_i = \sum_{j=1}^r \nu_{j,i} \omega_j$ – джерело чи стік маси i -го компонента за рахунок хімічних перетворень ($\nu_{j,i}$ – коефіцієнт пропорційності j хімічної реакції; ω_j – швидкість протікання реакції; r – кількість можливих хімічних реакцій); σ – електрична провідність середовища (Ом·м)⁻¹; C – концентрація газової фази кг/м³; $\mathbf{j}$ – вектор щільності електричного струму А/м²; $\mathbf{B}$ – індукція магнітного поля Тл. Оскільки розглядаємо тільки рідку сталь, то нехтуємо стисливістю середовища за рахунок газової фази.

Помітимо, що якщо у фізичній постановці задачі необхідно враховувати вплив електричних і магнітних полів, то систему рівнянь (6.1) – (6.5) необхідно доповнити рівняннями електродинаміки Максвелла для їхнього визначення.

Для однозначного формулювання математичної моделі процесів тепло-масообміну і гідродинаміки необхідно систему рівнянь доповнити відповідни-

ми крайовими умовами. Вони поділяються на початкові умови, що задаються для початкового моменту часу, якщо модель нестационарна, і граничні умови, що задаються на границях розглянутої області.

Вид граничних умов визначається на основі відомостей про фізичні умови, в яких реалізується процес. Незалежно від субстанції, що переноситься, (теплоти, чи маси імпульсу) граничні умови (ГУ) можна розділити на наступні групи [30]: лінійні ГУ (наприклад завдання температури або теплового потоку на границі області, умова конвективного теплообміну з навколишнім середовищем), нелінійні ГУ (наприклад випромінювання на границі), спеціальні ГУ (наприклад умова Стефана).

При моделюванні гідродинамічних і тепломасообмінних процесів дуже часто доцільно перейти до безрозмірних величин, що дозволяє проводити більш узагальнений аналіз. Процес безрозмірювання ґрунтується на теоріях подібностей і розмірностей, викладених у [40], що часто дозволяє на основі нескладного аналізу диференціальних рівнянь і умов однозначності одержати деякі результати і висновки ще до початку інтегрування рівнянь.

Для уніфікації побудови алгоритмів розрахунку і розробки програм до них при записі системи рівнянь переносу доцільно використовувати узагальнене диференціальне рівняння конвективно-дифузійного переносу:

$$k \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial r^\nu u \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial r^\nu v \Phi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \varphi_\Phi, \quad (6.6)$$

де k , Φ , S визначають конкретний вид рівняння. Такий підхід дозволяє розробити єдиний алгоритм для розв'язання і спростити процес створення прикладного математичного забезпечення.

Загальна схема побудови скінченно-різницевого аналога математичної моделі. Розв'язок вищевикладених нестационарних нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описують взаємообумовлені процеси руху, тепло- і масопереносу в розплаві, в загальному випадку можливо лише чисельними методами з проведенням обчислювальних експериментів на ЕОМ.

Перехід від математичної моделі процесів тепломасопереносу до її чисельного алгоритму та реалізація його за допомогою ЕОМ, сьогодні найчастіше відбувається із застосуванням методу сіток. Побудова сіткових рівнянь може бути виконана з використанням методів скінчених різностей чи скінчених еле-

ментів. Однак реалізація методів скінчених елементів для задач тепло і масообміну пов'язана з значними технічними труднощами і недостатньою економічністю розрахунку, тому значна кількість дослідників віддають перевагу скінченно-різницеvim методам.

Основна ідея методу сіток полягає в переході від складних диференціальних (чи інтегральних) рівнянь до системи лінійних алгебраїчних, за допомогою дискретизації. В розрахункову область $\{r \in [0, r] \cup z \in [0, z] \cup \tau \in [0, \tau_k]\}$ вводиться в загальному випадку нерівномірна сітка ($r_j = r_{j-1} + \delta r_j$, $z_j = z_{i-1} + \delta z_i$, $\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta \tau$, $i=1,2,\dots,N$, $j=1,2,\dots,M$, $k=1,2,\dots,K$, δr_j , δz_i , $\Delta \tau$ – кроки сітки за відповідними координатами). Неперервна функція Φ замінюється дискретними значеннями у вузлах сітки, а диференціальні рівняння і граничні умови відповідними різницеvim аналогами.

Звертаємо особливу увагу, що процес дискретизації зв'язаний з такими фундаментальними поняттями теорії чисельних методів як апроксимація, стійкість, збіжність, що визначають коректність заміни диференціальної задачі різницевої (дискретної) і помилки, що внесені такою заміною, а отже і точність.

Не зупиняючись на подробицях наведемо основні поняття, а для більш детального знайомства рекомендуємо книги [7; 31; 39].

При заміні диференціальної задачі різницевою необхідно, щоб у границі при наближенні кроків сітки до нуля різницева задача збігалася з вихідною диференціальною, тобто різницева задача апроксимувала б диференціальну. Заміна різницевої задачі диференціальною вносить помилку, що називається погрішністю апроксимації.

В ході обчислювального процесу, помилки зв'язані з погрішністю розрахунку (округлення чисел у машині) можуть у залежності від алгоритму загасати чи зростати. У першому випадку говорять, що алгоритм стійкий, а в другому нестійкий.

Зі стійкості й апроксимації різницевої задачі впливає її збіжність, тобто розв'язок різницевої задачі прагне до точного при здрібнюванні сітки.

Процес побудови різницевої задачі може бути виконаний різними способами. Розглянемо приклад побудови чисельної схеми на основі методу контрольованого об'єму. Даний підхід має наступні достоїнства. По-перше, він має добрі консервативні властивості, завдяки чому забезпечується виконання законів збереження фізичної субстанції на будь-якій множині контрольних об'ємів, що

дозволяє одержати задовільні результати навіть на порівняно грубих сітках. По-друге, допускає дискретизацію складних обчислювальних областей у більш простій, хоча і не настільки ж точній формі, чим у методі скінчених елементів при введенні узагальнених координат.

Область навколо кожного вузла сітки розглядається як контрольний об'єм. Узагальнене рівняння (6.6) представлено у вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} = \varphi \Phi, \quad (6.7)$$

$$\text{де } F = u\Phi - \alpha \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad G = v\Phi - \alpha \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Рівняння (6.7) зінтегруємо за кожним контрольним об'ємом у всій розрахунковій області, з використанням теореми Гріна

$$\iint_{\omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial N}{\partial Y} \right) dXdY = \int_L (NdX - QdY).$$

Таким чином, одержимо дискретне рівняння

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} (\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j}^0) + (F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}) r_j \Delta r + (G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}) \Delta z = S_W, \quad (6.8)$$

$$\text{де } \Delta W = \int_{w_{i,j}} r dr dz, \quad S_W = \int_{w_{i,j}} \varphi \Phi dw, \quad \Delta r = r_{i,j+1/2} - r_{i,j-1/2}, \quad \Delta z = z_{i+1/2,j} - z_{i-1/2,j},$$

$$F_{i+1/2,j} = (u\Phi)_{i+1/2,j} - \alpha_{i+1/2,j} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{(\delta z)_{i+1/2}},$$

$$F_{i-1/2,j} = (u\Phi)_{i-1/2,j} - \alpha_{i-1/2,j} \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{(\delta z)_{i-1/2}},$$

$$G_{i,j+1/2} = (v\Phi)_{i,j+1/2} - (r\alpha)_{i+1/2,j} \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{(\delta r)_{j+1/2}},$$

$$G_{i,j-1/2} = (v\Phi)_{i,j-1/2} - (r\alpha)_{i-1/2,j} \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{(\delta r)_{j-1/2}},$$

$$(\delta z)_{i+1/2} = z_{i+1,j} - z_{i,j}, \quad (\delta r)_{j+1/2} = r_{i,j+1} - r_{i,j}, \quad (\delta z)_{i-1/2} = z_{i,j} - z_{i-1,j}, \quad (\delta r)_{j-1/2} = r_{i,j} - r_{i,j-1}.$$

Джерельний член S_W визначається на кожному контрольному об'ємі за допомогою центрально-різницевої апроксимації.

Таким чином (6.8) можемо записати у вигляді системи алгебраїчних рівнянь

$$A_{i+1,j}\Phi_{i+1,j} + A_{i-1,j}\Phi_{i-1,j} + A_{i,j+1}\Phi_{i,j+1} + A_{i,j-1}\Phi_{i,j-1} - A_{i,j}\Phi_{i,j} + B_{i,j} + S_{wi,j} = 0. \quad (6.9)$$

Деякі значення, що входять до (6.8), беруться з відомого часового шару, внаслідок чого система (6.9) є лінійною.

Далі вихідне рівняння розщеплюється на два одномірних і, завдяки вибору трьохточкових шаблонів апроксимації в кожному координатному напрямку, зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь із трьохдіагональною структурою.

Апроксимація конвективного потоку через грані контрольного об'єму визначає конкретний вид різницевого аналога, а також порядок точності схеми і її збіжність. Проблема підвищення порядку апроксимації з одночасною стійкістю розрахунку у випадках, коли необхідно враховувати конвективний доданок, якоюсь мірою зважається за рахунок використання схем підвищеного порядку точності, наприклад, схем Райсби, Леонарда та інші. Дані схеми дійсно дозволяють підвищити точність результатів, особливо на неадаптованих до структури течії сітках. Однак використання їх приводить до істотного ускладнення чисельного алгоритму. На відміну від центрально-різницевої схем або схеми проти потоку, що реалізуються на трьохточковому шаблоні, схеми з підвищеним порядком точності вимагають більшої кількості розрахункових вузлів. Використання багатоточкових шаблонів зв'язано зі значним ростом обчислювальних ресурсів, оскільки алгоритм не зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь із трьохдіагональною структурою за допомогою методу прогонки. Іноді навіть застосування деяких схем підвищеного порядку точності, наприклад QUICK і MLU, не завжди дозволяє одержати результати, що сходяться, оскільки дані схеми не є цілком протипоточними. В той же час схема з різностями проти потоку дає цілком задовільні результати. В зв'язку з вищесказаним, для розрахунку течій розплавів у ваннах металургійного агрегату можуть бути рекомендовані схеми, що дозволяють звести чисельний розв'язок до економічних алгоритмів.

Схема з центральними різностями.

Відповідно до центрально різницевої апроксимації для грані контрольного об'єму з індексом $(i+1/2)$ запишемо $\Phi_{i+1/2,j} = 0.5(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j})$.

Після розщеплення (6.9) по координатних напрямках можемо для напрямку z дану схему записати як:

$$\left. \begin{aligned} A_{i-1,j} &= \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{\alpha_{i-1/2,j}}{(\delta z)_{i-1/2}} \right) r_j \Delta r \\ A_{i,j} &= \frac{\Delta W_{i,j}}{\Delta t} + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{\alpha_{i-1/2,j}}{(\delta z)_{i-1/2}} \right) r_j \Delta r + \left(\frac{1}{2} k_2 - \frac{\alpha_{i-1/2,j}}{(\delta z)_{i-1/2}} \right) r_j \Delta r \\ A_{i+1,j} &= \left(\frac{1}{2} k_2 + \frac{\alpha_{i+1/2,j}}{(\delta z)_{i+1/2}} \right) r_j \Delta r \\ B_{i,j} &= \frac{\Delta W_{i,j}}{\Delta t} \Phi_{i,j}^0 + S_{Wi,j} \end{aligned} \right\}, \quad (6.10)$$

де $k_1=0.5(u_{i,j} + u_{i-1,j})$, $k_2=0.5(u_{i+1,j} + u_{i,j})$.

Дана схема має другий порядок точності, однак розрахунки по ній дають стійкий результат тільки при $|Re_{cell}| \leq 2$ [31], де $Re_{cell} = u_{i+1/2,j} \Delta z / \alpha_{i+1/2}$ – сіткове число Рейнольдса. Це зв'язано з тим, що дана схема не має властивості транспортності, що відображає перенос фізичної субстанції тільки в напрямку вектора швидкості (вниз за потоком). Дана обставина робить складним її використання для розрахунку течій при високих числах Re .

Схема проти потоку.

Для усунення вказаного недоліку застосовують несиметричну апроксимацію схемою з різницями проти потоку

$$\Phi_{i+1/2,j} = \begin{cases} \Phi_{i,j}, & \text{если } u_{i+1/2,j} > 0 \\ \Phi_{i+1,j}, & \text{если } u_{i+1/2,j} \leq 0 \end{cases}.$$

Втрата порядку точності в порівнянні зі схемою (6.10) тут компенсується абсолютною стійкістю. Дана схема для розщепленого рівняння (6.9) за напрямом z прийме вид

$$\left. \begin{aligned} A_{i-1,j} &= \left(\max(k_1, 0) + \frac{\alpha_{i-1/2,j}}{(\delta z)_{i-1/2}} \right) r_j \Delta r \\ A_{i,j} &= \frac{\Delta W_{i,j}}{\Delta t} + \left(\max(-k_1, 0) + \frac{\alpha_{i-1/2,j}}{(\delta z)_{i-1/2}} \right) r_j \Delta r + \left(\max(k_2, 0) - \frac{\alpha_{i-1/2,j}}{(\delta z)_{i-1/2}} \right) r_j \Delta r \\ A_{i+1,j} &= \left(\max(-k_2, 0) + \frac{\alpha_{i+1/2,j}}{(\delta z)_{i+1/2}} \right) r_j \Delta r \\ B_{i,j} &= \frac{\Delta W_{i,j}}{\Delta t} \Phi_{i,j}^0 + S_{Wi,j} \end{aligned} \right\}, \quad (6.11)$$

де $k_1 = 0.5(u_{i,j} + u_{i-1,j})$, $k_2 = 0.5(u_{i,j} + u_{i+1,j})$, функція $\max(a,b)$ повертає максимальне значення з a і b .

При апроксимації граничних умов використовуються фіктивні контрольні об'єми, що знаходяться за межами розрахункової області.

Особливості чисельного розв'язання рівнянь гідродинаміки. Для розв'язку задач гідродинаміки в'язкої нестисливої рідини існує кілька методів розрахунку, в залежності від використовуваних змінних: «вихор – функція струму», «вихор – швидкість» і «швидкість – тиск» [30]. Застосування перших двох дозволяє виключити з числа шуканих функцій тиск і в такий спосіб спростити алгоритм. У той же час дані методи володіють поганою фізичною інтерпретацією, що зв'язано з постановкою нефізичної граничної умови для вихору на твердих границях.

Використання природних перемінних «швидкість – тиск» є більш виправданим з погляду фізичності методу, що особливо важливо при розрахунках складних теплотехнічних задач. Головні труднощі застосування таких методів, полягають в побудові такого поля тиску, що забезпечує соленоїдальність поля швидкості.

В основу таких алгоритмів може бути покладена ідеологія розщеплення рівнянь руху за фізичними факторами, що розроблена Білоцерківським [7]. До переваг такого підходу варто віднести можливість алгоритмізації складних процесів шляхом розбивки за кожним часовим кроком на елементарні фізичні процеси, що дозволяє досліджувати вплив того чи іншого фактора окремо.

Ще однією особливістю розв'язку рівнянь гідродинаміки є той факт, що використання звичайних сіток, коли всі величини розраховуються в тих самих вузлах, у цьому випадку може привести до нефізичних результатів. Для того щоб цього уникнути цього в [7] пропонується використовувати розрахункову сітку зі зміщеними вузлами, яка одержала назву гібридної. Відповідні елементарні об'єми такої сітки для розрахунку рівнянь переносу імпульсу руху і для тиску показані на рис.6.6.

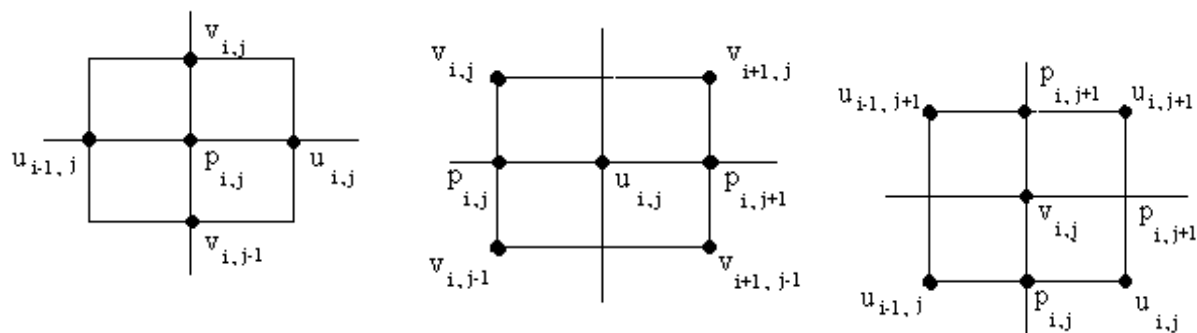


Рис.6.6. Елементарні комірки гібридної сітки а) комірка для розрахунку тиску, напруженості, температури; б) комірка для розрахунку осьового компонента швидкості; в) комірка для розрахунку радіального компонента швидкості

На такій сітці, при розв'язку рівнянь руху, компоненти вектора швидкості і тиск розраховуються в різних вузлах. Застосування методів розрахунку в природних змінних «швидкість–тиск», як правило, приводить до необхідності інтегрувати в тій чи іншій формі рівняння Пуассона для тиску. Для задач в яких розглядаються замкнені ємності значні обчислювальні труднощі можуть виникати при реалізації граничних умов другого або третього роду, що полягають у поганій збіжності ітераційного процесу.

Нижче представлений алгоритм розв'язок рівнянь руху рідини заснований на розщепленні процесу за фізичними факторами, що при чисельному інтегруванні не вимагає безпосереднього розв'язання рівняння Пуассона.

В силу того, що вихідні рівняння нелінійні, алгоритм їхнього розв'язку має ітераційний характер. Часова вісь розбита на невеликі кроки за часом $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Похідна за часом на кожному кроці за часом уявляється у вигляді лінійної різниці. Перехід від шару t^n до шару t^{n+1} визначається через послідовний ряд функцій:

$$\vec{V}^n = \vec{V}^{(0)}, \vec{V}^{(1)}, \dots, \vec{V}^{(k)}, \vec{V}^{(k+1)}, \dots, \vec{V}^{(s)} = \vec{V}^{(n+1)},$$

що наближають невідому швидкість. На кожній ітерації реалізується наступна неявна схема:

$$\frac{\vec{V}^{k+1/2} - \vec{V}^k}{\Delta t} + \nabla \cdot (\vec{V}^k \cdot \vec{V}^{k+1/2}) - \alpha_{eff} \Delta \vec{V}^{k+1/2} + \nabla p^k = 0, \quad (6.12)$$

$$\delta p^{k+1} = -\gamma \nabla \vec{V}^{k+1/2}, \quad p^{k+1} = p^k + \delta p^{k+1}, \quad (6.13)$$

$$\frac{\vec{V}^{k+1} - \vec{V}^k}{\Delta t} + \nabla \delta p^{k+1} = 0. \quad (6.14)$$

У результаті виконання (6.12) – (6.14) одержуємо поле швидкостей, що буде задовольняти умові соленоїдальності (6.2) краще, ніж початкове наближення. Замість розв’язання рівняння Пуассона для тиску пропонується (6.13), де виправлення до поля тиску визначаються, як пропорційні дивергенції поля швидкостей, тобто тиск на даному елементарному об’ємі розрахункової області повинен зменшитись у випадку джерела субстанції, що переноситься, і збільшитись у випадку стоку. Подібний підхід до побудови обчислювального алгоритму одержав назву методу послідовних потенційних добавок.

До (6.13) входить ітераційний параметр γ що дозволяє керувати швидкістю збіжності процесу. Значення його залежить від характеристик розрахункової сітки і параметрів конкретної задачі.

Як умову закінчення ітераційної процедури варто вибрати умову задоволення отриманого поля швидкостей рівнянню неперервності (6.2) із заданою точністю для кожного контрольного об’єму.

6.3. Приклади чисельних розрахунків процесів гідродинаміки та теплообміну в розплавах

Розрахунок течії розплаву в циліндричній ванні при проходженні крізь нього електричного струму. Технології з використанням сильного електричного струму досить широко поширені в різних галузях промисловості [18; 47]. Типовим прикладом є електрометалургія. Широке впровадження електротехнологій в процесі отримання сплавів і металів пояснюється багатьма причинами. По-перше, деякі метали (алюміній, магній), в основному, одержують електrolітичним шляхом у силу особливостей їхнього існування в природних умовах. По-друге, виплавка металів в електропечах дозволяє одержувати метал високої якості і сполучати процес виплавки з одержанням заготовок потрібно ї форми. Не останню роль грають і міркування зв’язані з охороною навколишнього середовища.

Перші електрошлакові печі заявили ще в середині 50-х років. Але лише через 10 – 15 років потому дослідники звернули увагу на існування в рідких фазах металу та шлаку таких явищ як теплова і електровихорьова конвекція. Саме ці явища обумовлюють перемішування металу та шлаку під час процесу.

Враховуючи той факт, що в теперішній час спостерігається стійка тенденція до підвищення потужності електрометалургійних установок (наприклад, електролізери для одержання алюмінію й інших металів використовують струм до 200–300 кА; індукційні каналні печі мають потужність від 300 – 500 кВт до 1000–5000 кВт), інженерам та технологам доводиться мати справу з такими факторами, як посилення ролі електромагнітних сил і магнітогідродинамічними (електровихоровими) течіями як одним із проявів їхнього впливу.

Тому доцільні пошуки розумного використання закономірностей електровихорових течій для удосконалювання технології або зменшення їхнього негативного впливу.

Розглянемо течію електропровідної рідини, яка виникає під час проходження крізь неї електричного струму.

Для розв’язання рівнянь руху необхідно знати розподіл об’ємної електромагнітної сили $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ (Н/м³), по розрахунковій області. Для цього можна використати систему рівнянь електродинаміки Максвелла в диференціальній формі:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (6.15)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А² – магнітна постійна; $\mathbf{E}$ – напруженість електричного поля В/м, вважаємо що для рідких металів магнітна проникність $\mu \approx 1$.

Величини, що входять в рівняння (6.15), зв’язані між собою співвідношеннями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = q \mathbf{E}, \quad (6.16)$$

де $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/(Н·м²) – електрична постійна; ε – діелектрична проникливість середовища; q – питома електропровідність речовини См/м.

Розплав металу є хорошим провідником електричного струму, тому в квазістаціонарному стані при постійній щільності струму другим членом у правій частині третього рівняння (6.15) – щільністю току зміщення нехтуємо.

Використовуючи рівняння (6.15) та (6.16), можемо отримати співвідношення для визначення напруженості магнітного поля в кожній точці шлакової ванни (рекомендуємо провести математичні викладки самостійно):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = 0, \quad \text{або} \quad \Delta \mathbf{H} = 0, \quad (6.17)$$

де Δ – оператор Лапласа.

Ці векторне рівняння можна представити у вигляді сукупності проекцій вектору $\Delta \vec{H}$ на вісі r , φ і z циліндричної системи координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial H_r}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 H_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial Z^2} - \frac{H_r}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial H_\varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial Z^2} - \frac{H_\varphi}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial H_z}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial Z^2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.18)$$

У зв'язку з осьовою симетрією $H_r = H_z = 0$. Середнє рівняння для H_φ – проекція вектора $\Delta \vec{H}$ на вісь φ – будемо використовувати для визначення $\vec{H}$. Запишемо його у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R H_\varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial Z} (R H_\varphi) \right] = 0. \quad (6.19)$$

Після визначення H_φ в кожній точці шлакової ванни визначимо $\vec{f}$:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \mu_0 (-H_\varphi^2 / r - H_\varphi \partial H_\varphi / \partial R) \vec{i}_r + \mu_0 (-H_\varphi \partial H_\varphi / \partial Z) \vec{i}_z. \quad (6.20)$$

Якщо тепер знайти $\text{rot } \vec{f}$, то отримаємо:

$$\text{rot}(\vec{j} \times \vec{B}) = \vec{i}_\varphi \left(\frac{\partial}{\partial Z} \left(-\frac{H_\varphi^2}{R} \right) - \frac{\partial}{\partial Z} H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial R} H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial Z} \right) = \vec{i}_\varphi \frac{\partial}{\partial Z} \left(-\frac{H_\varphi^2}{R} \right). \quad (6.21)$$

Проаналізуємо умову потенційності електромагнітної сили, тобто коли $\text{rot } \vec{f} = 0$. З (6.21) випливає, що $\vec{f}$ потенційна коли H_φ є функцією тільки радіальної координати. В свою чергу з (6.20) бачимо, що це означає відсутність радіальної складової вектору електричного струму. Можемо зробити висновок, що електромагнітна сила непотенційна, якщо вектор щільності електричного струму має радіальну компоненту. Непотенційність сили означає, що вона змусить рухатись нерухому рідину, оскільки ротор швидкості пропорційний ротору сили. Таким чином пропускання електричного струму, який неоднорідний за простором, є чинником виникнення руху електропровідної рідини.

