Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет

В.О. Кофанов

ОСНОВИ АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Ухвалено вченою радою університету
як навчальній посібник

Дніпропетровськ
РВВ ДНУ
2005

ББК 22.172.5я73 Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. В.Ф. Бабенко
. УДК 519.22(076) канд. фіз.-мат. наук, доц. Б.Г. Пелешенко
. К 74

К 74 Кофанов В.О. Основи актуарної математики: Навч. посіб.– Д.: РВВ ДНУ, 2005. – 96 с.

Уміщений теоретичний матеріал з університетського курсу основ актуарної математики. Текст супроводжується достатньою кількістю прикладів. Наведені завдання для контрольних робіт.

Для студентів механіко-математичного факультету університету.

Темплан 2005, поз.

Навчальне видання

Володимир Олександрович Кофанов

Основи актуарної математики

Навчальний посібник

Редактор Л.В. Хом'як
Техредактор Л.П. Замятіна
Коректор Г.О. Стара

Підписано до друку 25.01.2005. Формат 60 × 84/16. Папір друкарський. Друк плоский. Ум. друк. арк. Ум.фарбо-відб. Обл.-вид.арк. Тираж 150 пр. Зам. N

РВВ ДНУ, вул. Наукова, 13, м.Дніпропетровськ, 49050.
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м.Дніпропетровськ, 49050

Розділ 1

Основні ймовірнісні характеристики тривалості життя

1.1 Функція виживання

Основним джерелом випадковості при страхуванні життя є невизначеність моменту смерті. Відносно моменту смерті окремої особи не можна сказати нічого певного. Але, якщо ми маємо справу з великою однорідною групою людей і не цікавимося долею окремої особи, то ми знаходимося в рамках теорії ймовірностей, яка вивчає масові випадкові явища, що характеризуються властивістю стійкості частот. У цьому випадку ми можемо розглядати тривалість життя як випадкову величину X і вивчати її методами теорії ймовірностей.

Основною характеристикою будь-якої випадкової величини ξ в теорії ймовірностей є функція розподілу, яка означається рівністю

$$F(x) = F_\xi(x) := P(\xi \le x).$$

В актуарній математиці частіше застосовується додаткова функція розподілу $1 - F(x)$. Стосовно тривалості життя X значення $1 - F(x)$ – це ймовірність того, що людина доживе до віку x років. Тому ця функція називається функцією виживання. Вона позначається символом $s(x)$.

Таким чином,

$$s(x) := P(X > x).$$

Уявлення про поведінку функції виживання $s(x)$ дає таблиця 1, побудована на основі статистичних даних про тривалість життя певної групи населення США:

Таблиця тривалості життя Таблиця 1

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
s(x)	1.00	0.983	0.978	0.965	0.949	0.915	0.837	0.682	0.432	0.142	0.012	0

Із властивостей функцій розподілу випадкових величин, відомих з теорії ймовірностей, і з огляду на те, що тривалість життя набуває тільки невід'ємних значень, витікають такі властивості функції виживання:

1) $0 \le s(x) \le 1$;
2) функція $s(x)$ не зростає;
3) $s(0) = 1, \quad s(\infty) = 0$;
4) функція $s(x)$ неперервна справа в кожній точці.

Водночас природно допустити, що функція розподілу має ще й такі властивості:
5) функція $s(x)$ неперервна в кожній точці;
6) функція $s(x)$ є строго спадною.
Дійсно, якщо б у деякій точці x_0 функція $s(x)$ була розривною, то

$$P(X = x_0) = P(X \geq x_0) - P(X > x_0) = s(x_0 + 0) - s(x_0) > 0.$$

Це означало б, що в момент часу x_0 людина помирає з додатною ймовірністю. Така ситуація не є природною. Якщо ж ми припустимо, що функція $s(x)$ набуває постійного значення для всіх x з деякого проміжку $[\alpha, \beta]$, то дійдемо до висновку, що

$$P(X \in [\alpha, \beta]) = P(X > \beta) - P(X > \alpha) = 0,$$

тобто в проміжку $[\alpha, \beta]$ смерть людини неможлива. Така ситуація теж не є природною.

Таким чином, надалі будемо вважати, що разом з основними властивостями 1) – 4) функція виживання має також властивості 5) і 6).