Задача з розподілення густини об'ємних електромагнітних сил за

об'ємом ванни зводиться до знаходження напруженості електромагнітного поля струму H_φ з (6.19) та подальшого розрахунку сили $\mathbf{f}$ за (6.20).

Для однозначного розв'язку (6.19) необхідно сформулювати граничні умови.

Запишемо їх, виходячи з наступних припущень: на дні ванни вважається рівномірне розподілення щільності струму; на вільній поверхні, виключаючи електрод, будемо використовувати закон повного струму, що буде мати вигляд:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \mathbf{I}, \quad (6.22)$$

де $\mathbf{I}$ – повний струм крізь контур $\mathbf{I}$.

На поверхні електроду рівномірний розподіл струму використовувати не можна, в зв'язку з тим, що по краях електроду повинна мати місце концентрація струму. В цьому випадку будемо використовувати розподіл струму для випадку витoku його в необмежену область з точкового електроду (задачу знаходження такого розподілу розв'язано в [47]). При переході до безрозмірного вигляду потрібно відмітити особливість – відсутність визначальної швидкості. В цьому випадку, в якості масштабу швидкості можна використати величину R_w/v , в якості масштабу часу R_w^2/v , параметр, який визначає силу електромагнітного впливу $S = \mu_0 I^2 / 4\pi^2 \rho v$. Введемо безрозмірні змінні: $r = R/R_w$, $z = Z/R_w$, $h_\varphi = H_\varphi/H_0$, $\tau = t v / R_w^2$, $u = U_\varphi v / R_w$, $v = U_r v / R_w$, де $H_0 = I / 2\pi R_w$.

Граничні умови для компонент швидкості, виходячи з умов «прилипання» будуть

$$u = v = 0. \quad (6.23)$$

Для електромагнітного поля струму приведемо граничні умови в скінченному вигляді

$$h_\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } r = 0, \quad z \in [0, z_H] \\ 1 & \text{при } r = 1, \quad z \in [0, z_H] \\ \frac{1 - \sqrt{1 - (r/r_e)^2}}{r} & \text{при } z = z_H, \quad r \in [0, r_e] \\ 1/r & \text{при } z = z_H, \quad r \in [r_e, 1] \\ r & \text{при } z = 0, \quad r \in [0, 1] \end{cases} \quad (6.24)$$

Алгоритм чисельного розв'язку задачі наступний.

До початку інтегрування рівнянь руху отримаємо з розв'язку граничної задачі (6.19), (6.24) щільність електромагнітного поля в розрахунковій області.

Для цього можна використати один з відомих чисельних методів розв'язку еліптичних диференціальних рівнянь. На основі розрахунку можна побудувати картину розтікання електричного струму в ванні, якщо ввести функцію електричного струму (за аналогією функції гідродинамічного струму) $\psi_J = rh_\phi$.

На основі відомого розподілу електромагнітного поля струму проводиться розрахунок рівнянь руху з урахуванням дії електромагнітної сили.

Результати розрахунків у вигляді картини розтікання електричного струму ($\psi_J = \text{const}$) та гідродинамічних ліній струму представлено на рисунку 6.7.

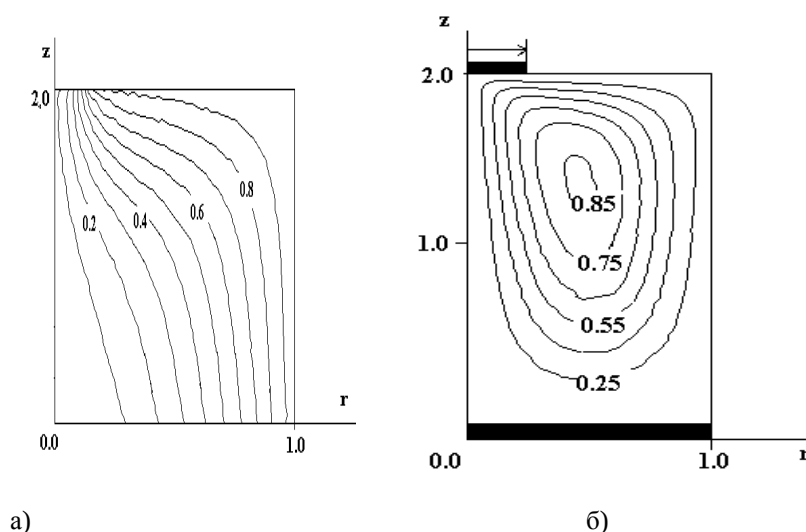


Рис 6.7. Розтікання електричного струму (а) та гідродинаміка розплаву (б) по половині перетину ванни при $S=100$

Як бачимо з рисунку, в наслідок того, що електричний струм розподілений по перетину ванни нерівномірно, тобто є неоднорідний за простором, виникає циркуляційних рух розплаву. Його потрібно враховувати при розрахунку процесів теплообміну. В дослідженнях [47] з'ясовано, що даний гідродинамічний режим суттєво впливає на інші процеси переносу у ванні електросталеплавильних агрегатів.

Розрахунок теплообміну у ванні кисневого конвертора. Дослідження конвективного теплообміну в конверторній ванні під час продувки її з гори струменем окислювального газу методами математичного моделювання неодноразово проводились різними дослідниками [18]. Ця задача має дуже важливе значення, оскільки саме циркуляційний потік який виникає у ванні в наслідок механічного впливу струменя та руху бульбашок газу, що утворюються в результаті хімічних реакцій окислювання, визначає перенос теплоти і маси у ван-

ні, що впливає на ефективність процесу плавки. В якості розрахункової моделі можна взяти половину перетину циліндричної ванни за винятком зони лунки, яка утворюється під впливом струменя. Профіль лунки можна описати як верхню обертання.

Схему продувки конвертерної ванни представлено на рисунку 6.8. Струмінг газу, який вдувається через фурму кисневого дуття (1) утворює на поверхні металу лунку (2) на поверхні якої він реагує з розплавом (3), тобто утворюється реакційна зона. При цьому в об'ємі металу виникає циркуляційний потік, який спрямований в гору поблизу поверхні лунки і вниз біля стінки конвертора. Цей потік здійснює конвективний перенос нагрітого металу в глибину ванни.

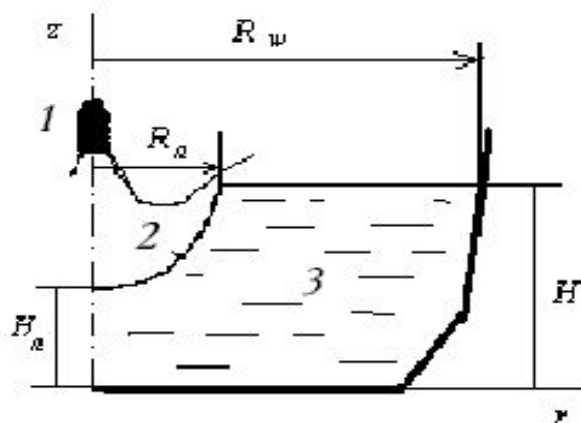


Рис 6.8. Схема продувки конвертерної ванни

В силу розташування фурми за віссю ванни припускаємо вісьосиметричність процесів і можемо використати в якості розрахункової моделі половину перетину ванни. Визначення геометричних розмірів розрахункової області виконано відповідно до параметрів 60-тонної конвертерної ванни: $R_w=1750$ мм, $R_d=250$ мм, $H=1200$ мм, $H_d=750$ мм. Теплофізичні властивості розплаву прийняті: $\rho=7100$ кг/м³, $\lambda=100$ Вт/м·К, $c=838$ Дж/кг·К, $\nu=1\cdot 10^{-6}$ м²/с.

При визначенні параметрів Re_{eff} і S і граничних умов, великого значення набуває вибір визначальної швидкості U , що є характерною швидкістю руху розплаву в зоні лунки, яка осереднена за товщиною шару, що захоплюється

$$U = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta} V dn.$$

Експериментальні дані не дозволяють у даний час дати однозначну оцінку швидкості, оскільки відрізняються навіть по порядку (від 10 м/с

до 10^{-1} м/с). У нашій роботі значення визначальної швидкості U обрано з використанням експериментальних і розрахункових даних про швидкість руху поверхневих шарів металу в районі реакційної зони й уточнено за допомогою чисельних експериментів. Перейдемо до безрозмірних величин $r=R/R_w$, $z=Z/R_w$, $h_\varphi=H_\varphi/H_0$, $\tau=t/R_w$, $u=V_z/U$; $v=V_r/U$, $\Theta=(T-T_0)/(T_{p.з.}-T_0)$, де $T_{p.з.}$ – температура реакційної зони розплаву, T_0 – початкова температура розплаву. Розмірні значення початкової температури T_0 і $T_{p.з.}$ вважаються відомими і дорівнюють 1200°C та 2200°C відповідно.

Математична модель задачі являє собою систему рівнянь (6.1)–(6.3), (6.5). Граничні умови для рівнянь гідродинаміки і теплообміну в розглянутій області прийняті наступні: на осі ванни

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0; \quad (6.25)$$

на дні і стінках з умов непроникності і «прилипання», а також з урахуванням відводу теплоти через дно і стінки ванни:

$$v = u = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{или} \quad r = 1; \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = -Q_1 \quad \text{при} \quad z = 0; \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = -Q_2 \quad \text{при} \quad r = 1; \quad (6.28)$$

де Q_1 і Q_2 – безрозмірні теплові потоки через дно і стінки відповідно. Втрати теплоти через стінку і дно ванни складають 2 – 5% від загального балансу теплоти у ванні. Оскільки вільна поверхня металу покрита шаром шлаку, то нехтуємо відводом теплоти на границі шлак-розплав, і граничні умови визначаються виразом

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = z_H, \quad r_L < r \leq 1. \quad (6.29)$$

Відповідно до вище викладеного, на поверхні лунки задана дотична до поверхні швидкість U . Гранична умова для температури в на поверхні лунки формулюється на основі даних про температуру реакційної зони і ставиться шляхом завдання теплового потоку від лунки до основного об'єму металу

$$Q_L = k_p(\Theta - \Theta_{p.з.}), \quad (6.30)$$

де k_p – безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі, що визначається згідно методики прийнятої в [31], $\Theta_{p.z.}$ – безрозмірна температура реакційної зони; Θ – температура поверхневих шарів металу поблизу реакційної зони.

Початкові умови для гідродинамічних і теплових величин задаються виходячи з припущення про спокій розплаву в початковий момент часу й однорідності початкового температурного поля по всьому обсязі металу

$$\nabla \Theta = u = v = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (6.31)$$

Система рівнянь конвективного теплообміну з приведеними граничними умовами розв'язувалась чисельно на ЕОМ. Результати розрахунку у вигляді ліній струму та розподілу ізотерм у ванні для різних моментів продувки представлено на рис. 6.9. Під впливом струменю газу утворюється циркуляційний потік, який спрямований в гору біля зони лунки і вниз біля бічної стінки конвертора рис.6.9а.

Поблизу реакційної зони утворюється тонкий високотемпературний шар рис 6.9б. Гарячий метал розповсюджується з часом по всьому об'єму ванни рис 6.9в, г.

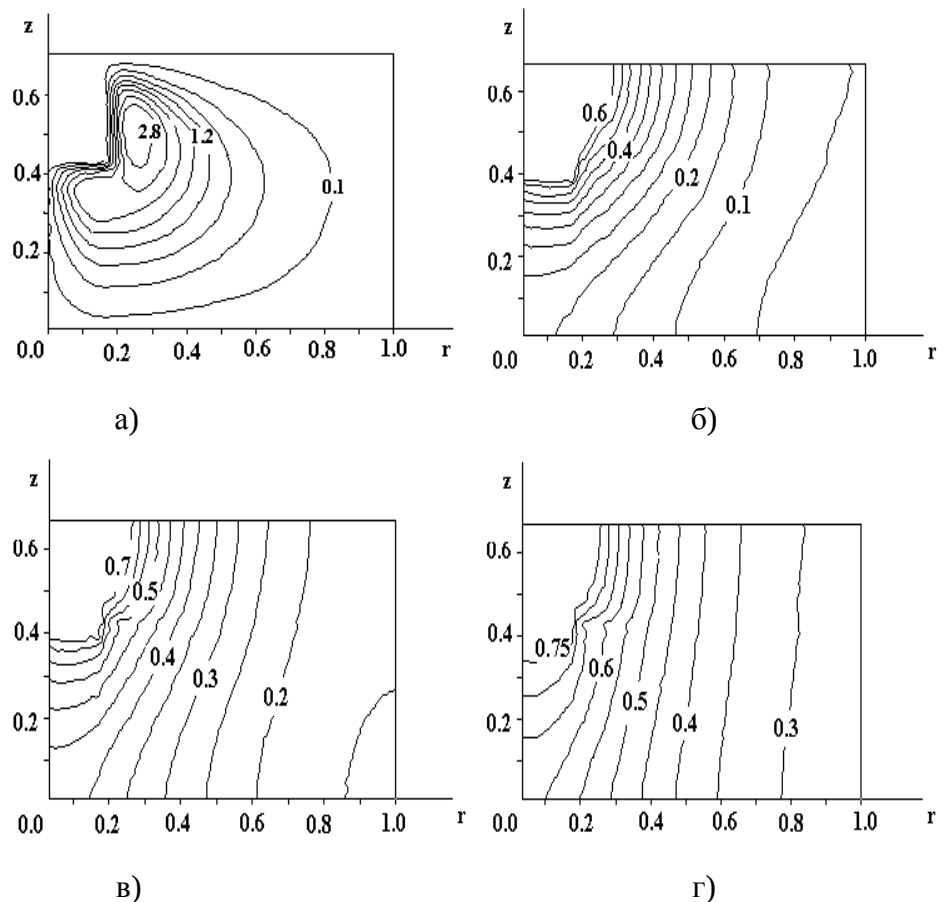


Рис.6.9. Лінії струму в ванні (а) і ізотерми для різних періодів продувки (б, в, г)

Тепловий стан ванни в свою чергу визначає умови протікання хімічних реакцій та процесів масопереносу в об'ємі реактора, що в решті решт обумовлює техніко-економічні показники плавки.

Задачі вдосконалення сталеплавильних технологій. Як уже було сказано вище, підвищення ефективності сталеплавильних технологій є дуже важливою задачею промислового комплексу України і економіки країни в цілому.

Задача технічного вдосконалення металургійного виробництва включає в себе цілий ряд досить об'ємних проблем серед яких можна виділити:

- технічне переобладнання промисловості, оскільки в теперішній час від 50 до 80% основних засобів виробництва є відпрацьованими та морально застарілими;
- розвиток нових ефективних форм виробництва таких як міні металургійні заводи, що відображає світові тенденції розвитку цієї галузі;
- вирішення питань пов'язаних з екологічними обставинами, оскільки українські виробництва в цьому напрямі на сьогодні абсолютно не відповідають стандартам Євросоюзу;
- впровадження нових технологій більш високого рівня, що дозволить підтримувати конкурентоспроможність вітчизняної продукції на світовому ринку.

В цьому сенсі важко недооцінити роль наукових досліджень, які є необхідною умовою для створення нових принципів виробництва і підвищення ефективності сталеплавильних технологій. Використання методів математичного моделювання є одним із загальноприйнятих теоретичних методів досліджень, які дозволяють без великих матеріальних витрат проводити якісну і кількісну оцінку тих або інших фізичних ефектів, встановлення яких іншими методами є досить складним.

Так, якщо розглядати процес електрошлакового зварювання (процес подібний електрошлаковому переплавленню) то можна навести наступний приклад. У процесі електрошлакового зварювання електрод, що переплавляється, безупинно подається в зону розплавленого шлаку. При великій швидкості подачі електрода його торець розташовується поблизу поверхні розділу шлаку-рідкий метал і струмінь шлаку викликає глибоку деформацію поверхні розділу. Епіцентр виділення джоулевої теплоти зміщується при цьому всередину металеві ванни, що приводить до радіального росту кристалів у металі, що крис-

талізується, і появи осьової «слабини» зварного шва. Приведений приклад ілюструє несприятливий вплив електровихорових течій.

Таким чином, виникає необхідність ретельного розгляду ролі електромагнітних сил і розумного їх використання для зм'якшення несприятливих явищ чи підвищення ефективності технологічного процесу.

В [18] вивчалися процеси гідродинаміки рідкої сталі в ванні кисневого конвертора. На основі отриманих результатів показано, що вимушена конвекція суттєво впливає на вісь процесу плавлення і зношення футерівки агрегату. Ці дослідження дозволяють робити висновки про можливість використання зовнішніх впливів для керування теплофізичними процесами у ванні, підвищення техніко-економічних показників.

Так в [18] показані можливості використання електричного струму для покращення технологічних показників конверторного та мартенівського плавлення.

При відносно невеликих витратах електричної потужності (0,1–0,5 КВт/т) фахівцям Інституту чорної металургії України вдалося досягнути ряд енерго та ресурсозберігаючих ефектів. Так, при виплавці сталі в конверторах одержана економія чавуну 4,7–8,1 кг/т

У мартенівській ванні знижені витрати чавуну з 607 до 583 кг/т, витрати палива знижені на 7 кг/т сталі, швидкість нагріву металу збільшилась на 15%.

Одним із важливих ефектів які були одержані і в конверторному, і в мартенівському процесах це зниження пилу в газах (продуктах горіння), які відходять, що суттєво сприяє покращенню екологічної ситуації в цеху виробництва.

Всі розглянуті приклади свідчать про необхідність вивчення теплофізичних процесів у рідкій ванні з урахуванням різного роду впливів на розплав для вироблення технічно грамотних та науково-обґрунтованих рішень по вдосконаленню технологій. Комплексне дослідження в цьому напрямі неможливе без використання математичного апарату.

Р О З Д І Л 7

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВІДЦЕНТРОВОГО ЛИТТЯ ДЕТАЛЕЙ ОБЕРТАННЯ

Процес створення і розвитку нових технологій у металургії, таких як безперервний розлив стали, виробництво труб та інших деталей обертання за допомогою відцентрового лиття [48] вимагає розробки нових методів, що дозволяють розв'язувати, задачі, які виникають у зв'язку з цим. Відмітною рисою таких задач є: наявність неоднорідних нерівномірних температурних полів; наявність масових і поверхневих силових впливів; існування, як мінімум, двох фаз матеріалу, що утворить об'єкт дослідження; рух межі розділу фаз, пов'язаний зі зміною температури на всьому протязі процесу, що розглядається. Адекватна постановка таких задач можлива лише в припущенні взаємного впливу температурних і механічних полів на параметри технологічного процесу.

В [2; 19; 31; 34], присвячених теоретичному та експериментальному дослідженню впливу механічних факторів на температуру фазового переходу було експериментально показано, що в ряді задач напружено-деформований стан у тілі впливає на параметри фазового переходу. Для врахування взаємного впливу механічних і температурних полів потрібно сформулювати загальний метод, який дозволяє за заданими зовнішніми тепловими і механічними впливами визначати напружено-деформований стан у тілі, його температуру і закон руху фронту кристалізації. Розробка такого методу можлива лише при спільному використанні рівнянь і законів механіки деформівного твердого тіла і теорії теплопровідності.

Поліпшення технології відцентрового лиття, створення більш досконалих конструкцій відцентрово-ливарних машин, вибір оптимальних режимів їхньої роботи – важлива промислова задача. Рішення її не можливе без ретельного і, по можливості, більш повного математичного моделювання процесу лиття, тим більше що експериментальні дослідження особливостей кристалізації металу у виливниці відцентрової машини, як правило, утруднені (високі температури розплаву, наявність обертання, загазованість порожнини виливниці й ін.).

Однак процеси, що виникають під час руху і кристалізації розплаву в полі відцентрових сил, дуже складні і не завжди піддаються комплексному опису. Це обумовлено тим, що реальні умови лиття визначаються великим числом факторів, що впливають на процес, унаслідок чого необхідно враховувати істотну нестационарність процесу, наявність вільної поверхні і фронту фазових перетворень та ін.

До теперішнього часу є досить великий досвід досліджень по теорії і практиці відцентрового лиття. В цьому зв'язку можна згадати, наприклад, [34; 46; 48]. Проведені різними авторами дослідження носять, в основному, експериментальний характер і стосуються лише окремих сторін процесу затвердіння розплаву у виливниці при відцентровому литті.

Представляється досить очевидним, що без теоретичного аналізу цих обставин неможливо повною мірою оцінити якість готової продукції, встановити наявність і рівень залишкових напружень, оцінити точність дотримання геометричних характеристик.

Визначені можливості в цьому напрямку дає спільне використання спадкової теорії в'язкопружності і теплопровідності, в рамках яких розглянуті задачі, що тут виникають.

7.1. Основи технології відцентрового лиття

В даний час у металургійній промисловості одним з найбільш розповсюджених і прогресивних способів відливу різноманітних тіл обертання є відцентрове лиття. В такий спосіб відливають труби з чавуну, сталі, кольорових металів, жаростійких, коррозійно-стійких і твердих сплавів, циліндрові гільзи автомобільних і тракторних двигунів, порожні великогабаритні сталеві злитки, кільця підшипників кочення і т. п. Відцентрове лиття є особливим різновидом ливарної технології. Воно відрізняється тим, що форма з металом знаходиться в обертанні і випробує дію відцентрових сил.

При заливанні металу до форми-виливниці у вигляді горизонтальної циліндричної судини, що обертається навколо своєї осі, рідкий метал, що знаходиться в ній відкидається до стінок форми і разом з нею починає обертатися. Обертаючись, він поступово затвердіває і виходить циліндричний виріб. На кожну частку обертового тіла з боку сусідніх часток діє сила, що перешкоджає їй рухатися прямолінійно. Називається вона доцентровою. Сила ж, що діє з бо-

ку даної частки на сусідні, є відцентрова сила P_y , вона спрямована радіально від осі обертання (рис. 7.1)

$$P_y = m\omega^2 r,$$

де m – маса частки; $\omega^2 r$ – прискорення частки, що обертається рівномірно. Відповідно до відомого з фізики принципу еквівалентності – прискорення рівноцінне дії сили ваги. Відцентрова сила і є та додаткова сила ваги, що розвиває обертова матеріальна частка. При відцентровому литті ця сила буває в кілька разів більше звичайної сили ваги, що дорівнює mg . Відношення

$$\frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = k,$$

що показує, в скільки разів відцентрова сила перевищує звичайну силу ваги, називають гравітаційним коефіцієнтом (ступенем перевантаження, коефіцієнтом обваження). Якщо ж величина відцентрових сил буде недостатньою, метал під дією сили ваги неминуче буде стікати вниз, тобто буде відбуватися процес, називаний у металургії «дощуванням», і який сприяє появі браку в готовій деталі.

Додаткова сила ваги одиниці об'єму обертового тіла надалі позначається як його умовна питома вага, що дорівнює звичайній питомій вазі γ , помноженій на гравітаційний коефіцієнт

$$\gamma_{\text{усл}} = k\gamma.$$

Разом з тим, крім вагомості, всі інші властивості металу, такі як щільність, в'язкість, поверхневий натяг, константи затвердіння й ін., залишаються в умовах обертання практично незмінними. Обертання викликає специфічні умови заповнення форми, охолодження і кристалізації відцентрових виливків, їхнє нарощування, рух конвекційних потоків і т. п., що в свою чергу, створює технологічні особливості відцентрового лиття.

Деякі з них відкривають можливості й переваги, які не досягаються іншими способами лиття [46; 48]. Відцентровим литтям можна виготовляти порожні циліндри без застосування стрижнів, двошарові і багатошарові вироби. В процесі лиття можна здійснювати динамічний вплив на кристалізацію і структуру виливків, інтенсивне очищення виливків від неметалічних включень.

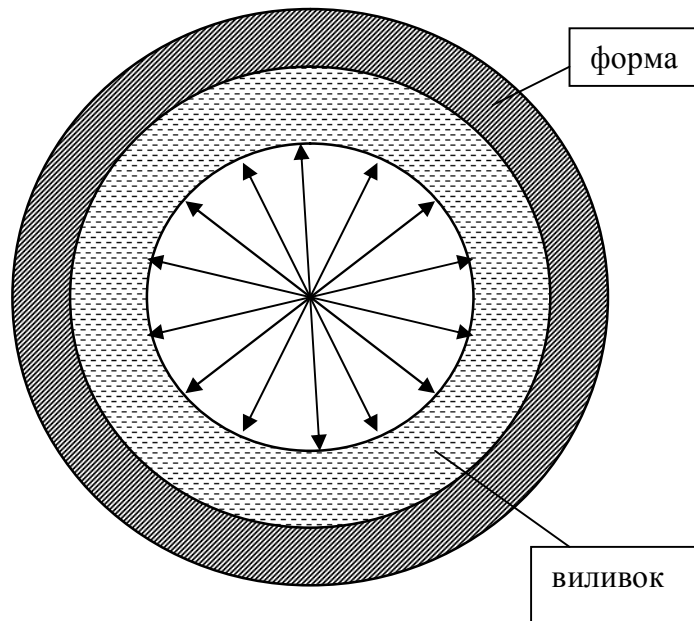


Рис. 7.1. Схема дії відцентрових сил в обертовій формі

Відцентрові сталеві виливки за механічними властивостями не поступаються або близькі до властивостей кувань, а в ряді випадків перевершують їх. Значні техніко-економічні переваги відцентрового лиття перед куванням досягаються внаслідок економії металу, електроенергії, трудовитрат, скорочення капіталовкладень і тривалості виробничого циклу [48].

Однак відцентрове лиття має і недоліки: потрібні спеціальні машини; форми повинні бути підвищеної міцності і герметичності, врівноважені і закриті огороженнями; потрібне дозування металу для одержання правильного розміру внутрішнього отвору виливка; підсилюється ліквідація компонентів сплавів за щільністю. Найбільший техніко-економічний ефект досягається при використанні відцентрового лиття для одержання тіл обертання. До них відносяться труби різного призначення з чавуну, сталі, кольорових металів, жаростійких і корозійно-стійких сплавів; втулки, гільзи автомобільних і тракторних двигунів, стаціонарних і транспортних дизелів; порожні великогабаритні сталеві злипки, кільця підшипників кочення і т. п. У ряді випадків доцільно застосовувати відцентрове лиття для одержання фасонних деталей: зірочок, турбінних дисків з лопатками, арматури, ювелірних виробів і т. п. Велике поширення одержало відцентрове лиття біметалічних виробів.

На практиці використовують різні види відцентрового лиття, що класифікують за наступними ознаками: розташування виливка відносно осі обертання;

конфігурація виливка; розташування осі обертання; матеріал форми; матеріал виливків; швидкість обертання.

У даний час застосовуються три технологічні процеси відцентрового лиття труб: у металеву водоохолоджувальну виливницю без покриття; у піщану форму (суху чи сиру); у металеву виливницю, покриту тонким шаром теплоізоляційного матеріалу.

Найбільш розповсюдженим, серед цих технологій, є лиття труб у металеві форми (схема затвердіння труби в цих випадках показана на рис. 7.2).

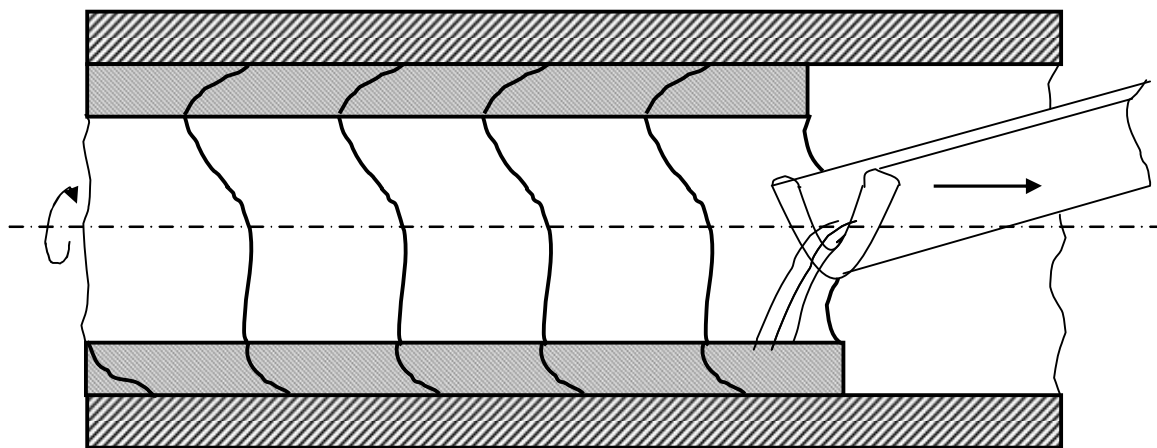


Рис. 7.2. Схема затвердіння труби при литті в металевій виливниці

При відцентровому литті швидкість обертання форми є основним визначальним параметром технологічного процесу, що впливає на напружено-деформований стан виливка і його якість.

У практиці вибирають таку швидкість обертання форми, при якій можна одержати порожній циліндричний виливок. Для визначення критичної швидкості потоку рідкого металу існує формула, яка виведена М. М. Чепіноюю [48] (якщо число обертів форми нижче розрахованого за формулою, починається процес «дощування»):

$$n_{кр} = 9,6 \sqrt{\frac{g}{d} \left(7 - \frac{d^2}{D^2} \right)}, \quad (7.1)$$

де $n_{кр}$ – критична швидкість потоку рідкого металу, об/хв; d – діаметр вільної поверхні потоку, м; D – зовнішній діаметр потоку, м; g – прискорення сили ваги, м/с². Однак одержання геометрично правильної вільної поверхні ще не забезпечує якості виливка. Характер структури металу виливка, повнота виділення шлакових і газових включень, величина і розташування усадочної пористос-

ті значною мірою залежать від величини відцентрової сили, що обумовлюється швидкістю обертання форми. Тому друга умова, за якої вибирають швидкість обертання форми, складається в одержанні щільного виливка з високими механічними властивостями. Виходячи з цих умов, Л. С. Константинов [48] вивів наступну формулу для визначення швидкості обертання

$$n = \frac{5520}{\sqrt{\rho r}}, \quad (7.2)$$

де n – швидкість обертання форми, *об/хв*; 5520 – емпіричний коефіцієнт, $\text{с}^{1/2}/\text{см хв}$; ρ – щільність сплаву, що заливається, г/см^3 ; r – радіус, *см*. На практиці відливають труби при швидкості обертання форми, значно більшої, ніж розрахована за формулою (7.1), але трохи меншої швидкості, одержаної за (7.2). Це пояснюється тим, що надмірна швидкість обертання форми сприяє збільшенню процесу ліквації матеріалу, що приводить до росту напружень у трубі, яка відливається, а також підвищеній вібрації і зносу форм, опорних роликів і підшипників відцентрових машин. Крім швидкості обертання форми, важливою характеристикою технологічного процесу відцентрового лиття є тиск у будь-якій точці обертового рідкого металу, що виникає в результаті обертального руху форми і дії відцентрової сили. Саме знання величини цього тиску необхідно для визначення міцності форми, зусиль діючих на затверділу корку виливка, на кришки виливниць і т. п. При одержанні аналітичного виразу для тиску приймемо наступне припущення – всі частки рідини мають однакову кутову швидкість, рівну кутовій швидкості форми. В цьому випадку можна вважати, що обертовий метал знаходиться у відносному спокої. З урахуванням такого припущення, користуючись рівняннями гідростатики можна показати, що рівняння вільної поверхні при горизонтальній осі обертання має вигляд

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (7.3)$$

а це рівняння відповідає формі кругового циліндра, вісь якого співпадає з віссю обертання. Застосуємо рівняння гідростатики у вигляді

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz), \quad (7.4)$$

де p – тиск; ρ – щільність рідини; X, Y, Z – проекції на осі координат прискорень, що діють на розглянуту частку рідини.

При горизонтальній осі обертання довільна точка M на вільній поверхні піддається дії прискорень, показаних на рис. 7.3. В цьому випадку складова си-

ли ваги, що діє уздовж осі обертання, дорівнює нулю. У результаті рівняння (7.4) після підстановки X і Y (з рис. 7.3) прийме вигляд

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy).$$

З урахуванням (7.3) одержимо після інтегрування

$$p = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + C. \quad (7.5)$$

Постійну інтегрування знайдемо з умови, що на вільній поверхні тиск $p = 0$ і $r = r_{\text{вн}}$ (внутрішній радіус виливка), звідси $C = -\rho \frac{\omega^2 r_{\text{вн}}^2}{2}$.

Підставивши останній вираз у співвідношення (7.5), одержимо формулу для розрахунку тиску при горизонтальній осі обертання

$$p = \gamma \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_{\text{вн}}^2). \quad (7.6)$$

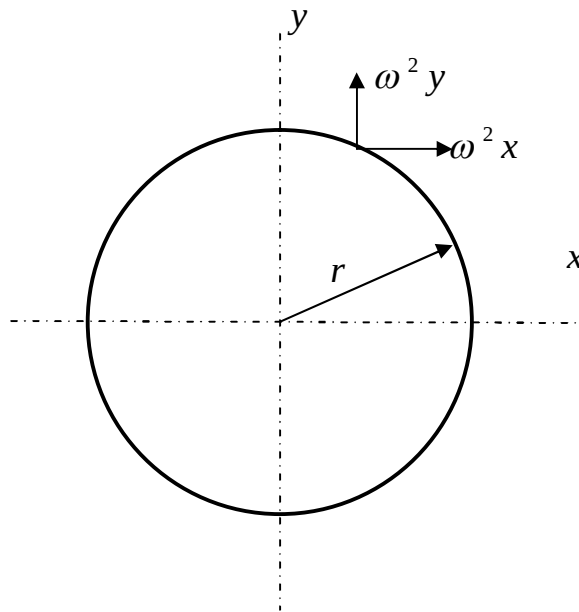


Рис. 7.3. Схема для визначення форми вільної поверхні при обертанні навколо горизонтальної осі

З формули (7.6) випливає, що тиск в обертівій рідині наростає в міру віддалення від вільної поверхні за параболічним законом, тобто швидше, ніж у нерухомій рідині й у залежності від швидкості обертання.

Дійсний тиск в обертівому рідкому металі завжди менше розрахункових за наступними причинами: рідкий метал заливається не відразу і, отже $r_{\text{вн}}$ — не можна вважати незмінним; зовнішній радіус рідкого шару є змінною величи-

ною в результаті просування фронту кристалізації; рідина не відразу здобуває повну швидкість обертання.

Механічні властивості деталей, відлитих відцентровим способом, у більшості випадків краще, ніж властивості тих же деталей, одержаних заливанням у звичайні стаціонарні форми. Цьому сприяють умови кристалізації, завдяки яким виливки виходять більш щільними. В обертовій формі рідкий метал під дією відцентрових сил відкидається до її стінок, де і затвердіває. Чим далі шар металу опиняється від стінок форми, тим пізніше він затвердіває. В пори зовнішніх шарів, що утворюються внаслідок усадки, під дією відцентрової сили нагнітаються свіжі порції рідкого металу. Отже, сама технологія виготовлення виливків у вигляді тіл обертання відповідає принципу спрямованого затвердіння, який в даному випадку полягає в тім, що залитий метал поступово затвердіває в напрямку від зовнішньої поверхні виливка до внутрішньої. Спрямованість затвердіння особливо сильно виявляється при литті деталей у металеві форми, тому що цьому сприяє інтенсивний відвід тепла від стінок форми. В цьому випадку немає потреби у великих відцентрових силах і швидкість обертання форми може бути знижена до мінімуму, при якому метал утримується на поверхні форми, тобто аби виключилося «дощування» – порушення суцільності кругового потоку. З іншого боку, спрямована кристалізація труби (нарощування матеріалу) приведе до різночасного утворення й усадки шарів, тобто, прояву спадкоємних властивостей матеріалу, що в свою чергу, пов'язано з виникненням значних напружень на всіх етапах виготовлення деталі та їхньої подальшої релаксації. Розходження температур шарів металу за перетином сприяє виникненню температурних напружень. До них додаються так звані фазові напруження, які виникають через неодночасне протікання структурних перетворень у виливку.

Спільне використання визначальних співвідношень і законів механіки зростаючих тіл і теорії теплопровідності відкривають певні можливості в рішенні цих та інших питань.

7.2. Наближений аналітичний метод розрахунку термомеханічного стану тіл, що знаходяться в умовах фазового переходу

Розглянемо прямолінійний стрижень довжиною l . Введемо в недеформованій конфігурації декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) , вісь $x_3 = x$ якої

спрямована по осі стрижня. Координати $\xi_j = x_j$, $j = 1, 2, 3$, прийнемо за лагранжеві координати точок стрижня. Один кінець стрижня (футеровка) $x = 0$ жорстко затиснений, а інший $x = l$ вільний. Припустимо, що речовина стрижня може знаходитися в двох агрегатних станах – рідкому і твердому. Поведінка матеріалу стрижня в твердій фазі описується рівняннями стану неоднорідно старіючого в'язкопружного тіла, а в рідкій фазі – пружного тіла. Позначимо через θ^0 температуру фазового переходу: при $\theta_2 < \theta^0$ елемент матеріалу знаходиться в твердій фазі, а при $\theta_1 > \theta^0$ – в рідкій. Для визначеності вважаємо, що до деформації речовина стрижня в твердій фазі займає область $\omega_2(t) = \{l_0 \leq x \leq l\}$, а речовина в рідкій фазі – область $\omega_1(t) = \{0 \leq x \leq l_0\}$. Площа поперечного перерізу стрижня позначимо через s , а периметр – p .

Теплова взаємодія частини стрижня, матеріал якого знаходиться в твердій фазі, з навколишнім середовищем характеризується конвективними коефіцієнтами тепловіддачі $\alpha_{1, \text{кон}}$ (торцевої поверхні), $\alpha_{2, \text{кон}}$ (бічної поверхні) і променистим теплообміном.

У момент часу $t = 0$ до стрижня прикладається подовжнє розподілене стискаюче навантаження інтенсивності $P(t)$ і починається відтік тепла в навколишнє середовище з боку вільного кінця стрижня $x = l$. Після цього частина речовини стрижня переходить у тверду фазу так, що довжина a твердої фази стрижня змінюється за законом $x = a = a(t)$ (при $t = 0$, $x = a = l_0$).

Треба при заданому законі зміни зовнішнього навантаження $P = P(t)$ визначити закон руху межі розділу фаз $a = a(t)$, температуру $\theta_i = \theta_i(t, x)$ ($i = 1, 2$) і напружено-деформований стан стрижня у випадку одноосового напруженого стану.

Математична постановка сформульованої задачі для стрижня, що знаходиться в умовах фазового переходу полягає у визначенні перерахованих невідомих із спільного розв'язку наступних рівнянь:

співвідношення Коші

$$\varepsilon_i(t, x) = \frac{\partial u_i(t, x)}{\partial x} \quad (i = 1, 2); \quad (7.7)$$

рівняння стану

$$\sigma_1(t, x) = E_1 \varepsilon_1(t, x),$$

$$\sigma_2(t, x) = E_2(t - \tau^*(x)) \varepsilon_2(t, x) - \int_{\tau^*(x)}^t \varepsilon_2(\tau, x) R(t - \tau^*(x), \tau - \tau^*(x)) d\tau; \quad (7.8)$$

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_i(t, x)}{\partial x} - \rho_i P(t) = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (7.9)$$

рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} \rho_1 c_1 \frac{\partial \theta_1(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(t, x)}{\partial x} \right), \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial x} \right) + \Phi(\theta_2, \alpha_2). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Граничні і початкові умови задачі мають вигляд:

$$\sigma_2(t, l) = 0, \quad u_1(t, 0) = 0, \quad \sigma_1(t, a(t)) = \sigma_2(t, a(t)), \quad u_1(t, a(t)) = u_2(t, a(t)); \quad (7.11)$$

$$\theta_1(t, 0) = f,$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_{1, \text{кон}} (\theta_2(t, x) - \theta_{cp}) \Big|_{x=l} + \varepsilon_{12} \sigma_0 \theta_2^4(t, l) = \alpha_1 [\theta_2(t, l) - \theta_{cp}],$$

$$\theta_2(t, a(t)) = \theta_1(t, a(t) - \Delta) = \theta^0,$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=a(t)} = -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=a(t)} + \rho_1 \mu \frac{da(t)}{dt},$$

$$\theta_1(t, x) \Big|_{t=0} = \theta_1(0, x), \quad \theta_2(t, x) \Big|_{t=0} = \theta_2(0, x). \quad (7.12)$$

У формулах (7.7) – (7.12) індекс «1» відноситься до параметрів речовини стрижня в рідкій, а індекс «2» – твердій фазах; E_1 – модуль Юнга; $E_2(t - \tau^*(x))$ – пружноміттевий модуль деформації; $R(t - \tau^*(x), \tau - \tau^*(x))$ – ядро релаксації в'язкопружного матеріалу; $\tau^*(x)$ – момент переходу елементу тіла до твердого агрегатного стану; $\rho_i, c_i, \lambda_i, \alpha_i$ – щільність, теплоємність, коефіцієнт теплопровідності матеріалу, приведений коефіцієнт тепловіддачі, що

характеризує інтенсивність конвективного і променистого теплообміну з навколишнім середовищем; $\theta_i(t, x)$ – розподіл температури у відповідній фазі стрижня;

$$\Phi(\theta_2, \alpha_2) = -\frac{\alpha_{2, \text{кон}}}{h\lambda_2} [\theta_2(t_k, x) - \theta_{cp}] - \frac{\varepsilon_{12}\sigma_0}{h\lambda_2} [\theta_2^4(t_k, x) - \theta_{cp}^4] = -\frac{\alpha_2}{h\lambda_2} [\theta_2(t_k, x) - \theta_{cp}]$$

– потужність внутрішніх джерел (стоків) тепла в твердій фазі, що враховує також конвективний і променистий теплообмін бічної поверхні стрижня з навколишнім середовищем; ρ_i, λ_i ($i=1,2$) – щільності і коефіцієнти теплопровідності матеріалу; μ – питома теплота фазового перетворення; ε_{12} – ступінь чорноти матеріалу в твердій фазі; σ_0 – стала Стефана-Больцмана; α_1 – коефіцієнт тепловіддачі з торця стрижня; f – температура перегрітого розплаву.

Співвідношення (7.7) – (7.12) являють собою постановку задачі термов'язкопружності, для розв'язання якої скористаємося варіаційним принципом Гіббса (який повинен указати що «вигідніше» природі при заданих зовнішніх впливах – змінити температуру фіксованого елемента тіла чи перевести цей елемент з одного агрегатного стану в інший) у наступному трактуванні.

Інтервал часу $[0, t_{\text{кон}}]$, на якому досліджується напружено-деформований стан у тілі Ω , розбивається точками $t_k = k\Delta$, $\Delta = t_{\text{кон}}/N$, $k = 0, 1, \dots, N$ на підінтервали, так що процес безперервного нарощування змінюється наступним дискретним процесом. У момент часу t_k до тіла Ω вважаються прикладеними поверхневі зусилля $\mathbf{f}^{(k)}$, масові сили $\mathbf{F}^{(k)}$ і від тіла відводиться кількість теплової енергії, що дорівнює $\omega^{(k)}$. Нехай величини $\mathbf{u}_*$ (вектор переміщень), θ_* (температурне поле) і $a = a(t_k)$ (положення межі розділу фаз) цілком описують істинний стан тіла на кожному проміжку часу. При зміні зовнішніх умов тіло виходить із стану термодинамічної рівноваги $(\mathbf{u}_*^{(k-1)}, \theta_*^{(k-1)}, a_*^{(k-1)})$, в якому воно знаходилося в момент часу t_k , і миттєво переходить у новий рівноважний стан $(\mathbf{u}^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$. На інтервалі часу (t_k, t_{k+1}) тіло Ω знаходиться в стані термодинамічної рівноваги $(\mathbf{u}^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$.

Стан $(\mathbf{u}^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$ є кінематично можливим рівноважним станом тіла Ω у момент часу $t_k + 0$ (тобто при $t > t_k$). Істинний (реалізується в дійсності) стан тіла Ω у момент часу $t_k + 0$ позначимо через $(\mathbf{u}_*^{(k)}, \theta_*^{(k)}, a_*^{(k)})$.

Внутрішня енергія тіла Ω у станах $(\mathbf{u}_*^{(k)}, \theta_*^{(k)}, a_*^{(k)})$ і $(\mathbf{u}^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$ дорівнює відповідно $V_*^{(k)}$ і $V^{(k)}$. Ці величини зв'язані законом збереження енергії

$$V^{(k)} = V_*^{(k-1)} + A^{(k)} - \omega^{(k)}, \quad (7.13)$$

де $A^{(k)}$ – робота зовнішніх поверхневих і масових сил

$$A^{(k)} = \int_{\partial\omega} \rho^0 \mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}_*^{(k-1)}) d\omega + \int_{\partial\omega} f^{(k)}(\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}_*^{(k-1)}) d\omega.$$

Істинний рівноважний стан $(\mathbf{u}_*^{(k)}, \theta_*^{(k)}, a_*^{(k)})$ характеризується тим, що він доставляє максимальне значення ентропії тіла серед усіх можливих рівноважних станів, які визначаються рівністю (7.13).

Для виконання, сформульованого вище принципу і забезпечення, тим самим, зв'язаності механічних і температурних полів, необхідно спочатку в кожен момент часу t_k розв'язати стаціонарну задачу теплопровідності для складеного стрижня, а потім визначити поле переміщень з розв'язку пружної контактної задачі двох тіл $\omega_1(t_k)$ і $\omega_2(t_k)$. При цьому будемо вважати, що речовина в рідкій фазі займає область $\omega_1(t_k) = \{0 \leq x \leq a(t_k)\}$, у твердій фазі – $\omega_2(t_k) = \{a(t_k) \leq x \leq l\}$.

У цьому випадку контактна задача зводиться до розв'язання наступної системи рівнянь (штрих означає похідну за координатою x)

$$\begin{aligned} \sigma_1(t_k, x) &= E_1 u_1'(t_k, x), & \sigma_2(t_k, x) &= E_2 u_2'(t_k, x), \\ \sigma_1'(t_k, x) - \rho_1 P(t_k) &= 0, & \sigma_2'(t_k, x) - \rho_2 P(t_k) &= 0, \end{aligned} \quad (7.14)$$

із крайовими умовами

$$\begin{aligned} \sigma_2(t_k, l) &= 0, & u_1(t_k, 0) &= 0, \\ \sigma_1(t_k, a(t_k)) &= \sigma_2(t_k, a(t_k)), & u_1(t_k, a(t_k)) &= u_2(t_k, a(t_k)). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Інтегруючи четверте рівняння системи (7.14) по x у межах від x до l з урахуванням першої з умов (7.15), одержимо

$$\sigma_2(t_k, x) = -\rho_2 P(t_k) (l - x). \quad (7.16)$$

Проінтегрувавши тепер третє рівняння системи (7.13) у межах від x до $a = a(t_k)$, будемо мати

$$\sigma_1(t_k, a(t_k)) - \sigma_1(t_k, x) = \rho_1 P(t_k) (a(t_k) - x). \quad (7.17)$$

Підставляючи до (7.16) $x = a(t_k)$ і використовуючи третю умову з (7.15), з (7.17) одержимо

$$\sigma_1(t_k, x) = -P(t_k) [\rho_2(l - a(t_k)) + \rho_1(a(t_k) - x)]. \quad (7.18)$$

Підставимо (7.18) до першого рівняння системи (7.14) і будемо мати

$$u'_1(t_k, x) = -\frac{P(t_k)}{E_1} [\rho_2(l - a(t_k)) + \rho_1(a(t_k) - x)].$$

Інтегруючи останнє співвідношення за x у межах від 0 до x з урахуванням другої з умов (7.15), одержимо

$$u_1(t_k, x) = -\frac{P(t_k)}{E_1} \left[\rho_2(l - a(t_k))x - \frac{\rho_1}{2} [(a(t_k) - x)^2 - a^2(t_k)] \right]. \quad (7.19)$$

Підставляючи співвідношення (7.16) у друге рівняння системи (7.14) і розв'язуючи відносно $u'_2(t_k, x)$, будемо мати

$$u'_2(t_k, x) = -\frac{1}{E_2} \rho_2 P(t_k) (l - x).$$

Інтегруючи останнє співвідношення по x у межах від $a(t_k)$ до x з урахуванням четвертої з умов (7.15), одержимо

$$u_2(t_k, x) = \frac{\rho_2 P(t_k)}{2E_2} ((l - x)^2 - (l - a(t_k))^2) - \frac{P(t_k) a(t_k)}{E_1} \left(\rho_2(l - a(t_k)) + \frac{\rho_1 a(t_k)}{2} \right). \quad (7.20)$$

Співвідношення (7.16), (7.18) – (7.20) являють собою розв'язок контактної задачі для двох тіл $\omega_1(t_k)$ і $\omega_2(t_k)$ у момент часу t_k .

Розв'яжемо стаціонарну задачу теплопровідності для складеного стрижня.

Припустимо, що перепад температури відбувається тільки в напрямку довжини стрижня, тому тепловіддачу з бічної поверхні стрижня враховуємо в рівнянні теплопровідності як невід'ємне джерело тепла [16; 42]

$$W = -\frac{\alpha_{2, \text{кон}}}{h} [\theta_2(t_k, x) - \theta_{cp}],$$

де $h = \frac{s}{p}$, θ_{cp} – температура навколишнього середовища.

Бічна поверхня частини стрижня, матеріал якої знаходиться в рідкій фазі, передбачається теплоізовованою.