1.2 Статистичний зміст функції виживання

Оберемо групу $G(l_0)$ з l_0 новонароджених. Через X_i, $i \in \{1, ..., l_0\}$, позначимо моменти їх смерті. Їншими словами, X_i – тривалість життя i-ї новонародженої людини. Нехай далі $L(x)$ – кількість живих представників цієї групи у віці x років. Зрозуміло, що

$$L(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I(X_i > x),$$

де $I(A)$ – індикатор множини A, тобто $I(A) = I(A)(x) = 1$, коли $x \in A$ і $I(A)(x) = 0$, коли $x \notin A$.

Розглянемо

$$l_x := ML(x)$$

– середня кількість живих представників групи $G(l_0)$ у віці x років. З огляду на властивості математичного сподівання маємо

$$l_x = ML(x) = \sum_{i=1}^{l_0} MI(X_i > x) = \sum_{i=1}^{l_0} P(X_i > x) = l_0 s(x).$$

Таким чином,

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0}, \tag{1.2.1}$$

тобто значення функції виживання $s(x)$ дорівнює середній частці живих представників даної групи $G(l_0)$ з l_0 новонароджених у віці x років.

Рівність (1.2.1) виражає статистичний зміст функції виживання. З огляду на цю рівність в актуарній математиці часто застосовують функцію l_x замість функції виживання $s(x)$. Наприклад, у термінах величини l_x таблицю 1 можна трактувати таким чином: з 1000 новонароджених до 10 років доживуть 983 особи, до 20 років – 977 осіб, до 30 років – 965 осіб, до 40 років – 949 осіб,..., до 100 років – 12 осіб, до 110 років не доживе ніхто.

1.3 Крива смертей

Беручи до уваги статистичний зміст функції виживання, наведемо ще одну інтерпретацію таблиці 1. З 1000 новонароджених у віці до 10 років помре 17 осіб (у середньому), у віці від 10 до 20 років – 6 осіб, у віці від 20 до 30 років – 12 осіб, у віці від 30 до 40 років – 16 осіб,..., у віці від 90 до 100 років – 130 осіб, у віці від 100 до 110 років – 12 осіб.

Ці відомості про середню кількість осіб, які померли в інтервалі часу $(x, x+10)$ не менш наглядно характеризують смертність населення даної групи новонароджених, ніж відомості про загальну кількість $L(x)$ осіб, які дожили до x років. Тому є сенс розглядати таку випадкову величину.

Означення 1.3.1 Символом ${}_tD_x$ позначимо кількість осіб даної групи $G(l_0)$ з l_0 новонароджених, які померли в проміжку часу $(x, x+t]$.

Зрозуміло, що

$$ {}_tD_x = L(x) - L(x+t) = \sum_{i=1}^{l_0} I(x < X_i \le x+t). \tag{1.3.1}$$

Нехай далі

$$ {}_td_x := M_tD_x \tag{1.3.2}$$

– середня кількість представників групи $G(l_0)$, що померли у віці від x до $x+t$ років. З формул (1.3.1) і (1.2.1) випливає, що

$$ {}_td_x = ML(x) - ML(x+t) = l_x - l_{x+t} =$$
$$= l_0(s(x) - s(x+t)) = l_0 P(x < X_i \le x+t). \tag{1.3.3}$$

Випадок $t=1$ в актуарній математиці найбільш важливий. Це пов'язано з тим, що страхові договори, як правило, укладаються на цілу кількість років. Тому в позначенні ${}_1d_x$ індекс 1 опускають. Таким чином,

$$d_x := {}_1d_x = l_x - l_{x+1} = l_0(s(x) - s(x+1)).$$

У подальшому ми будемо вважати випадкову величину X (тривалість життя) абсолютно неперервною. Якщо ми позначимо через $p(x)$ її щільність, то можемо написати співвідношення

$$s(x) - s(x+t) = F(x+t) - F(x) = \int\limits_x^{x+t} p(u)du. \tag{1.3.4}$$

Для малих t з формул (1.3.3) і (1.3.4) отримуємо наближену рівність ${}_t d_x \approx l_0 \cdot p(x) \cdot t$ або

$$p(x) \cdot t \approx \frac{{}_t d_x}{l_0}.$$

Таким чином, при малих t величина $p(x) \cdot t$ наближено дорівнює середній частці представників даної групи $G(l_0)$ з l_0 новонароджених, які померли в проміжку часу $(x, x+t)$. Тому величина $p(x)$ є дуже корисною в актуарній математиці.

Означення 1.3.2 Графік щільності $p(x)$ тривалості життя X називають кривою смертей.