Математична постановка задачі в момент часу t_k має вигляд

$$\frac{\partial^2 \theta_1(t_k, x)}{\partial x^2} = 0, \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2(t_k, x)}{\partial x^2} - \frac{\alpha_{2, \text{кон}}}{h\lambda_2} [\theta_2(t_k, x) - \theta_{cp}] - \frac{\varepsilon_{12}\sigma_0}{h\lambda_2} [\theta_2^4(t_k, x) - \theta_{cp}^4] = 0. \quad (7.22)$$

Зовнішні граничні умови й умови на межі розділу фаз запишемо:

$$\theta_1(t_k, 0) = f, \quad (7.23)$$

$$-\lambda_2 \left. \frac{\partial \theta_2(t_k, x)}{\partial x} \right|_{x=l} = \alpha_{1, \text{кон}} [\theta_2(t_k, l) - \theta_{cp}] + \sigma_0 \varepsilon_{12} \theta_2^4(t_k, l), \quad (7.24)$$

$$\theta_2(t_k, a(t_k)) = \theta_1(t_k, a(t_k) - \Delta) = \theta^0, \quad (7.25)$$

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial \theta_1(t_k, x)}{\partial x} \right|_{x=a(t_k)} = -\lambda_2 \left. \frac{\partial \theta_2(t_k, x)}{\partial x} \right|_{x=a(t_k)} + \mu \rho_1 [a(t_k) - a(t_{k+1})]. \quad (7.26)$$

Для розв'язання задачі (7.21) – (7.26) використаємо лінеаризацію [42]. При цьому умова (7.24) і рівняння (7.22) приймуть вигляд

$$-\lambda_2 \left. \frac{\partial \theta_2(t_k, x)}{\partial x} \right|_{x=l} = \alpha_1 [\theta_2(t_k, l) - \theta_{cp}], \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2(t_k, x)}{\partial x^2} - \frac{\alpha_2}{h\lambda_2} [\theta_2(t_k, x) - \theta_{cp}] = 0, \quad (7.28)$$

де $\alpha_1 = \alpha_{1, \text{кон}} + \varepsilon_{12}\sigma_0 b_1(\theta)$, $\alpha_2 = \alpha_{2, \text{кон}} + \varepsilon_{12}\sigma_0 b_2(\theta)$ – приведені коефіцієнти тепловіддачі, що враховують конвективний і променистий теплообмін; значення функцій $b_1(\theta)$, $b_2(\theta)$ наведені в [9; 30; 46].

Загальний розв'язок диференціальних рівнянь (7.21), (7.28) має вигляд

$$\theta_1(t_k, x) = C_1 x + C_2, \quad (7.29)$$

$$\theta_2(t_k, x) = C_3 e^{\sqrt{\frac{\alpha}{h\lambda_2}} x} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{h\lambda_2}} x} + \theta_{cp}. \quad (7.30)$$

Константи C_1, C_2, C_3, C_4 визначаються із зовнішніх граничних умов (7.23), (7.27) і умов на межі розділу фаз (7.25), (7.26).

З (7.23), (7.29), одержимо

$$C_2 = f. \quad (7.31)$$

Підставляючи (7.29), (7.30) до (7.25) – (7.27), будемо мати три рівняння для визначення C_1, C_3, C_4 :

$$\begin{aligned} & C_3 e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} a(t_k)} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} a(t_k)} + \theta_{cp} = \theta^0, \\ & -\lambda_2 \left[C_3 \sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} l} - C_4 \sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} l} \right] = \alpha_1 \left[C_3 e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} l} - C_4 e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} l} \right], \\ & -\lambda_1 C_1 = -\lambda_2 \left[C_3 \sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} a(t_k)} - C_4 \sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} a(t_k)} \right] + \mu \rho_1 [a(t_k) - a(t_{k+1})]. \end{aligned}$$

Звідси одержимо

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} (\theta^0 - \theta_{cp}) \left[\frac{\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}}{\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} + e^{2\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} (l - a(t_k))} \left(-\sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} - \alpha_1 \right)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha_1 + \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}}{-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} + e^{-2\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} (l - a(t_k))} \left(-\sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} + \alpha_1 \right)} \right] - \frac{\mu \rho_1 (a(t_k) - a(t_{k+1}))}{\lambda_1}, \\ C_3 &= \frac{\left(\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} \right) (\theta^0 - \theta_{cp})}{e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} a(t_k)} \left[\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} \right] + e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}} (2l - a(t_k))} \left[-\sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} - \alpha_1 \right]}, \end{aligned}$$

$$C_4 = \frac{\left(-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}\right)(\theta^0 - \theta_{cp})}{e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}a(t_k)} \left[-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}\right] + e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(2l-a(t_k))} \left[-\sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} + \alpha_1\right]}. \quad (7.32)$$

Тоді, підставляючи (7.31), (7.32) у (7.29), (7.30), для визначення температурного поля в момент часу t_k одержимо співвідношення:

$$\theta_1(t_k, x) = \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} (\theta^0 - \theta_{cp}) \left[\frac{\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}}{\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} + e^{2\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(l-a(t_k))} \left(-\sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} - \alpha_1\right)} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 + \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}}{-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} + e^{-2\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(l-a(t_k))} \left(-\sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} + \alpha_1\right)} \right] x - \frac{\mu \rho_1 (a(t_k) - a(t_{k+1}))}{\lambda_1} x + f, \quad (7.33)$$

$$\theta_2(t_k, x) = \frac{\left(\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}\right)(\theta^0 - \theta_{cp}) e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}x}}{e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}a(t_k)} \left[\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}\right] + e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(2l-a(t_k))} \left[-\sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} - \alpha_1\right]} + \\ + \frac{\left(-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}\right)(\theta^0 - \theta_{cp}) e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}x}}{e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}a(t_k)} \left[-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}\right] + e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(2l-a(t_k))} \left[-\sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}} + \alpha_1\right]} + \theta_{cp}. \quad (7.34)$$

Співвідношення (7.33), (7.34) є розв'язком задачі (7.21) – (7.26) і, використовуючи принцип Гіббса, разом з розв'язком контактної задачі за допомогою граничного переходу дозволяють одержати наближений аналітичний розв'язок задачі термов'язкопружності в довільний момент часу t .

Запишемо роботу зовнішніх сил $A^{(k+1)}$ при переході з термодинамічного рівноважного стану $(\mathbf{u}^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$ у момент часу t_k в термодинамічний рівноважний стан $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}, a^{(k+1)})$ у момент часу t_{k+1} :

$$\begin{aligned}
A^{(k+1)} = & \int_0^{a(t_k)} \rho_1 P(t_{k+1}) (u_1(t_{k+1}, x) - u_1(t_k, x)) dx + \int_{a(t_k)}^{a(t_{k+1})} \rho_2 P(t_{k+1}) u_2(t_{k+1}, x) dx - \\
& - \int_{a(t_k)}^{a(t_{k+1})} \rho_1 P(t_{k+1}) u_1(t_k, x) dx + \int_{a(t_{k+1})}^l \rho_2 P(t_{k+1}) (u_2(t_{k+1}, x) - u_2(t_k, x)) dx. \quad (7.35)
\end{aligned}$$

Підставляючи вирази (7.19), (7.20) до співвідношення (7.35) і виконуючи інтегрування, одержимо

$$\begin{aligned}
A^{(k+1)} = & \frac{\rho_1 P(t_{k+1})}{2E_1} \left\{ \rho_2 a^2(t_k) [P(t_k)(l - a(t_k)) - P(t_{k+1})(l - a(t_{k+1}))] + \rho_1 a^2(t_k) \left[\frac{2}{3} P(t_k) a(t_k) + \right. \right. \\
& + P(t_{k+1}) \left(\frac{a(t_k)}{3} - a(t_{k+1}) \right) \left. \right] + P(t_k) (a(t_{k+1}) - a(t_k)) \left[\rho_2 (l - a(t_k)) (a(t_{k+1}) + a(t_k)) - \right. \\
& - \frac{\rho_1}{6} (a^2(t_{k+1}) - 2a^2(t_k) - 2a(t_k)a(t_{k+1})) \left. \right] \left. \right\} + \rho_2 P(t_{k+1}) \left\{ (l - a(t_{k+1})) (a(t_k) - a(t_{k+1})) - \right. \\
& - \frac{P(t_{k+1}) a(t_{k+1})}{E_1} \left(\rho_2 (l - a(t_{k+1})) + \frac{\rho_1 a(t_{k+1})}{2} \right) + \frac{\rho_2 P(t_{k+1})}{6E_2} ((l - a(t_k))^3 - (l - a(t_{k+1}))^3) + \\
& + (l - a(t_{k+1})) \left[- \frac{\rho_2}{E_2} \left(\frac{P(t_{k+1})}{3} (l - a(t_{k+1}))^2 + \frac{P(t_k)}{2} \left[\frac{(l - a(t_{k+1}))^2}{3} - (l - a(t_k))^2 \right] \right) \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{E_1} \left(P(t_k) a(t_k) \left[\frac{\rho_1 a(t_k)}{2} + \rho_2 (l - a(t_k)) \right] - P(t_{k+1}) a(t_{k+1}) \left[\frac{\rho_1 a(t_{k+1})}{2} + \rho_2 (l - a(t_{k+1})) \right] \right) \right] \right\}. \quad (7.36)
\end{aligned}$$

Знайдемо внутрішню енергію $V^{(k)}$ стрижня в термодинамічному рівноважному стані в момент часу t_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Для цього прийемо наступні припущення.

1. При перегрівих у рідкій фазі за рахунок конвекції виникають інтенсивні потоки тепла, і перепади температур у ній практично відсутні. Тому, згідно з [26], перепад температур за довжиною рідкої частини стрижня прийемо $\Delta\theta_1$.

2. За законом збереження енергії різниця між кількістю тепла, що віддається бічною поверхнею і торцем стрижня конвекцією і випромінюванням у навколишнє середовище дорівнює теплу, акумульованому даним тілом

$$c_2 s(l - a(t)) \rho_2 \dot{\theta}_2^{cp}(t) = sq - p \alpha_2 \int_{a(t)}^l [\theta_2(t, x) - \theta_{cp}] dx, \quad (7.37)$$

де s – площа поперечного перерізу стрижня; p – периметр; $\dot{\theta}_2^{cp}(t)$ – збільшення температури в одиницю часу в тілі; $q = -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=a(t_k)} + \mu \rho_1 \dot{a}(t) - \alpha_1 [\theta_2(t, l) - \theta_{cp}]$ – кількість тепла акумульованого в тілі при поширенні тепла в осьовому напрямку; $p \alpha_2 \int_{a(t)}^l [\theta_2(t, x) - \theta_{cp}] dx$ – кількість тепла, що віддає в навколишнє середовище бічна поверхня стрижня.

Рівняння (7.37), з урахуванням (7.34) можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \rho_2 c_2 (l - a(t)) \dot{\theta}_2^{cp}(t) = & \mu \rho_1 \dot{a}(t) - \frac{(\alpha_1^2 - B^2)(\theta^0 - \theta_{cp}) e^{B_1 l}}{e^{B_1 a(t)}(\alpha_1 - B) - e^{B_1 (2l - a(t))}(\alpha_1 + B)} + \\ & + \frac{(\alpha_1^2 - B^2)(\theta^0 - \theta_{cp}) e^{-B_1 l}}{e^{-B_1 (2l - a(t))}(\alpha_1 - B) - e^{-B_1 a(t)}(\alpha_1 + B)}, \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$\text{де } B = \sqrt{\frac{\alpha_2 \lambda_2}{h}}, \quad B_1 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\lambda_2 h}}.$$

Тоді, при прийнятих припущеннях внутрішню енергію будемо обчислювати за формулою

$$\begin{aligned} V^{(k)} = & V_*^{(0)} + \int_0^{a(t_k)} \left[\rho_1 c_1 \Delta \theta_1 + \frac{\sigma_1^2(t_k, x)}{2E_1} \right] dx + \\ & + \int_{a(t_k)}^l \left[\rho_2 c_2 (\theta_2(t_k, x) - \theta_2^{cp}(t_k)) + \frac{\sigma_2^2(t_k, x)}{2E_2} \right] dx, \end{aligned} \quad (7.39)$$

де $V_*^{(0)} = \rho_1 l_0 \psi_1^0 + \rho_2 (l - l_0) \psi_2^0$ – внутрішня енергія тіла в природному стані; ψ_i^0 ($i = 1, 2$) – питома внутрішня енергія речовини в рідкій і твердій фазах відповідно в природному стані; $\theta_2(t_k, x)$ – температура в стрижні, що обчислюється за формулою (7.34). В даному прикладі покладемо $\psi_i^0 = 0$.

Підставляючи вирази (7.16), (7.18) до співвідношення (7.39) і виконуючи інтегрування за змінною x . Маємо

$$\begin{aligned}
V^{(k)} = & \frac{P^2(t_k)a(t_k)}{E_1} \left[\rho_2^2(l-a(t_k))^2 - \rho_1\rho_2(l-a(t_k))a(t_k) + \frac{\rho_1^2 a^2(t_k)}{3} \right] + \rho_2^2 P(t_k) \frac{(l-a(t_k))^3}{6E_2} - \\
& - \rho_2 c_2 \left\{ \theta_2^{cp}(t_k)(l-a(t_k)) - \left[\frac{(e^{B_1 l} - e^{B_1 a(t_k)})(\alpha_1 - B)(\theta^0 - \theta_{cp})}{B_1(e^{B_1 a(t_k)}(\alpha_1 - B) - e^{B_1(2l-a(t_k))}(\alpha_1 + B))} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{(e^{-B_1 l} - e^{-B_1 a(t_k)})(\alpha_1 + B)(\theta^0 - \theta_{cp})}{B_1(e^{-B_1(2l-a(t_k))}(\alpha_1 - B) - e^{-B_1 a(t_k)}(\alpha_1 + B))} + \theta_{cp}(l-a(t_k)) \right] \left. \right\} + \rho_1 c_1 \Delta\theta_1 a(t_k). \quad (7.40)
\end{aligned}$$

Визначимо ентропію $S^{(k)}$ у термодинамічному рівноважному стані в момент часу t_k

$$S^{(k)} = \frac{V^{(k)} - A^{(k)} + \mu\rho_1 a(t_k) + \alpha_1 [\theta_2(t_k, l) - \theta_{cp}] + \alpha_2 h^{-1}(l-a(t_k)) [\theta_2^{cp}(t_k) - \theta_{cp}]}{\theta^0}.$$

При переході з термодинамічного рівноважного стану $(\mathbf{u}^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$ в момент часу t_k у термодинамічний рівноважний стан $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}, a^{(k+1)})$ у момент часу t_{k+1} , ентропія $S^{(k+1)}$ буде мати вигляд

$$S^{(k+1)} = \frac{V^{(k+1)} - A^{(k+1)} + \mu\rho_1 a(t_{k+1}) + \alpha_1 [\theta_2(t_{k+1}, l) - \theta_{cp}] + \alpha_2 h^{-1}(l-a(t_{k+1})) [\theta_2^{cp}(t_{k+1}) - \theta_{cp}]}{\theta^0}.$$

Тоді відповідно до варіаційного принципу Гіббса, точка $a^{(k+1)} = a(t_k)$, яка характеризує положення межі розділу фаз у момент часу t_{k+1} доставляє максимальне значення функції $F(a^{(k+1)}) = S^{(k+1)} - S^{(k)}$.

З умови екстремуму функції, випливає

$$\frac{dF(a^{(k+1)})}{da^{(k+1)}} = 0. \quad (7.41)$$

Підставляючи до (7.41) співвідношення (7.34), (7.36), (7.40), одержимо

$$\begin{aligned}
& -\rho_1\rho_2a^{(k+1)}(l-a^{k+1})+a^{(k+1)}\left[-2\rho_2^2(l-a^{(k+1)})-\rho_1\rho_2(l-2a^{k+1})+\frac{2\rho_1^2a^{(k+1)}}{3}\right]+ \\
& +\frac{\rho_1^2(a^{(k+1)})^2}{3}\left\}+\alpha_1(\theta^0-\theta_{cp})B_1\left\{\frac{(B-\alpha_1)e^{B_1l}F_3(a^{(k+1)})}{F_1^2(a^{(k+1)})}+\frac{(\alpha_1+B)e^{-B_1l}F_4(a^{(k+1)})}{F_2^2(a^{(k+1)})}\right\}- \\
& -\rho_2c_2\left\{-\theta_2^{cp}(t_k)+\left[\theta_{cp}+\frac{(\alpha_1-B)(\theta^0-\theta_{cp})F_5(a^{(k+1)})}{F_1^2(a^{(k+1)})}-\frac{(\alpha_1+B)(\theta^0-\theta_{cp})F_6(a^{(k+1)})}{F_2^2(a^{(k+1)})}\right]\right\}- \\
& -\frac{\rho_1P(t_{k+1})}{2E_1}\left\{(a^{(k)})^2P(t_{k+1})\left(\rho_2-\rho_1\right)+P(t_k)\left[\rho_2(l-a^{(k)})(a^{(k+1)}+a^{(k)})-\right.\right. \\
& \left.-\frac{\rho_1}{6}\left((a^{(k+1)})^2-2(a^{(k)})^2-2a^{(k)}a^{(k+1)}\right)\right]+P(t_k)(a^{(k+1)}-a^{(k)})\left[\rho_2(l-a^{(k)})-\right. \\
& \left.-\frac{\rho_1}{3}(a^{(k+1)}-a^{(k)})\right]\left\}-\rho_2P(t_{k+1})\left\{2a^{(k+1)}-l-a^{(k)}-\frac{P(t_{k+1})\rho_2l}{E_1}+\frac{2P(t_{k+1})\rho_2a^{(k+1)}}{E_1}-\right.\right. \\
& \left.-\frac{P(t_{k+1})\rho_1a^{(k+1)}}{E_1}-\frac{\rho_2P(t_{k+1})}{2E_2}(l-a^{(k+1)})^2+\left[\frac{\rho_2}{E_2}\left(\frac{P(t_{k+1})}{3}(l-a^{(k+1)})^2+\right.\right. \\
& \left.+\frac{P(t_k)}{2}\left[\frac{(l-a^{(k+1)})^2}{3}-(l-a^{(k)})^2\right]\right]+\frac{1}{E_1}\left(P(t_k)a^{(k)}\left[\frac{\rho_1a^{(k)}}{2}+\rho_2(l-a^{(k)})\right]-\right. \\
& \left.-P(t_{k+1})a^{(k+1)}\left[\frac{\rho_1a^{(k+1)}}{2}+\rho_2(l-a^{(k+1)})\right]\right]\right\}+(l-a^{(k+1)})\left[\frac{\rho_2(l-a^{(k+1)})}{3E_2}(2P(t_{k+1})+P(t_k))+\right. \\
& \left.+\frac{1}{E_1}(P(t_{k+1})l\rho_2+P(t_{k+1})a^{(k+1)}[\rho_1-2\rho_2])\right]\left\}=0, \tag{7.42}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
F_1(a^{(k+1)}) &= e^{B_1 a^{(k+1)}} (\alpha_1 - B) - e^{B_1 (2l - a^{(k+1)})} (\alpha_1 + B), \\
F_2(a^{(k+1)}) &= e^{-B_1 (2l - a^{(k+1)})} (\alpha_1 - B) - e^{-B_1 a^{(k+1)}} (\alpha_1 + B), \\
F_3(a^{(k+1)}) &= e^{B_1 a^{(k+1)}} (\alpha_1 - B) + e^{B_1 (2l - a^{(k+1)})} (\alpha_1 + B), \\
F_4(a^{(k+1)}) &= e^{-B_1 (2l - a^{(k+1)})} (\alpha_1 - B) + e^{-B_1 a^{(k+1)}} (\alpha_1 + B), \\
F_5(a^{(k+1)}) &= -2e^{2B_1 l} (B + \alpha_1) + e^{B_1 (l + a^{(k+1)})} (\alpha_1 - B) + e^{B_1 (3l - a^{(k+1)})} (\alpha_1 + B), \\
F_6(a^{(k+1)}) &= 2e^{-2B_1 l} (\alpha_1 - B) - e^{-B_1 (3l - a^{(k+1)})} (\alpha_1 - B) - e^{-B_1 (l + a^{(k+1)})} (\alpha_1 + B).
\end{aligned}$$

Припускаючи, що функції $a(t)$, $P(t)$, $\theta_i(t, x)$ неперервні та диференційовні за t в розглянутому проміжку часу, покладемо

$$a(t_{k+1}) = a(t_k) + \dot{a}(t_k) \Delta + \dots, \quad P(t_{k+1}) = P(t_k) + \dot{P}(t_k) \Delta + \dots \quad (7.43)$$

Підставляючи (7.43) у (7.33), (7.34), (7.42) і, переходячи до границі при $N \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$, $t_k \rightarrow t$, одержимо

$$\begin{aligned}
\theta_1(t, x) &= \frac{1}{\lambda_1} B (\theta^0 - \theta_{cp}) \left[\frac{\alpha_1 - B}{\alpha_1 - B - e^{2B_1(l - a(t))} (B + \alpha_1)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_1 + B}{\alpha_1 + B - e^{-2B_1(l - a(t))} (\alpha_1 - B)} \right] x + f, \quad (7.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(t, x) &= \frac{(\alpha_1 - B) (\theta^0 - \theta_{cp}) e^{B_1 x}}{e^{B_1 a(t)} [\alpha_1 - B] - e^{B_1 (2l - a(t))} [B + \alpha_1]} - \\
&\quad - \frac{(\alpha_1 + B) (\theta^0 - \theta_{cp}) e^{-B_1 x}}{e^{-B_1 (2l - a(t))} [\alpha_1 - B] - e^{-B_1 a(t)} [\alpha_1 + B]} + \theta_{cp}, \quad (7.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu\rho_1 + \frac{\alpha_2}{h} [\theta_{cp} - \theta_2^{cp}(t)] + \rho_1 c_1 \Delta\theta_1 - \frac{\rho_2^2 P(t)}{2E_2} (l - a(t))^2 + \frac{P^2(t)}{E_1} \left\{ \rho_2^2 (l - a(t))^2 - \right. \\
& \left. - \rho_1 \rho_2 a(t)(l - a(t)) + \frac{\rho_1^2 (a(t))^2}{3} + a(t) \left[-2\rho_2^2 (l - a(t)) - \rho_1 \rho_2 (l - 2a(t)) + \frac{2\rho_1^2 a(t)}{3} \right] \right\} + \\
& + \alpha_1 (\theta^0 - \theta_{cp}) B_1 \left\{ \frac{(B - \alpha_1) e^{B_1 l} F_3(a(t))}{F_1^2(a(t))} + \frac{(\alpha_1 + B) e^{-B_1 l} F_4(a(t))}{F_2^2(a(t))} \right\} - \\
& - \rho_2 c_2 \left\{ -\theta_2^{cp}(t) + \left[\theta_{cp} + \frac{(\alpha_1 - B)(\theta^0 - \theta_{cp}) F_5(a(t))}{F_1^2(a(t))} - \frac{(\alpha_1 + B)(\theta^0 - \theta_{cp}) F_6(a(t))}{F_2^2(a(t))} \right] \right\} - \\
& - \frac{\rho_1 P^2(t) a(t)}{2E_1} \left\{ \rho_2 (2l - a(t)) - \frac{3}{2} \rho_1 a(t) \right\} - \rho_2 P(t) \{a(t) - l\} = 0, \quad (7.46)
\end{aligned}$$

де функції $F_i(a(t)) = \lim_{\substack{t_k \rightarrow t \\ \Delta \rightarrow 0}} F_i(a^{(k+1)})$.

Співвідношення (7.38), (7.44) – (7.46) являють собою систему нелінійних рівнянь для визначення температурного поля в стрижні та положення межі розділу фаз.

Перетворимо рівняння (7.38), (7.46). Для цього, продиференціюємо за t рівняння (7.46) і в результат підставимо $\dot{\theta}_2^{cp}(t)$ з (7.38). У результаті будемо мати наступну систему диференціальних рівнянь для визначення закону руху фронту кристалізації та середньої температури в стрижні:

$$\begin{aligned}
& \dot{a}(t) \left\{ B_1 (\theta^0 - \theta_{cp}) \right\} \left\{ \alpha_1 B_1 \left[\frac{(\alpha_1 - B) e^{B_1 l} \left[e^{2B_1 a(t)} (\alpha_1 - B) + e^{2B_1 (2l-a(t))} (\alpha_1 + B) + 6e^{2B_1 l} (\alpha_1^2 - B^2) \right]}{F_1^3(a(t))} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(\alpha_1 + B) e^{-B_1 l} \left[e^{-2B_1 a(t)} (\alpha_1 + B) - e^{-2B_1 (2l-a(t))} (\alpha_1 - B) - 6e^{-2B_1 l} (\alpha_1^2 - B^2) \right]}{F_2^3(a(t))} \right] - \right. \\
& \quad \left. - \rho_2 c_2 \left[\frac{(\alpha_1 - B) \left\{ e^{B_1 (l+a(t))} [\alpha_1 - B] - e^{B_1 (3l-a(t))} [\alpha_1 + B] \right\} F_1(a(t)) + 2F_5(a(t)) F_3(a(t)) \right\}}{F_1^3(a(t))} + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(\alpha_1 + B) \left\{ e^{-B_1 (3l-a(t))} [\alpha_1 - B] - e^{-B_1 (l+a(t))} [\alpha_1 + B] \right\} F_2(a(t)) - 2F_6(a(t)) F_4(a(t)) \right\}}{F_2^3(a(t))} \right] \right\} - \\
& - \frac{\mu \rho_1 (\lambda_2 B_1^2 - \rho_2 c_2)}{\rho_2 c_2 (l - a(t))} + \frac{\rho_2^2 P(t) (l - a(t))}{E_2} + \frac{P^2(t)}{E_1} \left[\frac{2\rho_1^2 a(t)}{3} - 2\rho_2^2 (l - a(t)) - \rho_1 \rho_2 (l - 2a(t)) + \right. \\
& \quad \left. + 2a(t) \left(\rho_2^2 + \rho_1 \rho_2 + \frac{\rho_1^2}{3} \right) - \rho_1 \rho_2 (l - a(t)) \right] - \rho_2 P(t) \left\{ \rho_2 (a(t) - l) - \right. \\
& - \frac{\rho_2^2 (l - a(t))^2}{2E_2} + \frac{2P(t)}{E_1} \left[\frac{\rho_1^2 a^2(t)}{4} - 2\rho_1 \rho_2 a(t) (l - a(t)) + \rho_2^2 (l - a(t))^2 - 2a(t) \rho_2^2 (l - a(t)) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a(t)}{2} \rho_1 \rho_2 (2l - a(t)) \right] \right\} + \frac{(\lambda_2 B_1^2 - \rho_2 c_2) (\alpha_1^2 - B^2) (\theta^0 - \theta_{cp})}{\rho_2 c_2 (l - a(t))} \left\{ \frac{e^{-B_1 l}}{F_2(a(t))} - \frac{e^{B_1 l}}{F_1(a(t))} \right\}, \quad (7.47)
\end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_2^{cp}(t) = \frac{\mu \rho_1 \dot{a}(t)}{\rho_2 c_2 (l - a(t))} + \frac{(\alpha_1^2 - B^2) (\theta^0 - \theta_{cp})}{\rho_2 c_2 (l - a(t))} \left\{ \frac{e^{-B_1 l}}{F_2(a(t))} - \frac{e^{B_1 l}}{F_1(a(t))} \right\}. \quad (7.48)$$

Після того, як функція $a = a(t)$ визначена, температурне поле в стрижні обчислюється за формулами (7.44), (7.45), а напружено-деформований стан за формулами (7.16), (7.18) – (7.20).

Таким чином, можна побудувати наступний алгоритм визначення напружено-деформованого стану в тілі Ω при фазовому переході. В момент часу t_k :

- 1) фіксуємо поверхню розділу фаз $a(t_k)$ і з розв'язку стаціонарної задачі теплопровідності визначаємо температури $\theta_i^{(k)}(x)$ ($i = 1, 2$) в тілі Ω ;
- 2) розв'язуємо контактну задачу для двох тіл, що займають області $\omega_1(t_k)$ і $\omega_2(t_k)$, і визначаємо поле переміщень $\mathbf{u}^{(k)}$;
- 3) для наявних значень $(\mathbf{u}^{(k)}, \theta^{(k)}, \gamma^{(k)})$ визначаємо внутрішню енергію $V^{(k)}$ й ентропію $S^{(k)}$ тіла Ω ;
- 4) з першого закону термодинаміки й умови максимуму ентропії $S^{(k)}$ тіла Ω визначається істинне положення межі розділу фаз $a_*^{(k)}$;
- 5) при знайденому положенні поверхні розділу фаз $a_*^{(k)}$ визначається істинна температура $\theta_*^{(k)}$ та істинне поле переміщень $\mathbf{u}_*^{(k)}$;
- 6) у наступний момент часу t_{k+1} початкова температура і положення межі розділу фаз відповідають знайденим у момент часу t_k , тобто

$$\theta^{(k+1)} = \theta_*^{(k)}, \quad a^{(k+1)} = a_*^{(k)}.$$

При цьому, запропонований алгоритм розв'язування задачі про визначення термомеханічного стану стрижня, що знаходиться в умовах фазового переходу враховує передісторію всього процесу в кожен момент часу t_k у законі руху межі розділу фаз, визначеному з варіаційного принципу Гіббса.

7.3. Формування термомеханічного стану циліндричного виливка у процесі кристалізації

Як впливає з наведеного в п. 7.1. опису процесу відцентрового лиття труб, необхідно побудувати модель процесу затвердіння деякого розплаву, що частково заповнює обертовий нескінченний порожній циліндр. Прийmemo деякі припущення. Оскільки аксіальний рух розплаву відносно виливниці незначний, його впливом можна зневажити, вважаючи плин плоским. Умови теплообміну на зовнішній поверхні виливниці однакові для всіх точок поверхні, торцевими ефектами, внаслідок великої довжини виливниці, також можна зневажити. Таким чином, перепад температур за довжиною системи виливниці – розплав може виникнути тільки при заповненні виливниці розплавом. Однак якщо аксіальний рух розплаву відсутній, то в дану точку виливниці розплав попадає безпосередньо з жолоба ливникової системи, а температура розплаву на виході з жолоба змінюється в процесі заливання дуже мало. Отже, аксіальним тепловим переносом у системі можна зневажити. Звідси з'являється можливість розглянути процес у деякому поперечному перерізі виливниці. Швидкість обертання виливниці вважаємо достатньою для того щоб потік рідини був суцільним, тобто виключалася можливість відриву часток рідини від внутрішньої поверхні циліндра в його верхній частині.

Розплави речовин, застосовуваних для виливка трубних заготівель, будемо вважати ідеальними нестисливими рідинами.

При зроблених припущеннях, процес відцентрового лиття труб, представляється можливим моделювати, як задачу механіки зростаючих тіл [3].

Розглянемо порожній циліндр круглого поперечного перерізу з внутрішнім радіусом b_1 і зовнішнім b . Введемо в недеформованій конфігурації циліндричну систему координат (r, ϑ, z) , вісь z якої збігається з віссю циліндра. Припустимо, що матеріал циліндра може знаходитись у двох агрегатних станах – рідкому і твердому. Поведінка матеріалу циліндра в рідкій і твердій фазах описується рівняннями стану неоднорідно старіючого в'язкопружного тіла. Позначимо через θ^0 температуру фазового переходу: при $\theta_2 < \theta^0$ елемент матеріалу знаходиться в твердій фазі, а при $\theta_1 > \theta^0$ – в рідкій. Для визначеності вважаємо, що до деформації речовина циліндра в твердій фазі займає область $\omega_2(t) = \{b_0 \leq r \leq b\}$, а речовина в рідкій – область $\omega_1(t) = \{b_1 \leq r \leq b_0\}$ (рис.

7.4). Теплова взаємодія зовнішньої поверхні циліндра з навколишнім середовищем характеризується конвективним коефіцієнтом тепловіддачі $\alpha_{\text{кон}}$ і випромінюванням. Внутрішня поверхня $r = b_1$ підтримується при постійній температурі f .

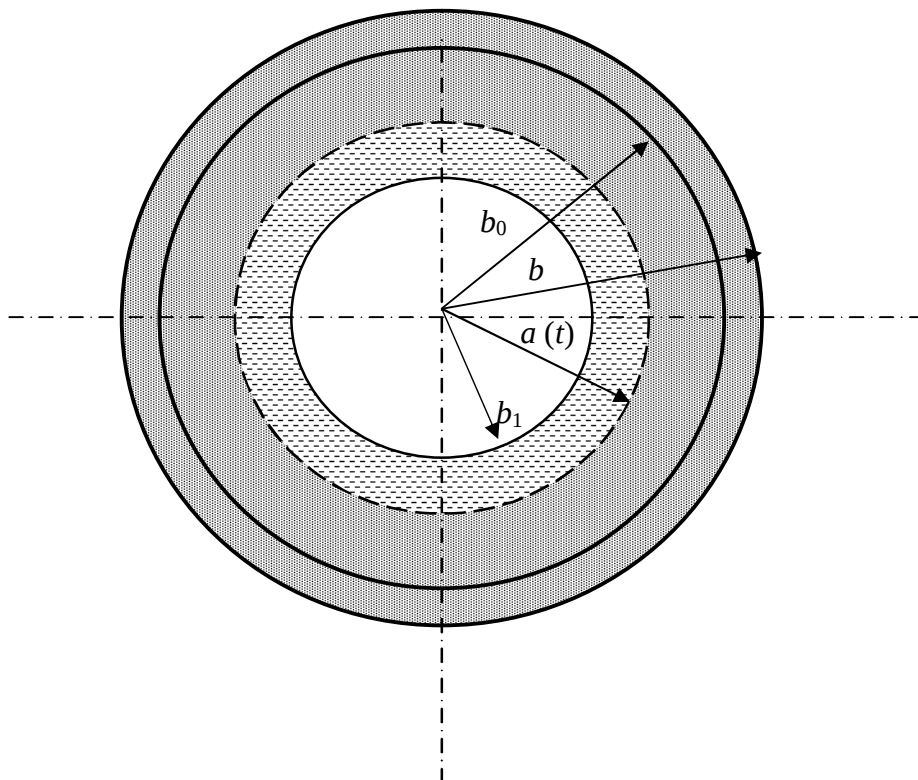


Рис. 7.4. Нарощування циліндра в умовах фазового переходу з урахуванням теплової взаємодії з навколишнім середовищем

У момент часу $t = 0$ до внутрішньої поверхні циліндра прикладається тиск інтенсивності $P(t)$ і з зовнішньої поверхні починається відтік тепла в навколишнє середовище. Після цього частина речовини циліндра переходить у тверду фазу (нарощування матеріалу) так, що межа твердої фази змінюється за законом $r = a = a(t)$.

Треба при заданому законі зміни зовнішнього навантаження $P = P(t)$ визначити закон руху межі розділу фаз $a = a(t)$, температуру $\theta_i = \theta_i(t, r)$ ($i = 1, 2$) і напружено-деформований стан у циліндрі у випадку плоского напруженого стану при лінійному законі повзучості.

Математична постановка задачі термов'язкопружності для зростаючого циліндра при наявності фазового переходу полягає у визначенні перерахованих невідомих із спільного розв'язування наступних рівнянь:

$$\varepsilon_{r,i}(t,r) = \frac{\partial u_{r,i}(t,r)}{\partial r}, \quad \varepsilon_{g,i}(t,r) = \frac{u_{g,i}(t,r)}{r} \quad (i=1,2); \quad (7.49)$$

$$\sigma_{r,i}(t,r) - \sigma_{g,i}(t,r) = 2G(t - \tau^*(r))(\varepsilon_{r,i}(t,r) - \varepsilon_{g,i}(t,r)) - \\ - \int_{\tau^*(r)}^t R_i(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(\varepsilon_{r,i}(\tau,r) - \varepsilon_{g,i}(\tau,r)) d\tau \quad (i=1,2); \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r,i}(t,r)}{\partial r} = - \frac{\sigma_{r,i}(t,r) - \sigma_{g,i}(t,r)}{r} \quad (i=1,2); \quad (7.51)$$

$$\varepsilon_{r,i}(t,r) + \varepsilon_{g,i}(t,r) = 0 \quad (i=1,2); \quad (7.52)$$

$$\rho_i c_i \frac{\partial \theta_i(t,r)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_i r \frac{\partial \theta_i(t,r)}{\partial r} \right) \quad (i=1,2). \quad (7.53)$$

У співвідношеннях (7.49) – (7.53) і надалі індекс «1» відноситься до параметрів речовини в рідкій, а індекс «2» – твердій фазі; $G(t - \tau^*(r))$ – пружно-миттєвий модуль зсуву.

Граничні і початкові умови задачі мають вигляд:

$$\sigma_{r,1}(t, b_1) = -P(t), \quad \sigma_{r,2}(t, b) = 0, \quad \sigma_{r,1}(t, a(t)) = \sigma_{r,2}(t, a(t)), \quad u_{r,1}(t, a(t)) = u_{r,2}(t, a(t));$$

$$\theta_1(t, b_1) = f, \quad -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, r)}{\partial r} \Big|_{r=b} = \alpha_{\text{кон}} [\theta_2(t, b) - \theta_{\text{cp}}] + \varepsilon_{12} \sigma_0 \theta_2^4(t, b),$$

$$\theta_2(t, a(t)) = \theta_1(t, a(t) - \Delta) = \theta^0, \quad -\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(t, r)}{\partial r} \Big|_{r=a(t)} = -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(t, r)}{\partial r} \Big|_{r=a(t)} + \rho_1 \mu \frac{da(t)}{dt},$$

$$\theta_i(t, r) \Big|_{t=0} = \theta_i(0, r). \quad (7.54)$$

Співвідношення (7.49) – (7.54) являють собою постановку задачі термов'язкопружності для зростаючого циліндра при наявності фазового переходу з урахуванням теплової взаємодії з навколишнім середовищем. Ця задача зводиться до розв'язання складних нелінійних інтегродиференціальних рівнянь, тому для розв'язання (7.49) – (7.54) застосуємо наближений аналітичний метод, запропонований у цій роботі, суть якого полягає в наступному.

Інтервал часу $[0, t_{\text{кон}}]$, на якому досліджується напружено-деформований стан у циліндрі, розбивається точками $t_k = k\Delta$, $\Delta = t_{\text{кон}}/N$, $k = 0, 1, \dots, N$ на підінтервали так, що процес безперервного нарощування (кристалізації) зміню-

ється дискретним процесом. У кожен момент часу t_k розв'язуються стаціонарна задача теплопровідності і пружна контактна задача для двох тіл $\omega_1(t)$ і $\omega_2(t)$. Використовуючи варіаційний принцип Гіббса, за допомогою граничного переходу визначається закон руху межі розділу фаз, який враховує зв'язаність температурних і механічних полів та їхню зміну за часом.

Розв'яжемо стаціонарну задачу теплопровідності для системи двох циліндричних тіл $\omega_1(t)$ і $\omega_2(t)$ (рис. 7.4) у момент часу t_k .

У цьому випадку рівняння теплопровідності для рідкої фази має вигляд

$$\frac{\partial^2 \theta_1(t_k, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_1(t_k, r)}{\partial r} = 0, \quad (7.55)$$

а для твердої –

$$\frac{\partial^2 \theta_2(t_k, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_2(t_k, r)}{\partial r} = 0. \quad (7.56)$$

Зовнішні граничні умови задачі:

$$\theta_1(t_k, b_1) = f, \quad (7.57)$$

$$-\lambda_2 \left. \frac{\partial \theta_2(t_k, r)}{\partial r} \right|_{r=b} = \alpha_{\text{кон}} [\theta_2(t_k, b) - \theta_{cp}] + \varepsilon_{12} \sigma_0 \theta_2^4(t_k, b) \approx \alpha [\theta_2(t_k, b) - \theta_{cp}]. \quad (7.58)$$

Умови на межі розділу фаз:

$$\theta_2(t_k, a(t_k)) = \theta_1(t_k, a(t_k) - \Delta) = \theta^0, \quad (7.59)$$

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial \theta_1(t_k, r)}{\partial r} \right|_{r=a(t_k)} = -\lambda_2 \left. \frac{\partial \theta_2(t_k, r)}{\partial r} \right|_{r=a(t_k)} + \rho_1 \mu [a(t_k) - a(t_{k+1})]. \quad (7.60)$$

Згідно [9; 16; 42; 53], розв'язок задачі (7.55) – (7.60) має вигляд

$$\theta_1(t_k, r) = f + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left\{ \frac{\alpha [\theta^0 - \theta_{cp}]}{\frac{\lambda_2}{b} + \alpha \ln \frac{b}{a(t_k)}} + \frac{\mu \rho_1}{\lambda_2} a(t_k) [a(t_k) - a(t_{k+1})] \right\} \ln \frac{b_1}{r}, \quad (7.61)$$

$$\theta_2(t_k, r) = \theta^0 - \frac{\alpha [\theta^0 - \theta_{cp}]}{\frac{\lambda_2}{b} + \alpha \ln \frac{b}{a(t_k)}} \ln \frac{r}{a(t_k)}. \quad (7.62)$$

Розглянемо контактну задачу двох тіл $\omega_1(t)$ і $\omega_2(t)$. При цьому будемо вважати, що речовина в рідкій фазі займає область $\omega_1(t_k) = \{b_1 \leq x \leq a(t_k)\}$, в твердій фазі – $\omega_2(t_k) = \{a(t_k) \leq x \leq b\}$.

У цьому випадку контактна задача зводиться до розв'язання наступної системи рівнянь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r,i}(t_k, r) &= \frac{\partial u_{r,i}(t_k, r)}{\partial r}, \quad \varepsilon_{g,i}(t_k, r) = \frac{u_{g,i}(t_k, r)}{r} \quad (i=1,2); \\ \varepsilon_{r,i}(t_k, r) &= \frac{1}{E_i} [\sigma_{r,i}(t_k, r) - \nu_i \sigma_{g,i}(t_k, r)], \quad \varepsilon_{g,i}(t_k, r) = \frac{1}{E_i} [\sigma_{g,i}(t_k, r) - \nu_i \sigma_{r,i}(t_k, r)]; \\ \frac{\partial \sigma_{r,i}(t, r)}{\partial r} &= - \frac{\sigma_{r,i}(t, r) - \sigma_{g,i}(t, r)}{r} \quad (i=1,2), \end{aligned} \quad (7.63)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \sigma_{r,1}(t_k, b_1) &= -P(t_k), \quad \sigma_{r,1}(t_k, a(t_k)) = -P_k(t_k), \\ \sigma_{r,2}(t_k, b) &= 0, \quad \sigma_{r,2}(t_k, a(t_k)) = -P_k(t_k), \quad u_{r,1}(t_k, a(t_k)) = u_{r,2}(t_k, a(t_k)). \end{aligned} \quad (7.64)$$

У співвідношеннях (7.63), (7.64) ν_i – коефіцієнт Пуассона; $P_k(t_k)$ – контактний тиск, одержаний з розв'язку задачі Ламе й умови неперервності радіальних переміщень на межі розділу фаз і має вигляд

$$P_k(t_k) = \frac{2P(t_k)b_1^2E_2}{E_1[(1-\nu_2)a^2(t_k) + (1+\nu_2)b^2][a^2(t_k) - b_1^2] + E_2[(1-\nu_1)a^2(t_k) + (1+\nu_1)b_1^2][b^2 - a^2(t_k)]}.$$

Згідно [42; 53], розв'язок задачі (7.63), (7.64) у момент часу t_k можна записати у вигляді

$$\sigma_{r,1}(t_k, r) = \frac{P(t_k)b_1^2 - P_k(t_k)a^2(t_k)}{a^2(t_k) - b_1^2} + \frac{b_1^2a^2(t_k)}{r^2} \frac{P(t_k) - P_k(t_k)}{a^2(t_k) - b_1^2}, \quad (7.65)$$

$$u_{r,1}(t_k, r) = \frac{1-\nu_1}{E_1} \frac{P(t_k)b_1^2 - P_k(t_k)a^2(t_k)}{a^2(t_k) - b_1^2} r + \frac{1+\nu_1}{E_1} \frac{a^2(t_k)b_1^2}{r} \frac{P(t_k) - P_k(t_k)}{a^2(t_k) - b_1^2}, \quad (7.66)$$

$$\sigma_{g,2}(t_k, r) = \frac{P_k(t_k)a^2(t_k)}{b^2 - a^2(t_k)} \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right), \quad (7.67)$$

$$u_{r,2}(t_k, r) = \frac{P_k(t_k)a^2(t_k)}{E_2(b^2 - a^2(t_k))} \left[(1-\nu_2)r + (1+\nu_2)\frac{b^2}{r} \right]. \quad (7.68)$$

Робота зовнішніх сил $A^{(k+1)}$ при переході з термодинамічного рівноважного стану $(\mathbf{u}^{(k)}, \theta^{(k)}, a^{(k)})$ у момент часу t_k у термодинамічний рівноважний стан $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}, a^{(k+1)})$ у момент часу t_{k+1} визначається за формулою, аналогічній (4.29) і має вигляд

$$\begin{aligned}
A^{(k+1)} = & \rho_1 P(t_{k+1}) \left\{ \frac{1-\nu_1}{2E_1} \left[\frac{P(t_{k+1})b_1^2 - P_k(t_{k+1})a^2(t_{k+1})}{a^2(t_{k+1}) - b_1^2} (a^2(t_k) - b_1^2) - \right. \right. \\
& \left. \left. - (P(t_k)b_1^2 - P_k(t_k)a^2(t_k)) \left[1 + \frac{a^2(t_{k+1}) - a^2(t_k)}{a^2(t_k) - b_1^2} \right] \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1+\nu_1}{E_1} b_1^2 \left[\frac{a^2(t_{k+1})(P(t_{k+1}) - P_k(t_{k+1}))}{a^2(t_{k+1}) - b_1^2} \ln \frac{a(t_k)}{b_1} - \frac{a^2(t_k)(P(t_k) - P_k(t_k))}{a^2(t_k) - b_1^2} \ln \frac{a(t_{k+1})}{b_1} \right] \right\} + \\
& + \rho_2 P(t_{k+1}) \left\{ \frac{1-\nu_2}{2E_2} \left[P_k(t_{k+1})a^2(t_{k+1}) \left(1 + \frac{a^2(t_{k+1}) - a^2(t_k)}{b^2 - a^2(t_{k+1})} \right) - (b^2 - a^2(t_{k+1})) \frac{P_k(t_k)a^2(t_k)}{b^2 - a^2(t_k)} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1+\nu_2}{E_2} b^2 \left[\frac{P_k(t_{k+1})a^2(t_{k+1})}{b^2 - a^2(t_{k+1})} \ln \frac{b}{a(t_k)} - \frac{P_k(t_k)a^2(t_k)}{b^2 - a^2(t_k)} \ln \frac{b}{a(t_{k+1})} \right] \right\}. \quad (7.69)
\end{aligned}$$

Відносно внутрішньої енергії скористаємося припущеннями попереднього параграфу і введемо збільшення температури в одиницю часу $\dot{\theta}_2^{cp}(t)$ таким чином

$$\frac{\rho_2 c_2}{2} (b^2 - a^2(t)) \dot{\theta}_2^{cp}(t) = \mu \rho_1 \dot{a}(t) a(t) + (\theta^0 - \theta_{cp}) \left\{ \frac{\lambda_2 \alpha}{\frac{\lambda_2}{b} + \alpha \ln \frac{b}{a(t)}} - \alpha \left[1 - \frac{\alpha \ln \frac{b}{a(t)}}{\frac{\lambda_2}{b} + \alpha \ln \frac{b}{a(t)}} \right] \right\}. \quad (7.70)$$

Тоді, внутрішня енергія $V^{(k)}$ циліндра в термодинамічному рівноважному стані в момент часу t_k ($k = 1, 2, \dots, N$), згідно з (7.39) буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
V^{(k)} = & \rho_1 c_1 \Delta \theta_1 (a(t_k) - b_1) + \frac{1}{3E_1 (a^2(t_k) - b_1^2) (a(t_k) + b_1)} \left[3(1-\nu_1) (P(t_k)b_1^2 - P_k(t_k)a^2(t_k))^2 + \right. \\
& \left. + b_1 a(t_k) (1+\nu_1) (P(t_k) - P_k(t_k))^2 (b_1^2 + b_1 a(t_k) + a^2(t_k)) \right] + \rho_2 c_2 \left\{ (\theta^0 - \theta_2^{cp}(t_k)) (b - a(t_k)) - \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha(\theta^0 - \theta_{cp})}{\frac{\lambda_2}{b} + \alpha \ln \frac{b}{a(t_k)}} \left(b \ln \frac{b}{a(t_k)} + a(t_k) \right) \left\} + \frac{P_k^2(t_k) a(t_k)}{E_2 (b^2 - a^2(t_k))^4} [b^4 (1 + \nu_2) - a^4(t_k) (1 - \nu_2) - 2\nu_2 b a^3(t_k)]. \quad (7.71)$$