З властивостей щільностей випадкових величин, відомих із теорії ймовірностей, і з огляду на те, що тривалість життя набуває тільки невід'ємних значень, випливає, що функція $p(x)$ має такі властивості:

1) $\int\limits_0^\infty p(x)dx = 1$;

2) $\int\limits_0^x p(x)dx = F(x), \qquad \int\limits_x^\infty p(x)dx = s(x)$.

Останні дві рівності означають, що функція розподілу тривалості життя і функція виживання відновлюються за допомогою щільності $p(x)$. Таким чином, крива смертей може розглядатися як первинна характеристика тривалості життя.

1.4 Інтенсивність смертності

Розглянемо таблицю 1 ще з одного кута зору. Для цього зауважимо, що з 1000 новонароджених за кожне десятиріччя від 60 до 70 років і від 90 до 100 років у середньому померла приблизно одна і та сама кількість осіб (155 і 130 відповідно). Але до 60 років з даної групи з 1000 новонароджених дожило 837 осіб, у той час як до 90 років – лише 142 особи.

Таким чином, абсолютні цифри не повністю характеризують смертність за певний проміжок часу. Необхідно вказувати також, яку частку складає кількість померлих за цей проміжок часу від кількості живих на початок цього проміжку. З погляду теорії ймовірностей це зауваження означає, що вивчати треба не просто ймовірність смерті в даному віковому проміжку $(x, x+t)$, а умовну ймовірність $P(x < X \leq x+t | X > x)$. За означенням умовної ймовірністі маємо

$$P(x < X \leq x+t | X > x) = \frac{P(x < X \leq x+t)}{P(X > x)} =$$

$$= \frac{F(x+t) - F(x)}{s(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{\int_x^{x+t} p(u)du}{s(x)}. \qquad (1.4.1)$$

Для малих t звідси отримуємо таку наближену рівність

$$P(x < X \leq x + t | X > x) \approx \frac{p(x)}{s(x)} \cdot t. \tag{1.4.2}$$

Означення 1.4.1 Величина

$$\mu_x := \frac{p(x)}{s(x)}$$

називається інтенсивністю смертності.

З формули (1.4.2) випливає, що при малих t величина $\mu_x \cdot t$ наближено дорівнює ймовірності смерті в інтервалі $(x, x + t)$ особи, що дожила до x років.

Очевидно, що $\mu_x \geq 0$ для всіх $x > 0$. Зазначимо далі, що означення μ_x можна переписати у вигляді

$$\mu_x = \frac{F'(x)}{1 - F(x)} \qquad \mu_x = \frac{-s'(x)}{s(x)}.$$

Ці співвідношення – диференційні рівняння відносно $F(x)$ і $s(x)$ відповідно. Розв'язуючи, наприклад, друге рівняння, будемо мати $(\ln s(x))' = -\mu_x$. Враховуючи, що $s(0) = 1$, отримаємо

$$s(x) = \exp\left\{-\int_0^x \mu_t dt\right\} \quad \text{і} \quad F(x) = 1 - \exp\left\{-\int_0^x \mu_t dt\right\}. \tag{1.4.3}$$

Зокрема, перша формула означає, що функція виживання відновлюється за допомогою інтенсивності смертності. Тому інтенсивність смертності можна розглядати як основну характеристику тривалості життя.

Відзначимо, що з другої рівності (1.4.3) і відомої властивості функції розподілу $F(+\infty) = 1$ випливає така властивість інтенсивності смертності:

$$\int_0^\infty \mu_x dx = \infty.$$

1.5 Аналітичні моделі тривалості життя

Для спрощення розрахунків, а також для теоретичного аналізу в актуарній математиці прийнято графік функції виживання, побудований на основі статистичних даних, наближено задавати за допомогою простих аналітичних формул. В історії актуарної математики відомо кілька способів такої апроксимації. Вони відомі як аналітичні моделі тривалості життя.

Модель де Муавра (1729 р.). У моделі де Муавра тривалість життя вважається випадковою величиною, рівномірно розподіленою на відрізку $[0,\omega]$, де ω – граничний вік. Таким чином, у моделі де Муавра

$$p(x) = \begin{cases} 1/\omega, & x \in [0,\omega] \\ 0, & x > \omega \end{cases}, \qquad F(x) = \begin{cases} x/\omega, & x \in [0,\omega] \\ 1, & x > \omega \end{cases},$$

$$s(x) = \begin{cases} 1 - x/\omega, & x \in [0,\omega] \\ 0, & x > \omega \end{cases}, \qquad \mu_x = \frac{p(x)}{s(x)} = \begin{cases} 1/(\omega - x), & x \in [0,\omega] \\ 0, & x > \omega \end{cases}$$

(ми вважаємо за означенням, що $0/0 := 0$).