Далі, виходячи з методу, викладеному в попередньому параграфі з умови екстремуму функції ентропії, переходячи до границі при $N \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$, $t_k \rightarrow t$, одержимо

$$\begin{aligned} & \rho_1 c_1 \Delta \theta_1 + \mu \rho_1 + \frac{\alpha^2 \lambda_2 (\theta^0 - \theta_{cp})}{b a(t) \left(\frac{\lambda_2}{b} + \alpha \ln \frac{b}{a(t)} \right)^2} - \rho_1 P(t) \left\{ -\frac{1 - \nu_1}{2 E_1} \left[2 P_k(a(t)) + a^2(t) \frac{dP_k(a(t))}{da(t)} \right] + \right. \\ & + \frac{1 + \nu_1}{E_1} b_1^2 \left[\frac{\left[2 a(t) (P(t) - P_k(a(t))) - a^2(t) \frac{dP_k(a(t))}{da(t)} \right] (a^2(t) - b_1^2) - 2 a^3(t) (P(t) - P_k(a(t)))}{(a^2(t) - b_1^2)^2} \ln \frac{a(t)}{b_1} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{a(t) (P(t) - P_k(a(t)))}{(a^2(t) - b_1^2)} \right] \right\} - \rho_2 P(t) \left\{ \frac{1 - \nu_2}{2 E_2} \left[2 P_k(a(t)) + a^2(t) \frac{dP_k(a(t))}{da(t)} + 2 P_k(a(t)) \frac{a^3(t)}{b^2 - a^2(t)} \right] + \right. \\ & + \frac{1 + \nu_2}{E_2} b^2 \left[\frac{\left[2 a(t) P_k(a(t)) + a^2(t) \frac{dP_k(a(t))}{da(t)} \right] (b^2 - a^2(t)) + 2 a^3(t) P_k(a(t))}{(a^2(t) - b_1^2)^2} \ln \frac{b}{a(t)} + \right. \\ & + \frac{a(t) P_k(a(t))}{(b^2 - a^2(t))} \left. \right] \left\} + \frac{1}{(a^2(t) - b_1^2)^2 (a(t) + b_1)^2} \left\{ \left[-6(1 - \nu_1) \left(a(t) P_k(a(t)) + a^2(t) \frac{dP_k(a(t))}{da(t)} \right) \times \right. \right. \\ & \times (P(t) b_1^2 - P_k(a(t)) a^2(t)) + b_1 (1 + \nu_1) (P(t) - P_k(a(t))) \left[b_1 a(t) + 2 a^2(t) + \right. \\ & \left. \left. + \left(P(t) - P_k(a(t)) - 2 a(t) \frac{dP_k(a(t))}{da(t)} \right) (b_1^2 + b_1 a(t) + a^2(t)) \right] \right] (a^2(t) - b_1^2) (a(t) + b_1) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(3a^2(t) + 2b_1 a(t) - b_1^2 \right) \left[3 \left(1 - \nu_1 \right) \left(P(t) b_1^2 - P_k(a(t)) a^2(t) \right)^2 + \right. \\
& \left. + b_1 a(t) (1 + \nu_1) \left(P(t) - P_k(a(t)) \right)^2 \left(b_1^2 + b_1 a(t) + a^2(t) \right) \right] \Bigg\} + \rho_2 c_2 \left\{ \theta_2^{cp}(t) - \theta^0 - \right. \\
& \left. - \frac{\alpha(\theta^0 - \theta_{cp})}{\frac{\lambda_2}{b} + \alpha \ln \frac{b}{a(t)}} \left[1 - \frac{b}{a(t)} + \frac{\alpha \left(b \ln \frac{b}{a(t)} - b + a(t) \right)}{a(t) \left(\frac{\lambda_2}{b} + \alpha \ln \frac{b}{a(t)} \right)} \right] \right\} + \frac{P_k^2(a(t)) + 2a(t) P_k(a(t)) \frac{dP_k(a(t))}{da(t)}}{E_2 (b^2 - a^2(t))^4} \times \\
& \times \left[b^4 (1 + \nu_2) - 5a^4(t) (1 - \nu_2) - 8\nu_2 b a^3(t) \right] = 0. \tag{7.72}
\end{aligned}$$

Співвідношення (7.61), (7.62), (7.70), (7.72) являють собою систему нелінійних рівнянь для визначення температурного поля в циліндрі і положення межі розділу фаз. Напружено-деформований стан визначається за формулами (7.65) – (7.68). Результати чисельного розв’язання системи рівнянь (7.61), (7.62), (7.70), (7.72) зображені на рис. 7.5 – 7.11 при наступних значеннях основних параметрів $E_2 = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^2$, $\theta^0 = 1765 \text{ K}$, $\theta_{cp} = 293 \text{ K}$, $f = 1800 \text{ K}$, $\mu = 2.4 \text{ МДж/кг}$, $\rho_1 = 7000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 7800 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 837 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$, $c_2 = 565 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$, $\lambda_1 = 23.3 \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}$, $\lambda_2 = 48.1 \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}$, $\varepsilon_{12} = 0.8$, $b = 0.06 \text{ м}$, $b_0 = 0.05 \text{ м}$, $b_1 = 0.02 \text{ м}$, $\nu_1 = 0.5$, $\nu_2 = 0.29$.

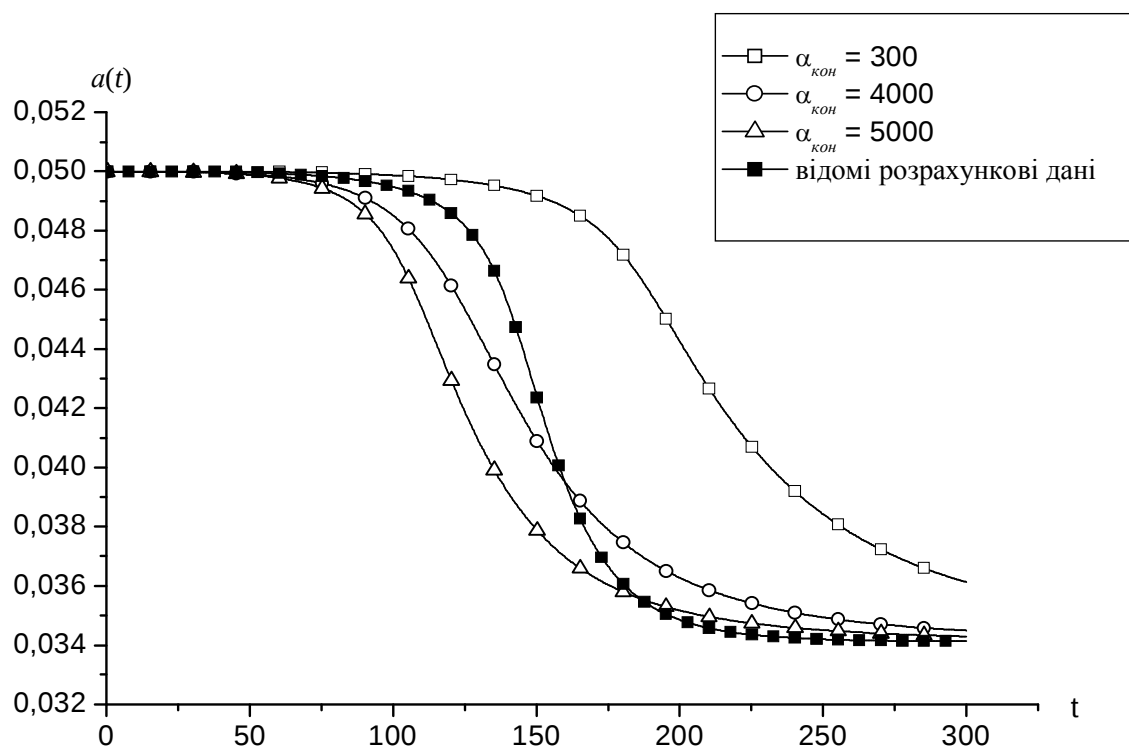


Рис. 7.5. Вплив інтенсивності охолодження циліндра на закон руху межі розділу фаз

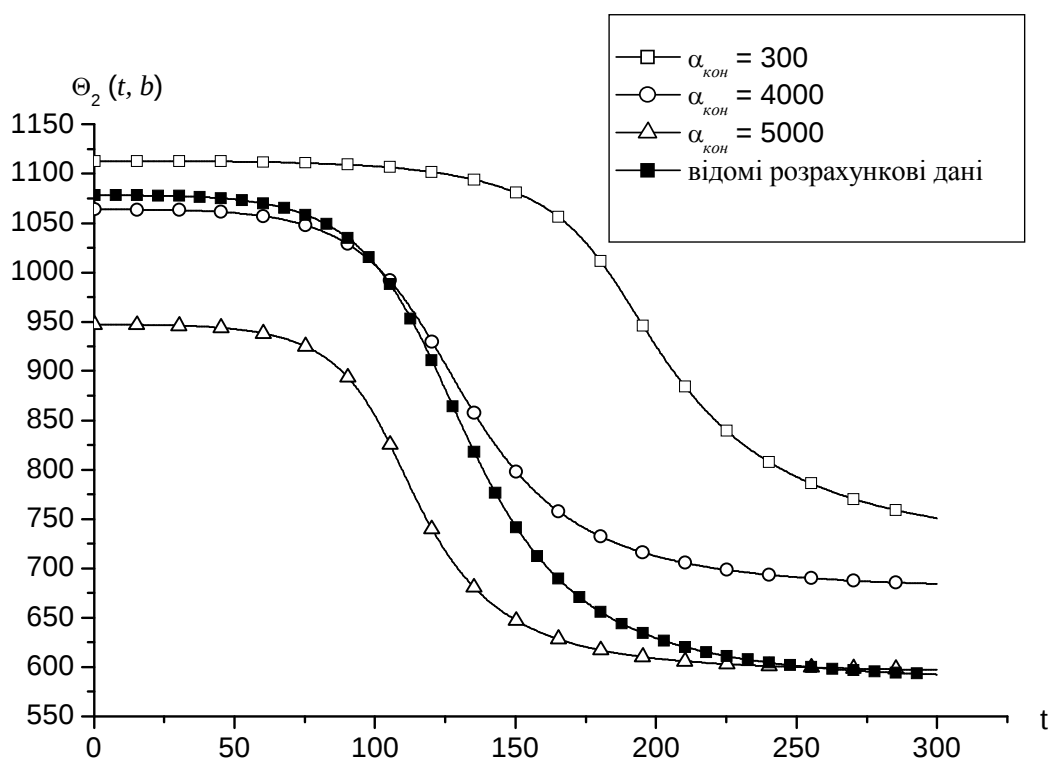


Рис. 7.6. Вплив інтенсивності охолодження на температуру зовнішньої поверхні зростаючого в умовах фазового переходу циліндра

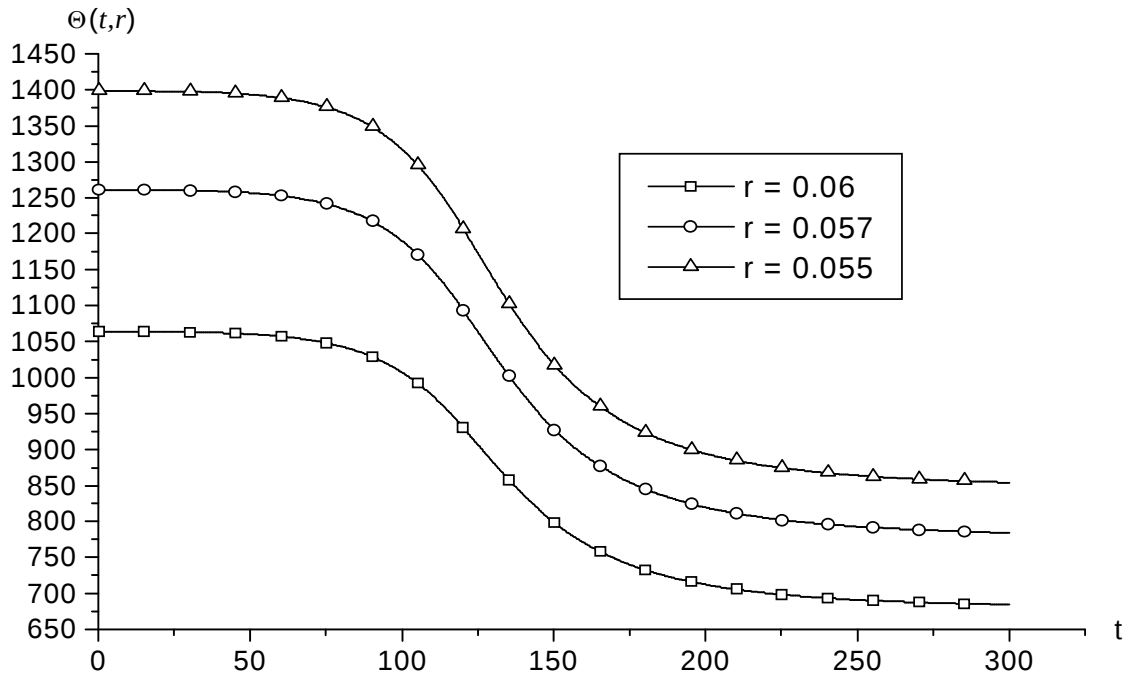


Рис. 7.7. Зміна температури за часом для різних значень точок поперечного перерізу твердої фази циліндра

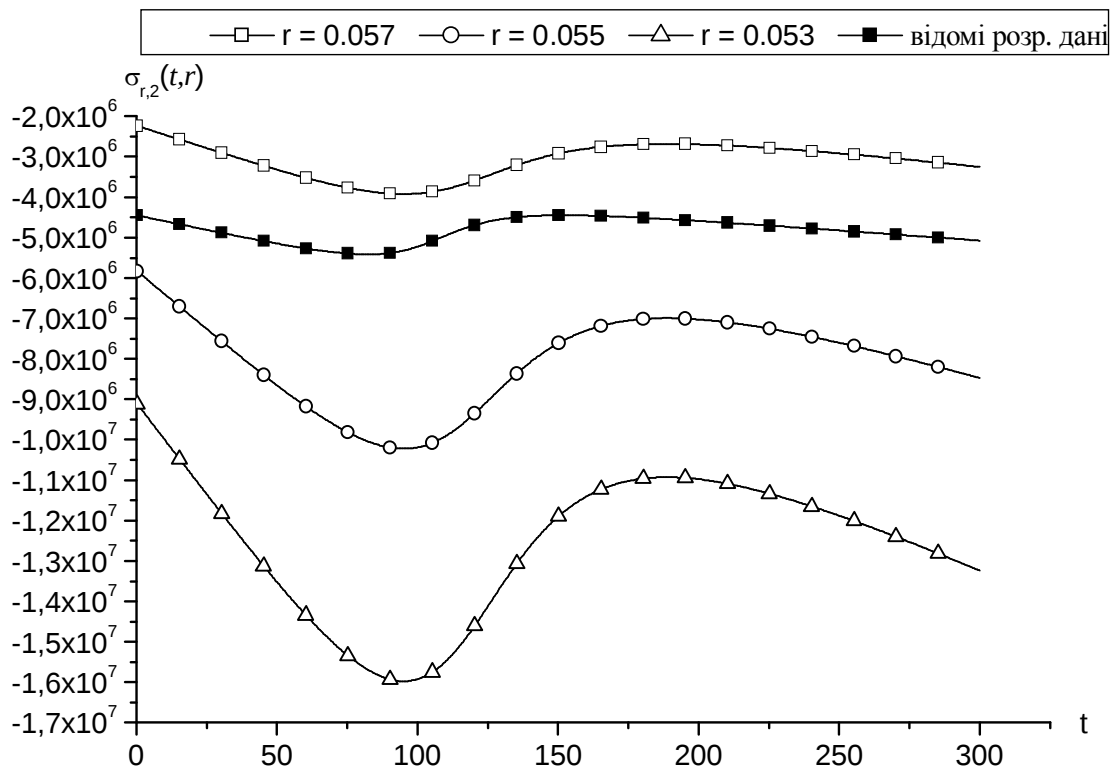


Рис. 7.8. Розподіл за часом радіальних напружень зростаючого циліндра в різних точках поперечного перерізу

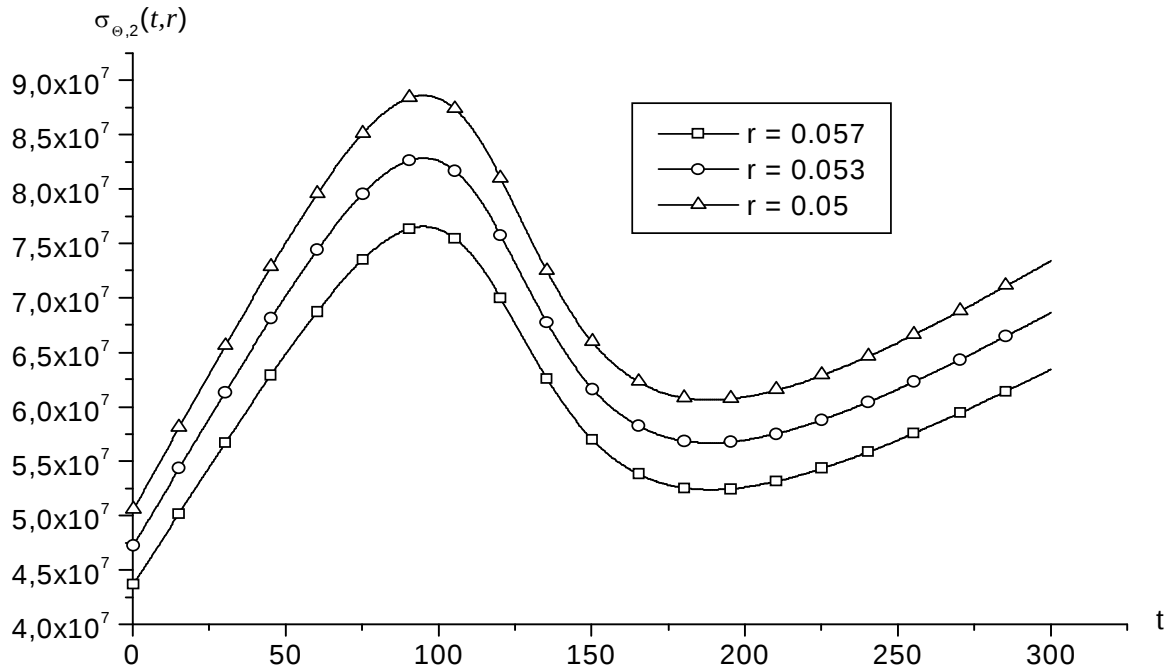


Рис. 7.9. Розподіл за часом тангенціальних напружень зростаючого циліндра в різних точках поперечного перерізу

На рис. 7.5 – 7.7 показано вплив умов теплообміну зовнішньої поверхні циліндра з навколишнім середовищем на закон руху межі розділу фаз, зміна температурного поля $\theta_2(t, b)$ за часом, а також залежність $\theta_2(t, r)$ від часу для різних точок поперечного перерізу циліндра при фіксованому значенні $\alpha_{\text{кон}} = 4 \cdot 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Працездатність алгоритму підтверджується порівнянням одержаних результатів з даними [19; 34; 46] для закону руху межі розділу фаз при $\alpha_{\text{кон}} = 3 \cdot 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ (матеріал – чавун) і для зміни температури зовнішньої поверхні при $100 < \alpha_{\text{кон}} < 5 \cdot 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. На графіках, зображених на рис. 7.8 – 7.9 наведений розподіл радіальних і тангенціальних напружень за часом для різних точок поперечного перерізу твердої фази циліндра з урахуванням температурних полів при фіксованому значенні $\alpha_{\text{кон}} = 4 \cdot 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. На зображених графіках можна простежити динаміку радіальних і тангенціальних напружень. Основна тенденція зміни напружень за часом полягає в тому, що з часом тангенціальні напруження $\sigma_{\theta,2}(t, r)$ збільшуються за перетином, а радіальні $\sigma_{r,2}(t, r)$ – зменшуються і вирівнюються. Тут же вміщені аналогічні дані з [19; 34], що задовільно погоджуються з розрахунковими.

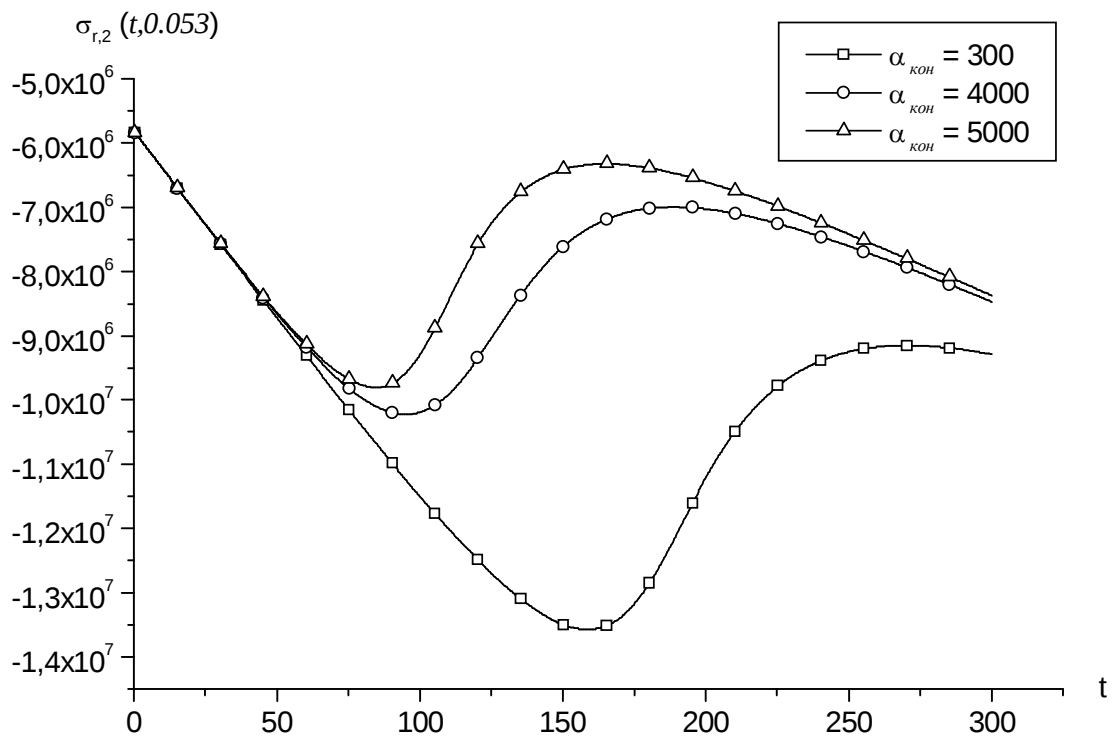


Рис. 7.10. Вплив інтенсивності охолодження деталі на радіальні переміщення в поперечному перерізі твердої фази $r = 0.053 \text{ м}$

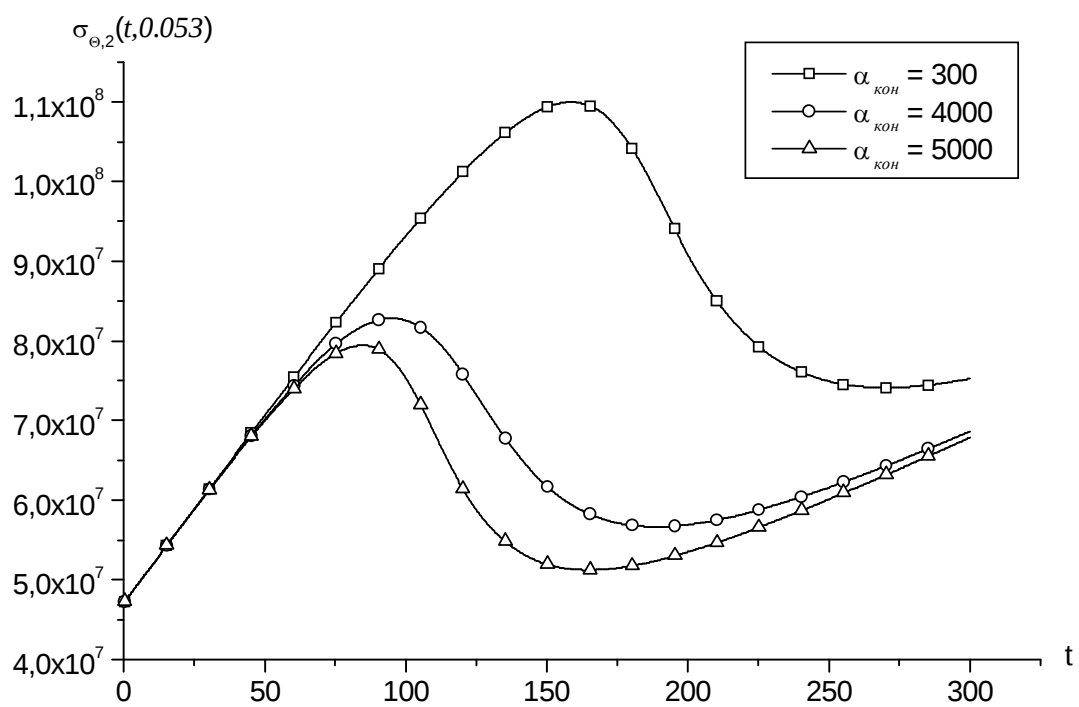


Рис. 7.11. Вплив інтенсивності охолодження деталі на тангенціальні переміщення в поперечному перерізі твердої фази $r = 0.053 \text{ м}$

На рис. 7.10, 7.11 зображені порівняльні характеристики зміни за часом радіальних і тангенціальних напружень, які виникають у поперечному перерізі $r = 0.053 \text{ м}$ твердої фази циліндра при різних значеннях $\alpha_{\text{кон}}$. Видно, що із збільшенням інтенсивності теплообміну зовнішньої поверхні з навколишнім середовищем спостерігається зростання амплітуди напружень. Крім того, з ростом $\alpha_{\text{кон}}$ при збереженні картини зміни напружень за часом спостерігається їхнє зростання за абсолютною величиною.

Аналіз одержаних результатів показує, що зміна умов теплообміну з навколишнім середовищем і геометричних розмірів впливають на процес кристалізації, а отже – на температурні і механічні поля.

РОЗДІЛ 8

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РОЗРОБЦІ НОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПОШУКУ КОРИСНИХ КОПАЛИН

8.1. Постановка проблеми

Технологія колонкового буріння – важлива складова робіт по розвідуванню родовищ корисних копалин [29]. Здійснюється вона наступними способами: обертальним (твердосплавне, алмазне, безкернове, буріння установками з безперервним виносом керну потоком промивочної рідини) і ударно-обертальним (гідроударне, гідроударно-алмазне, пневмоударне буріння). Твердосплавне, алмазне і безкернове буріння не мають ніяких обмежень в застосуванні за горно-геологічними і географічними умовами буріння розвідувальних свердловин.

Ефективність бурових робіт визначається достатньо великою кількістю факторів: фізико-механічні властивості породи, її буримість, тріщинуватість, горно-геологічні та географічні умови. Фізичний ККД руйнування гірських порід складає не більше 2% [21]. Одним із чинників, який обумовлює низький ККД є той факт, що переважна більшість механічної енергії (до 95–98%), що реалізується на забої, переходить у теплову, оскільки в процесі буріння породоруйнуючий інструмент нагрівається за рахунок механічної роботи. Теплота, що генерується на забої, поступає через алмази в тіло коронки і частково в породу.

В теперішній час розроблено ряд нових технологій, які дозволяють підвищити ефективність такого роду процесів. Зокрема, спеціалістами Національного гірничого університету України [22] проводяться дослідження по термоциклічному впливу на породу з ціллю розвитку напружень від втоми в ній. Дана технологія зв'язана зі змінним режимом охолодження стовбура свердловини. Але, слід відмітити, що в складних теплових умовах буде знаходитись, як і порода, що руйнується, так і сам породоруйнуючий інструмент.

Породоруйнуючий інструмент являє собою бурову коронку, робоча поверхня якої армована твердими сплавами і алмазами. Працездатність і зносо-

стійкість породоруйнуючого інструменту в значній мірі залежить від інтенсивності охолодження його в процесі роботи на забої. Зокрема відомо, що алмази втрачають свою твердість і зносостійкість на 30% при температурі 600 °С і вище. Те ж саме спостерігається при нагріванні твердого сплаву, але в меншій мірі. В зв'язку з цим, забезпечення відповідного температурного режиму є важливою задачею при проектуванні процесу буріння [29]. Особливий інтерес представляє розрахунок температури нагрівання ріжучих граней об'ємних алмазів при роботі алмазної коронки на забої. В цьому випадку одним із ключових методів дослідження є математичне моделювання теплообмінних процесів.

Охолодження породоруйнуючого інструменту при бурінні свердловин відбувається за рахунок конвективного теплообміну, що залежить від багатьох факторів, основними з яких є режим руху потоку, форма і розміри поверхні, яка охолоджується. Охолоджувачем є очисний агент, що подається в свердловину з метою очистки стовбура від шламу. Розраховані для забезпечення надійного виносу шламу з свердловини витрати промивочної рідини забезпечують також достатнє охолодження породоруйнуючого інструменту. В якості очисних агентів (охолоджувачів) використовують технічну воду, піну, стиснуте повітря та ін.

Схема промивки свердловини представлена на рисунку 8.1. Охолоджувач поступає в породоруйнуючий інструмент через промивочні канали, що проходять по всій довжині інструменту.

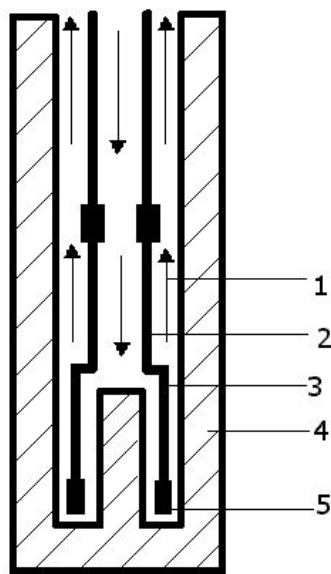


Рис 8.1. Схема промивки свердловини: 1 - охолоджувач; 2 - корпус; 3 - матриця; 4-порода, що руйнується, 5 - алмазна коронка

Витрати промивочної рідини при бурінні повинні забезпечувати повне очищення забою від зруйнованої породи і винос її на поверхню. При недостатньому промиванні на забої проходить вторинне подрібнення породи, що знижує швидкість буріння і підвищує спрацювання породоруйнуючого інструменту. В деякий момент досягається тепловий баланс: кількість тепла, що надходить в одиницю часу, стає рівною кількості тепла, що відводиться очисним агентом, і в тілі інструменту встановлюється стале поле температур, тобто, має місце усталений стаціонарний режим теплообміну.

Для режиму постійного охолодження інструменту стаціонарна задача по визначенню теплового стану інструменту розв'язана аналітично в [25]. Але режим термоциклічного навантаження інструменту на цій час залишається до кінця не вивченим і потребує проведення комплексних досліджень, які ляжуть в основу підвищення ефективності процесу буріння.

8.2. Математична модель

Сформулюємо математичну модель для дослідження процесів теплопереносу в породоруйнуючому інструменті.

Схема породоруйнуючого інструменту показана на рис.8.2.

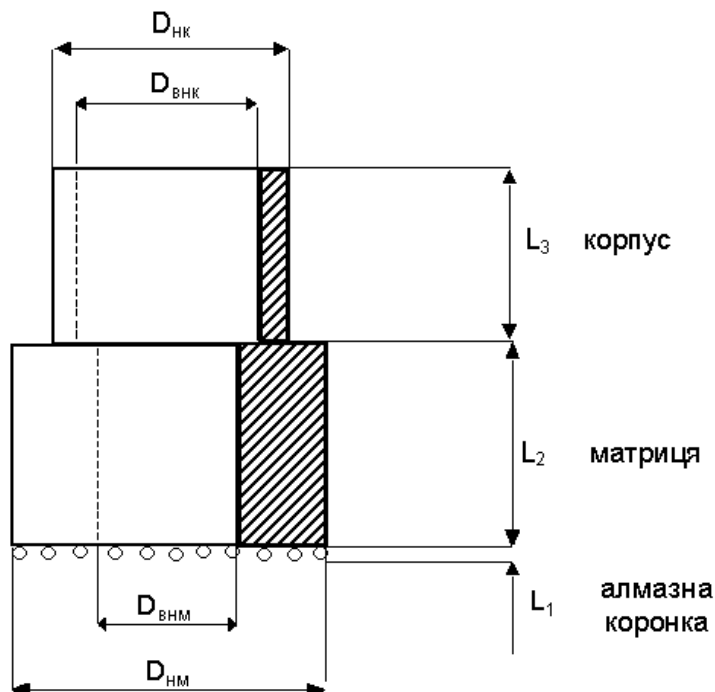


Рис 8.2. Схема матриці і корпусу алмазної коронки

Коефіцієнт тепловіддачі при конвективному теплообміні між коронкою і очисним агентом залежить від режиму течії потоку, який характеризується параметром Рейнольдса

$$Re = \frac{v d_s}{\nu}, \quad (8.1)$$

де v – швидкість потоку рідини, $м/с$; ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості, $м^2/с$; d_s – характерний розмір, $м$.

При розрахунку критерію Рейнольдса слід враховувати швидкість руху потоку в промивочних каналах, яка може бути розрахована за формулою

$$v = \frac{V_0}{d h_k k}, \quad (8.2)$$

де k – кількість промивочних каналів, d – ширина промивочного каналу, $м$; h_k – глибина промивочного каналу, $м$; V_0 – витрати промивочної рідини, $м^3/хв$.

При побудові розрахункової моделі приймемо ряд припущень для спрощення теоретичних викладок.

Одиничний об'ємний алмаз це обмежений циліндр, що має спільну контактну поверхню з матрицею, на торець якого поступає тепловий потік q_s

$$q_s = \frac{L k_p N}{F_a}, \quad (8.3)$$

$$F_a = \frac{\pi D_a}{2} \left(\Delta + \frac{D_a}{2} \right) Z_T, \quad (8.4)$$

$$\Delta = 0.01 D_a, \quad (8.5)$$

$$Z_T = \frac{2}{3} \text{ карат} * \text{ каратність}, \quad (8.6)$$

де N – потужність на забої, $Вт$; L – загальна довжина інструменту, $м$; D_a – діаметр алмазу, $м$; F_a – площа контакту алмазного зерна, $м^2$.

Вільний торець корпусу теплоізований, тому що стрічкову різьбу можна вважати тепловим опором.

Початкова температура стрижня - T_o , температура очисного агента постійна і дорівнює $T_{жс}$.

Охолодження за рахунок очисного агента враховується шляхом введення внутрішніх стоків тепла

$$q_v = \frac{\alpha p_i}{F_i} (T - T_{жс}), \quad (8.7)$$

де p_i, F_i –периметр і площа відповідної ділянки.

Для матриці

$$F_m = 0.785(D_{nm}^2 - D_{вnm}^2) - blk, \quad (8.8)$$

де b – ширина каналу, м; l – довжина каналу, м; k – кількість каналів.

Для корпусу

$$F_k = 0.785(D_{нк}^2 - D_{внк}^2). \quad (8.9)$$

В якості розрахункової області оберемо одновимірний стрижень, що показаний на рис.8.3.

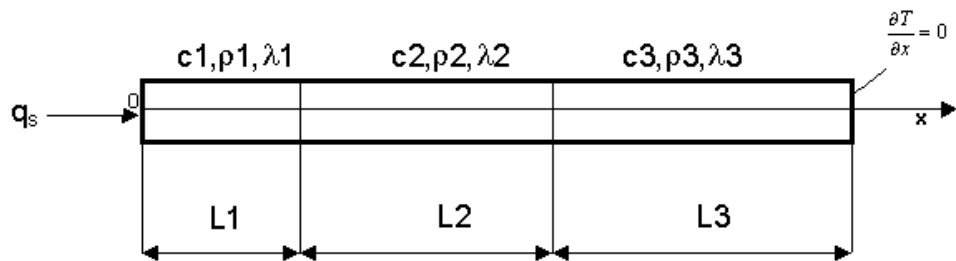


Рис 8.3. До розрахунку температурного поля в породоруйнуючому інструменті

Запишемо систему рівнянь, що описує процес теплопровідності в стрижні:

рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{q_{vi}}{c\rho}, \quad i=1,2,3. \quad (8.10)$$

Початкова умова

$$T_i|_{\tau=0} = T_0. \quad (8.11)$$

Граничні умови:

$$-\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s, \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0. \quad (8.12)$$

На стикові ділянок, для спрощення, приймемо умови ідеального теплового контакту:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1|_{x=L_1} = T_2|_{x=L_1} \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L_1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} T_2|_{x=L_1+L_2} = T_3|_{x=L_1+L_2} \\ \lambda_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L_1+L_2} = \lambda_2 \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=L_1+L_2} \end{array} \right. . \quad (8.13)$$

Приведемо дану задачу до безрозмірного вигляду. В якості масштабів виберемо $L, T_0 - T_{жс}$. Значення масштабних одиниць дорівнюють: $x = \frac{x}{L}$;

$$\theta = \frac{T - T_{жс}}{T_0 - T_{жс}}; L = L_1 + L_2 + L_3.$$

Одержимо

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a_{max}} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} + \frac{a_i}{a_{max}} Os_i, i=1,2,3, \quad (8.14)$$

де $Os_i = \frac{p_{ych} L^2}{F_{ych} \lambda_i} \theta_i$, $Fo = \frac{a_{max} \tau}{L^2}$, a_{max} – максимальне значення серед $a_i (i = 1,2,3)$.

Початкова умова

$$\theta_i|_{\tau=0} = 1. \quad (8.15)$$

Граничні умови:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -Ki, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0. \quad (8.16)$$

Умови на стикові:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1|_{x=L_1/L} = \theta_2|_{x=L_1/L} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=L_1/L} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=L_1/L} \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} \theta_2|_{x=L_2/L} = \theta_3|_{x=L_2/L} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=L_2/L} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \Big|_{x=L_2/L} \end{array} \right. . \quad (8.17)$$

Система (8.14) - (8.17) представляє собою систему рівнянь для розрахунку полів температури в породоруйнуючому інструменті, для розв'язку якої обираємо чисельний метод.

8.3. Метод розрахунку

Для розв'язку системи рівнянь (8.14 – 8.17) у розрахунковій області введемо рівномірну сітку з кроком Δx , $\Delta \tau$. Використовуємо схему наскрізного розрахунку по довжині стрижня. За початок координат приймемо точку контакту ріжучих граней бурових алмазів з породою забою. Температура стрижня буде розраховуватись в моменти часу Fo_i . Для апроксимації рівняння використовується метод скінчених різниць за неявною схемою. Дана схема має перший порядок точності за часом і другий за координатою. Неявна схема є безумовно-стійкою, тобто стійкість розрахунків за цією схемою не залежить від кроку сітки [11]. Проведемо апроксимацію похідних:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\theta_i^j - \theta_i^{j-1}}{\Delta Fo}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\theta_i^j - \theta_{i-1}^j}{\Delta x}; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \quad (8.18)$$

Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для внутрішніх вузлів сітки:

$$\frac{\theta_i^j - \theta_i^{j-1}}{\Delta Fo} = \frac{a_i}{a_{max}} \frac{\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_i}{a_{max}} Os_k, \quad i=1,2,\dots,N-1, \quad (8.19)$$

$$\text{де } Os_k = \frac{p_{yc} H^2}{F_{yc} \lambda_i} \theta_i^{j-1}, \quad k=1,2,3.$$

Для забезпечення другого порядку точності при апроксимації граничних умов і умов на стикові використаємо метод фіктивних точок [31]. Розглянемо граничну умову на лівому торці циліндра

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -Ki. \quad (8.20)$$

Введемо фіктивну точку (рис.8.4): $x_{-1} = x_0 - \Delta x$.

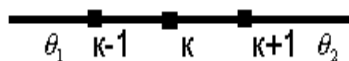


Рис.8.4. Апроксимація умов на стику методом фіктивних точок

Апроксимуємо граничні умови симетричною різницею

$$\frac{\theta_1^j - \theta_{-1}^j}{2\Delta x} = -Ki,$$

звідки: $\theta_{-1}^j = 2\Delta x Ki + \theta_1^j$.

Рівняння теплопровідності для граничних точок

$$\frac{\theta_0^j - \theta_0^{j-1}}{\Delta Fo} = \frac{a_1}{a_{max}} \frac{\theta_1^j - 2\theta_0^j + \theta_{-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_1}{a_{max}} Os_1.$$

Підставимо вираз для значення температури у фіктивному вузлі

$$\frac{\theta_1^j - \theta_0^j}{\Delta x} = -Ki + \frac{a_{max}}{a_1} \frac{\Delta x}{2} \frac{\theta_0^j - \theta_0^{j-1}}{\Delta Fo} - \frac{Os_1 \Delta x}{2}. \quad (8.21)$$

Аналогічно для правої межі

$$\frac{\theta_N^j - \theta_{N-1}^j}{\Delta x} = \frac{a_{max}}{a_3} \frac{\Delta x}{2} \frac{\theta_N^j - \theta_N^{j-1}}{\Delta Fo} - \frac{Os_3 \Delta x}{2}. \quad (8.22)$$

Для умов на стику (8.17):

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{\theta_{1k+1} - \theta_{1k-1}}{2\Delta x} = \lambda_2 \frac{\theta_{2k+1} - \theta_{2k-1}}{2\Delta x} \\ \theta_{1k} = \theta_{2k} \\ \frac{\theta_{1k}^j - \theta_{1k}^{j-1}}{\Delta Fo} = \frac{a_1}{a_{max}} \frac{\theta_{1k+1}^j - 2\theta_{1k}^j + \theta_{1k-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_1}{a_{max}} Os_1 \\ \frac{\theta_{2k}^j - \theta_{2k}^{j-1}}{\Delta Fo} = \frac{a_2}{a_{max}} \frac{\theta_{2k+1}^j - 2\theta_{2k}^j + \theta_{2k-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_2}{a_{max}} Os_2 \end{array} \right. \quad (8.23)$$

З цієї системи отримаємо рівняння, які містять $\theta_{1k-1}, \theta_{1k}, \theta_{2k+1}$.

$$\theta_{1k+1} - \theta_{1k-1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (\theta_{2k+1} - \theta_{2k-1}), \theta_{1k+1} = \theta_{1k-1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (\theta_{2k+1} - \theta_{2k-1}),$$

$$\frac{a_1}{a_{max}} \frac{\theta_{1k+1}^j - 2\theta_{1k}^j + \theta_{1k-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_1}{a_{max}} Os_1 = \frac{a_2}{a_{max}} \frac{\theta_{2k+1}^j - 2\theta_{2k}^j + \theta_{2k-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_2}{a_{max}} Os_2 \quad (8.24)$$

З (8.24) отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{a_{\max}} \frac{\theta_{1k-1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (\theta_{2k+1} - \theta_{2k-1}) - 2\theta_{1k}^j + \theta_{1k-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_1}{a_{\max}} Os_1 = \\ & = \frac{a_2}{a_{\max}} \frac{\theta_{2k+1}^j - 2\theta_{2k}^j + \theta_{2k-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_2}{a_{\max}} Os_2 \end{aligned} \quad (8.25)$$

Із (8.25) виразимо θ_{2k-1}^j та підставимо в останнє рівняння системи (8.23), тоді одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{2k}^j - \theta_{2k}^{j-1}}{\Delta Fo} = & -2 \frac{a_2}{a_{\max}} \frac{\theta_{2k}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_2}{a_{\max}} \frac{\theta_{2k+1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_2}{a_{\max}} Os_2 + \frac{2a_1}{s} \frac{a_2}{a_{\max}} \frac{\theta_{1k-1}^j}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{a_2}{a_{\max}} \frac{\theta_{2k}^j}{\Delta x^2} (2a_2 - 2a_1) + \frac{a_2}{a_{\max}} \frac{Os_1 a_1 - Os_2 a_2}{s} + \frac{a_2}{a_{\max}} \frac{\theta_{2k+1}^j}{\Delta x^2} \left(a_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - a_2 \right) \end{aligned} \quad (8.24)$$

де $s = a_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - a_2$.

Аналогічно

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{3k}^j - \theta_{3k}^{j-1}}{\Delta Fo} = & -2 \frac{a_3}{a_{\max}} \frac{\theta_{3k}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_3}{a_{\max}} \frac{\theta_{3k+1}^j}{\Delta x^2} + \frac{a_3}{a_{\max}} Os_3 + \frac{2a_2}{s} \frac{a_3}{a_{\max}} \frac{\theta_{2k-1}^j}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{a_3}{a_{\max}} \frac{\theta_{3k}^j}{\Delta x^2} (2a_3 - 2a_2) + \frac{a_3}{a_{\max}} \frac{Os_2 a_2 - Os_3 a_3}{s} + \frac{a_3}{a_{\max}} \frac{\theta_{k+1}^j}{\Delta x^2} \left(a_2 \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - a_3 \right) \end{aligned} \quad (8.25)$$

де $s = a_2 \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - a_3$.

Таким чином одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що має матриці з трьохдіаганальною структурою. Дана система ефективно розв'язується методом прогонки [31].

8.4. Дослідження розподілу температурних полів у породоруйнуючому інструменті для різних режимах охолодження

Наводимо результати чисельних експериментів по дослідженню температурних полів у породоруйнуючому інструменті для змінного режиму охолодження. Для проектування відповідних режимів буріння за максимально допустиму температуру прийнято температуру 600°C .

При розрахунку були обрані наступні значення фізичних величин і лінійних розмірів [25].

1. Алмаз:

$$\lambda_{\text{ал}}=146.5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}; \quad a_{\text{ал}}=0.8^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}; \quad c_{\text{ал}}=1000 \frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}; \quad \rho_{\text{ал}}=3511 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$l=0.61\text{e-}03 \text{ м}; \quad d_{\text{ал}}=2.65\text{e-}03 \text{ м}; \quad 6 \text{ карат}; \quad \text{каратність } 60 \text{ шт/карат}.$$

2. Матриця:

$$\lambda_{\text{м}}=200 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}; \quad c_{\text{м}}=833 \frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}; \quad \rho_{\text{м}}=2787 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad l_{\text{м}}=0.014 \text{ м};$$

$$d_{\text{внм}}=0.042 \text{ м}; \quad d_{\text{нм}}=0.059 \text{ м}.$$

3. Корпус:

$$\lambda_{\text{к}}=45 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}; \quad c_{\text{к}}=460 \frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}; \quad \rho_{\text{к}}=7865 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad l_{\text{к}}=0.025 \text{ м};$$

$$d_{\text{внк}}=0.044 \text{ м}; \quad d_{\text{нк}}=0.057 \text{ м}.$$

$$\text{Очисний агент – вода: } \nu_{\text{в}}=1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}; \quad \text{Pr}=7; \quad \lambda_{\text{в}}=0.597 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}};$$

$$\rho_{\text{в}}=1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \text{витрати: } q=0.04 \frac{\text{м}^3}{\text{хв}}; \quad t_{\text{в}}=15^{\circ}\text{C}.$$

Розміри каналів: $b1=0.008 \text{ м}$ {ширина}; $b2=0.004 \text{ м}$ {глибина}; $b3=8.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ {довжина}; кількість каналів – 4.

На практиці особливий інтерес представляє значення температури ріжучих граней алмазів. На рис. 8.5. представлено результати розрахунку температури торця ріжучих граней алмазів ($x=0$) для режиму буріння з постійним охолодженням водою.

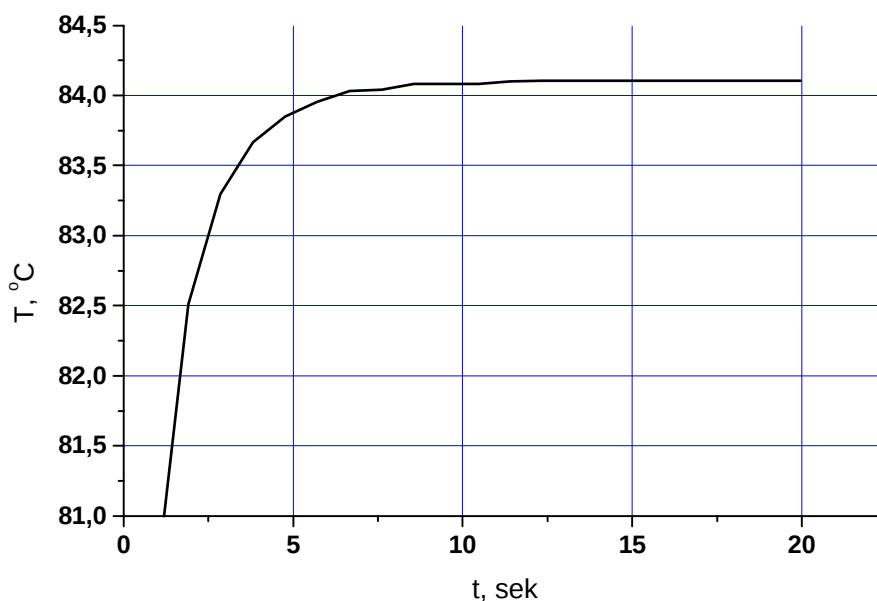


Рис 8.1. Розподіл температури ріжучих граней алмазної коронки при постійному охолодженні водою

Ці результати одержані з обчислювального експерименту на основі запропонованої вище моделі.

Як видно з рисунку, через короткий проміжок часу встановлюється постійна температура яка становить трохи більше 80°C . Це значення можна отримати також на основі аналітичного розв'язку стаціонарної задачі [25], та з формул Горшкова або Кудряшова [29], що базуються на цьому розв'язку. Розбіжність представлених результатів розрахунку і відомих складає менш ніж 4%. Це дозволяє зробити висновок про можливість використання запропонованого алгоритму чисельного розв'язку, для подальших досліджень у термоциклічному режимі навантаження.

При охолодженні водою породоруйнуючого інструменту для дослідження змінного режиму охолодження введемо коефіцієнт «шпаруватості».

$$CK = \frac{t_1}{t_2} \quad (8.26)$$

де t_1 – час охолодження с, t_2 – час відсутності охолодження с.

Для характеристики коливань температури при встановленні стаціонарного режиму введемо параметр абсолютного відхилення $\Delta = T_{max} - T_{min}$

де T_{max} – максимальне значення температури, T_{min} – мінімальне значення температури.

Результати розрахунків для різних коефіцієнтів «шпаруватості» представлені на рисунках 8.3 – 8.11.

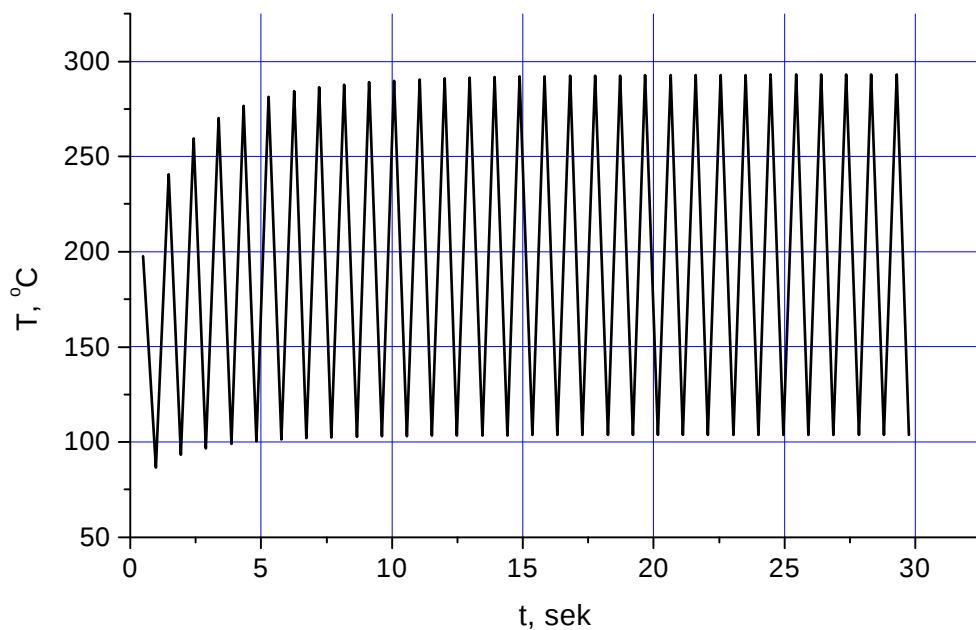


Рис.8.3. Розподіл температури ріжучих граней алмазної коронки при охолодженні водою $t_1=0.5\text{с}$, $t_2=0.5\text{с}$, $CK=1$

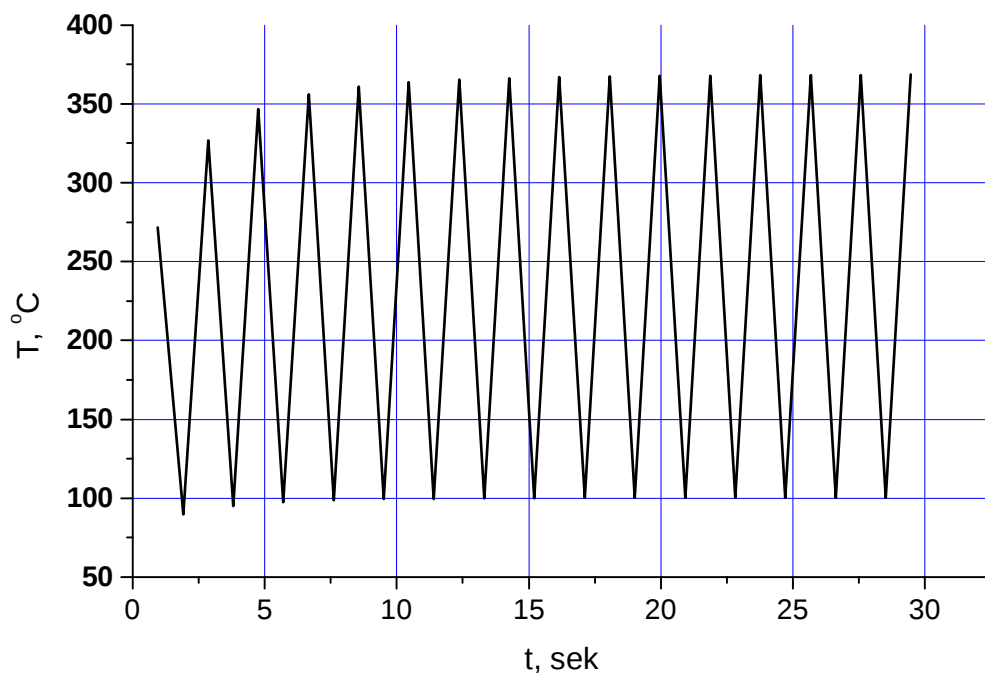


Рис. 8.4. Розподіл температури ріжучих граней алмазної коронки при охолодженні водою $t_1=1\text{с}$, $t_2=1\text{с}$, $CK=1$

Як бачимо, в першому випадку (рис.8.3) абсолютне відхилення $\Delta=90^{\circ}\text{C}$, а в другому (рис.8.4) вже досягає значення $\Delta=268^{\circ}\text{C}$. Результати розрахунку дозволяють оцінити вплив інтервалів часу охолодження на температурний стан інструменту. Це дуже важливо для вибору оптимального термоциклічного режиму, оскільки збільшення параметру Δ дозволяє досягти більш ефективного руйнування гірничої породи, але в той-же час може негативно вплинути власно на сам інструмент.

Крім того, проведення обчислювальних експериментів дозволяє відносно швидко і дешево дослідити вплив інших технологічних факторів (витрати очисного агенту, вид очисного агенту, конструктивні особливості коронки та ін.) на теплові характеристики процесу і вибрати найбільш оптимальні з точки зору енерго і ресурсозбереження.

Треба відмітити, що досить часто інженеру-теплофізику потрібно не тільки розробити математичну модель та провести відповідні розрахунки, але і дати технологу відповідний програмний інструмент, який має зручний інтерфейс і дозволяє проводити обчислювальні експерименти досліднику який не є фахівцем в області програмування та математичних методів. Приклад зовнішнього вигляду програми, за допомогою якої були виконані розрахунки, результати яких наведено вище, показано на рис. 8.5.

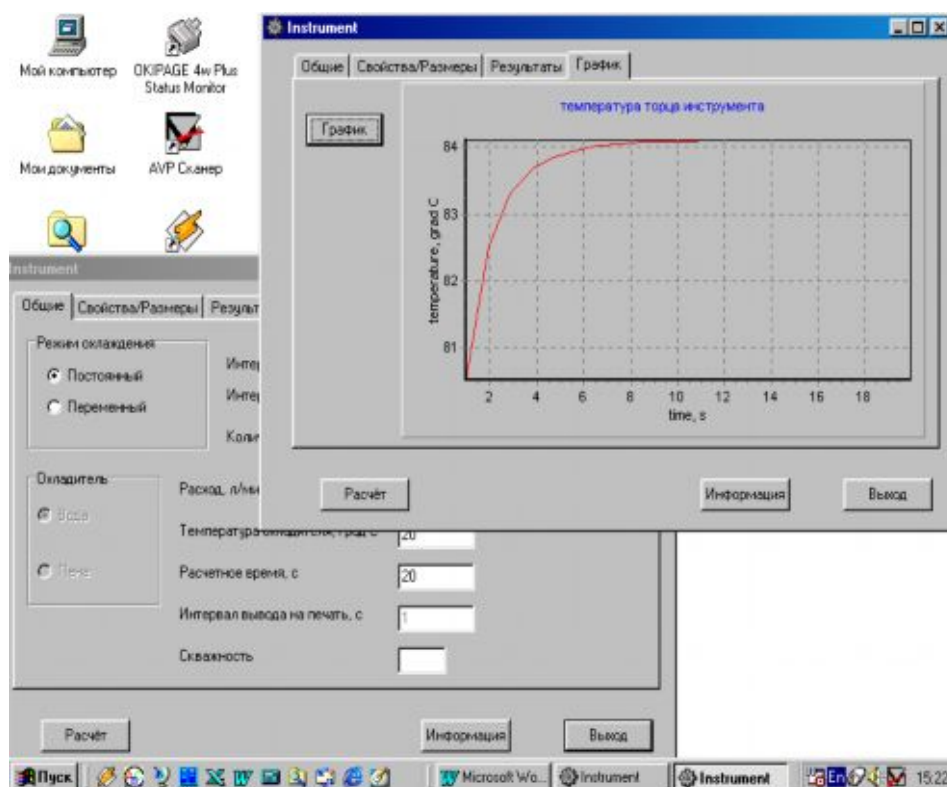


Рис. 8.5.Зовнішній вигляд програми «Інструмент»

Розроблена математична модель і представлені результати чисельних досліджень дозволяють вивчити вплив різних режимів охолодження на тепловий стан породоруйнуючого інструменту. Результати таких досліджень є основою для розробки нових високоефективних технологій колонкового буріння.

Враховуючі той факт, що проведення обчислювального експерименту в даному випадку є більш дешевим шляхом проведення досліджень у порівнянні з фізичним або промисловим експериментом, можна стверджувати про підвищення економічної ефективності проведення проектних та дослідницьких робіт.

Висновки

В представленому посібнику розглянути методи постановки, чисельного розв'язку та реалізації на ПЕОМ математичних моделей, що описують важливі технологічні процеси. Слід зазначити, що використання математичних методів для проектування технологій найбільш виправдано для складних сучасних процесів, що використовують нові високотемпературні впливи на матеріали. Математичні методи дозволяють скоротити терміни і вартість дослідно-технологічних робіт, підвищити якість проектних розв'язків, без великих матеріальних витрат проводити якісну і кількісну оцінку тих або інших фізичних ефектів, встановлення яких іншими методами є досить складним.

Треба відмітити задачі, розв'язок яких дозволить успішно впроваджувати автоматизоване проектування високотемпературних технологічних процесів. Сюди відносяться:

- дослідження і розробка фізичних і математичних моделей технологічних процесів;
- розробка аналітичних і чисельних методів розв'язків нелінійних задач теплофізики технологічних процесів;
- одержання інженерних співвідношень для опису температурних полів у процесах обробки металів;
- дослідження і розробка методів розв'язку зворотних задач теплообміну як засобу проектування технологічних процесів;
- вивчення сполучених задач для отримання більш повної інформації про тепло- і масоперенос у процесах обробки матеріалів, знаходження умов оптимізації технологічних процесів і методів їхньої реалізації;
- знаходження умов контролю, керування і регулювання технологічних процесів.

Розв'язок зазначених задач дозволить ефективніше використовувати обчислювальний експеримент і математичні методи на всіх етапах проектування

високотемпературних технологій, що в свою чергу буде сприяти технічній модернізації промислового комплексу.

В цьому зв'язку важко недооцінити роль методів математичного моделювання для фахівця в області теплотехніки і теплофізики, що займається створенням нових принципів виробництва та оптимізацією існуючих виробничих процесів.

Матеріали, що представлені в посібнику, представляють інтерес для студентів старших курсів відповідних спеціальностей при вивченні загальних і спеціальних курсів таких як моделювання теплофізичних процесів на ЕОМ, термодинаміка, енергозберігаючі технології, методи дослідження тепло масообміну та ін.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Анищенко Л. М., Лавренюк С. Ю.* Математические основы проектирования высокотемпературных технологических процессов. – М.: Наука, 1986. – 80 с.
2. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э.* Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. – М.: Наука, 1987. – 335 с.
3. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 289 с.
4. *Беляев Н. М.* Термодинамика. – К.: Вища шк., 1987. – 344 с.
5. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности: Учеб. пособ. В 2-х частях. – М.: Высш. шк., 1982.
6. *Бродянский В. М.* Эксергетический метод термодинамического анализа. – М.: Энергия, 1973. – 296 с.
7. *Белоцерковский С. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984. – 519 с.
8. *Величко А. Г., Бойченко Б. Н., Сарвинский Л. В., Омесь Н. М., Боровиков Г. Ф.* Развитие теории и практики конвертерного производства стали // *Металлургическая и горнорудная промышленность.* – 1999. – №4. – С.27–30.
9. *Веселовский В. Б.* Методы расчёта и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2002. – 436 с.
10. *Веселовский В. Б., Берлов А. В., Белый Н. И., Лященко В. И.* Температурные поля электрических кабелей при воздействии полей различной физической природы // *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* 2001. Вип. 4, т.1. – С. 73 – 82.
11. *Веселовский В. Б.* Математическое моделирование и расчёт температурных полей трубы при высокочастотной сварке // *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* 2000. Вип. 3, т.1. – С. 102 – 112.
12. *Веселовский В. Б., Демчик А. И., Дедченко Д. А.* Приближённое аналитическое решение задачи Стефана // *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* 2001. Вип. 3, т.3. – С. 83 – 90.
13. *Веселовский В. Б., Клим В. Ю., Белый Н. И.* Моделирование влияния полей различной физической природы на тепловые режимы составных элементов конструкций // *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* 2002. Вип. 6, т.1. – С. 94 – 101.
14. *Веселовский В. Б.* Применение методов расчёта тепловых режимов летательных аппаратов для исследования и интенсификации технологических процессов // *Тепломассообмен* – Минск: ИТМО НАНБ, 1996 – Т. 10, ч. 2. – С. 62 – 66.

15. *Веселовский В. Б., Островская А. В., Лященко В. И. и др.* Контактное термическое сопротивление в элементах конструкций // *Тепломассообмен* – Минск: ИТМО НАНБ, 2000. – Т. 3, С. 73 – 81.
16. *Веселовский В. Б., Сясев А. В.* Решение связанной задачи термоупругости для растущего стержня при наличии фазового перехода // *Труды ин-та прикладной математики и механики НАН Украины*. – Донецк, – 2001. – Т.6. – С. 20-25.
17. *Глуханов Н. П., Богданов В. Н.* Сварка металлов при высокочастотном нагреве. – М.: Матгиз, 1962. – 228 с.
18. *Дреус А. Ю.* Розробка методу дослідження і аналіз процесів гідродинаміки та теплообміну в сталеплавильній ванні при електромагнітному впливі на розплав. // *Рукопис кандидатської дисертації*. – 2003. – 138 с.
19. *Есьман Р. И., Бахмат В. А., Королев В. М.* Теплофизика литейных процессов. – Мн.: Беларуская навука, 1998. – 144 с.
20. *Китаев Б. И., Ярошенко Ю. Г., Суханов Е. Л. и др.* Теплотехника доменного процесса. – М.: Металлургия, 1978. – 248 с.
21. *Кожевников А. А.* Термомеханическое разрушение горных пород с генерированием тепловой энергии. Техника и технология геолого-разведочных работ. Обзор ВНИИ. М., - 1985. – 38 с.
22. *Кожевников А.А. Гошовский С.В., Мартыненко И.И.* Импульсные технологии бурения геологоразведочных скважин. К.: УкрГГРИ, – 2003. – 208 с.
23. *Коротич В.И., Братчиков С.Г.* Металлургия чёрных металлов: учебник. М.: Металлургия, 1987, 240 с.
24. *Коновалов Н. А., Веселовский В.Б., Фурманов В. Б. и др.* Исследование высокочастотной сварки с использованием аппаратурно-программного комплекса кинотелерегистрации // *Техническая механика*. – 1997. – Вып. 6 – С.153 – 157.
25. *Кудряшов Б.Б., Яковлев А.А.* Анализ и расчет температурного поля в теле алмазной коронки. // *Записки ЛГИ им. Г.В.Плеханова*. – Т.105. – 1985. – С.10– 16.
26. *Любов Б. Я.* Теория кристаллизации в больших объемах. М.: Наука, 1975. – 256 с.
27. *Мазур В. Л.* Производство листа с высококачественной поверхностью. – К.: Техніка, 1982. – 166 с.
28. *Мелешко В. И., Качайлов А. П., Мазур В. Л.* Прогрессивные методы прокатки и отделки листовой стали. – М.: Металлургия, 1980. – 191 с.
29. *Михайлова Н. Д.* Техническое проектирование колонкового бурения. – М.: Недра, 1985. – 204 с.
30. *Никитенко Н. И.* Теория тепломассопереноса. – К.: Наук. думка, 1983. – 352 с.

31. *Огурцов А.П., Самохвалов С.С.* Математичне моделювання теплофізичних процесів у багатофазних середовищах. К.: Наук. думка. 2001. 410 с.
32. *Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б.* Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. – 392 с.
33. *Победра Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости. – Упругость и неупругость. – 1973. – Вып. 3. – С. 95–173.
34. Прикладные задачи металлургической теплофизики / *В. И. Тимошпольский, Н. М. Беляев, А. А. Рядно и др.* Мн.: Навука і тэхніка, 1991. – 320 с.
35. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966.–752 с.
36. *Рыкалин Н. Н., Зуев И. В., Углов А. А.* Основы электронно-лучевой обработки материалов. – М.: Машиностроение, 1978. – 239 с.
37. *Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Анищенко Л. М.* Высокотемпературные технологические процессы: Теплофизические основы. – М.: Наука, 1985.–172 с.
38. *Румянцев В.Д., Ольшанский В.М.* Теплотехника: учебное пособие // Под ред. проф. Губинского В.Й. – Д.: Пороги, 2002. – 325 с.
39. *Самарский А.А., Вабищев П.Н.* Вычислительная теплопередача. – М.: Эдиториси УРСС, 2003, 784 с.
40. *Седов А.И.* Методы подобия и размерностей в технике. М.:Гостехиздат, 1954.
41. *Сульжик Н. И., Степанов А. В.* Ресурсосбережение в нефтехимических производствах. – К.: Нора-принт, 2000. – 340 с.
42. *Сясев А. В.* Приближенный аналитический метод расчета растущих тел с учетом фазового перехода. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. 2001. Вип. 5, т.1. – С. 125 – 137.
43. *Сясев А. В.* Расчет термомеханического состояния двухфазного стержня с учетом зависимости теплофизических характеристик от температуры. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. 2002. Вип. 6, т.1. – С. 141 – 147.
44. *Сясев А. В.* Моделирование процесса наращивания полого кругового цилиндра из вязкоупругого материала в случае нелинейного закона ползучести. // Херсон, ХГТУ: Вестник ХГТУ. 2003. – № 3 (19). – С. 406 – 410.
45. *Сясев А. В., Кочубей А. А., Бинкевич Е. В.* Напряженно-деформированное состояние растущего составного вязкоупругого тела вращения // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. 2000. Вип. 3, т.1. – С. 162 – 170.
46. *Шмрга Л.* Затвердевание и кристаллизация стальных слитков. – М.: Металлургия, 1985. – 248 с.

47. Электровихревые течения // Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В. /Под ред. Щербинина Э.В. – Рига: Зинатне, 1985. – 315 с.
48. Юдин С. Б., Левин М. М., Розенфельд С. Е. Центробежное литье. – М.: Машиностроение, 1972.–280 с.
49. Vesselovskiy V. B., Kochubey A. A., Syasev A. V., Mamuzych I., Klim V. Y., Syasev V. A. Approximate methods of the solution of non-linear problems thermomechanics with driving border. // Acta Metallurgica Slovaca. – Vol. 8. – 2002. – br. 3. – P. 321 – 335.
50. Kochubey A. A., Syasev A. V., Vesselovskiy V. B., Mamuzych I., Makarenkov E. A., Scherbina E. A. Mathematical modelling of metallurgical processes with usage of the theory of increasing bodies. // Acta Metallurgica Slovaca. – Vol. 8. – 2002. – br. 3. – P. 308 – 320.
51. Konovalov N. A., Veselovsky V. B., Furmanov V. B. and all. Utilization of the equipment and program cine- and telerecording complex for the high-frequency steel pipe welding investigation // International Symposium on Optical Science, Engineering and Instrumentation (SPJE's 40th Anniversary), San Diego, California, USA. – 1995. – SPJE code number: 2564 – 76
52. Konovalov N. A., Veselovsky V. B., Furmanov V. B. and all. Cine and television recording and image processing systems for studies of fastprogressing processes // Aerosense'96, SPJE's International Symposium on Aerospace/Defense Sensing and Controls, 8 – 12 April 1996, Orlando, Florida, USA, – 1996.
53. Syasev A. V., Vesselovskiy V. B., Mamuzych I., Kochubey A. A., Syasev V. A., Klim V. Y. The nonlinear shaping of the thermomechanical status of two-phases bodies. // Materiali in Tehnologije. – Vol. 37. – №3–4. – Slovehija. – 2003. – P. 137–143.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
Розділ 1. Основи проектування та оцінка ефективності теплотехнологічних процесів.....	6
1.1. Сучасний стан проблеми ресурсу та енергозбереження.....	6
1.2. Термодинамічні критерії ефективності та основні шляхи зниження енергосировинних витрат.....	12
1.3. Методологічні основи проектування високотемпературних технологічних процесів.....	30
Розділ 2. Моделювання процесів виготовлення деталей та елементів конструкцій з в'язкопружного матеріалу методами нарощування.....	42
2.1. Основи технології процесів нарощування.....	44
2.2. Математична модель зростаючого лінійного в'язкопружного тіла при малих деформаціях у випадку одноосового напруженого стану.....	50
2.3. Метод розрахунку напружено-деформованого стану в'язкопружних зростаючих тіл у процесі нарощування.....	57
2.4. Математична модель процесу нарощування в'язкопружного порожнього циліндра при дії внутрішнього тиску.....	62
2.5. Вплив неоднорідності матеріалу деталі на напружено-деформований стан при нарощуванні.....	70
2.6. Аналіз одержаних результатів і висновки.....	76
Розділ 3. Математичне моделювання і розрахунок теплового стану рулонів листової холодно та гарячекатаної сталі.....	78
3.1. Основи технології виготовлення рулонів листової холодно і гарячекатаної сталі.....	78
3.2. Розробка математичної моделі розрахунку міжвиткових тисків у рулонах холоднокатаної сталі.....	81
3.3. Математична постановка задачі визначення напружено-деформованого стану рулонів при їхньому намотуванні і знятті з барабана моталки з урахуванням температурних ефектів.....	90
3.4. Параметричні розрахунки міжвиткових тисків і температур у рулонах холодно і гарячекатаної сталі.....	110
Розділ 4. Математичне моделювання і розрахунок температурних полів труби при високочастотному зварюванні.....	115
4.1. Основи технології процесу високочастотного зварювання.....	115
4.2. Фізичні особливості високочастотного зварювання.....	121
4.3. Математична постановка та розв'язок задач розрахунку температурних полів при високочастотному зварюванні.....	127
4.4. Аналіз теплообміну при високочастотному зварюванні і чисельні параметричні дослідження.....	135

Розділ 5. Математичне моделювання і розрахунок прогріву та відновлення залізрудних матеріалів у доменній печі.....	143
5.1. Основи технології доменного виробництва.....	143
5.2. Математичне моделювання і розрахунок прогріву і відновлення залізрудних матеріалів.....	147
5.3. Іntenсифікація процесів доменної плавки.....	160
Розділ 6. Математичне моделювання процесів конвективного теплообміну в розплавах.....	164
6.1. Поняття про сучасні технології виробництва сталі.....	164
6.2. Загальні підходи до побудови математичних моделей і алгоритмів розрахунку процесів переносу в розплавах.....	169
6.3. Приклади чисельних розрахунків процесів гідродинаміки та теплообміну в розплавах.....	179
Розділ 7. Математичне моделювання процесу відцентрового лиття деталей обертання.....	189
7.1. Основи технології відцентрового лиття.....	190
7.2. Наближений аналітичний метод розрахунку термомеханічного стану тіл, що знаходяться в умовах фазового переходу.....	196
7.3. Формування термомеханічного стану циліндричного виливка у процесі кристалізації.....	213
Розділ 8. Використання методів математичного моделювання при розробці нових технологій пошуку корисних копалин.....	226
8.1. Постановка проблеми.....	226
8.2. Математична модель.....	228
8.3. Метод розрахунку.....	232
8.4. Дослідження розподілу температурних полів у породоруйнуючому інструменті для різних режимах охолодження.....	235
ВИСНОВКИ.....	240
ЛІТЕРАТУРА.....	242

Навчальне видання

Веселовський Володимир Борисович

Дреус Андрій Юлійович

Сясєв Андрій Валерійович

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ
ТЕПЛОТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ**

Навчальний посібник

Редактор В. П. Пименов

Художньо-технічний редактор В. А. Усенко

Коректор В. П. Пименов

Свідоцтво держ. реєстрації №289-ДК

Підписано до друку 30.03.04. Формат $60 \times 84^{1/16}$. Папір друкарський. Друк плоский.
Ум. друк. арк. 14,41. Ум. фарбовідб. 14,41. Обл.- вид. арк.. 16,62. Тираж 300 пр.
Вид. № 1084. Замовне. Зам. № 1251

Видавництво Дніпропетровського університету
пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49050

Друкарня ДНУ, вул. Козакова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050