Якщо порівняти графіки функцій $p(x), F(x), s(x), \mu_x$ з графіками відповідних функцій, побудованих на основі статистичних даних (див., наприклад, таблицю 1), то ми дійдемо до висновку, що модель де Муавра не кращим чином апроксимує ці емпіричні дані. Зокрема, емпірична крива смертей має строгий локальний максимум у віці приблизно 80 років, а в моделі де Муавра графік $p(x)$ на $[0,\omega]$ – відрізок.

Модель Гомпертца (1825 р.). У цій моделі інтенсивність смертності апроксимується функціями вигляду $Be^{\alpha x}$, де $\alpha > B > 0$ – деякі параметри, тобто вважається, що в моделі Гомпертца $\mu_x = Be^{\alpha x}$. Звідси внаслідок формули (1.4.3) отримуємо

$$s(x) = \exp\left\{ -\int_0^x Be^{\alpha t} dt \right\} = \exp\left\{ -\frac{B\left(e^{\alpha x} - 1\right)}{\alpha} \right\}.$$

Далі, враховуючи означення 1.4.1, маємо

$$p(x) = \mu_x \cdot s(x) = B \exp\left\{ \alpha x - \frac{B\left(e^{\alpha x} - 1\right)}{\alpha} \right\}.$$

Неважко перевірити, що в моделі Гомпертца на відміну від моделі де Муавра, крива смертей має максимум у точці $x = (\ln\alpha - \ln B)/\alpha$.

Модель Мейкхама (1860 р.) уточнює попередню модель, а саме в цій моделі інтенсивність смертності апроксимується функціями вигляду $A+Be^{\alpha x}$, де A, α, B – деякі додатні числа. Постійний доданок A дозволяє враховувати ризики для життя, пов'язані з нещасними випадками. Ці ризики практично не залежать від віку. З рівності $\mu_x = A + Be^{\alpha x}$ внаслідок формули (1.4.3) і з огляду на означення 1.4.1 отримуємо

$$s(x) = \exp\left\{ -\int_0^x \left(A + Be^{\alpha t}\right) dt \right\} = \exp\left\{ -Ax - \frac{B\left(e^{\alpha x} - 1\right)}{\alpha} \right\}$$

і

$$p(x) = \left(A + Be^{\alpha x}\right) \exp\left\{ -Ax - \frac{B\left(e^{\alpha x} - 1\right)}{\alpha} \right\}.$$

Зазначимо, що в моделі Мейкхама крива смертей також має максимум у деякій точці.

Модель Вейбулла (1939 р.). У цій моделі інтенсивність смертності апроксимується функціями більш простого вигляду, ніж у двох попередніх моделях, а саме: функціями вигляду kx^n. Застосовуючи знову формулу (1.4.3) і означення 1.4.1, отримуємо

$$s(x) = \exp\left\{-\int\limits_0^x kt^n dt\right\} = \exp\left\{-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right\}$$

і

$$p(x) = \mu_x \cdot s(x) = kx^n \exp\left\{-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right\}.$$

Зазначимо, що в моделі Вейбулла, як і у двох попередніх моделях, крива смертей має максимум. Він досягається в точці $x = (n/k)^{1/(n+1)}$.

Модель Ерланга. У цій моделі крива смертей задається формулою

$$p(x) = \frac{x}{a^2}e^{-x/a}, \quad x \geq 0, \tag{1.5.1}$$

де $a > 0$ – фіксований параметр (перевірка того, що формулою (1.5.1) дійсно задається крива смертей, наведена в прикладі 1 §1.7). Тоді для функції виживання маємо

$$s(x) = P\{X > x\} = \int\limits_x^\infty p(t)dt = \int\limits_x^\infty \frac{t}{a^2}e^{-t/a}dt = -\frac{1}{a}\int\limits_x^\infty t de^{-t/a} =$$

$$= -\left[\frac{t}{a}e^{-t/a}\right]_x^\infty + \frac{1}{a}\int\limits_x^\infty e^{-t/a}dt = \frac{x}{a}e^{-x/a} - \left[e^{-x/a}\right]_x^\infty = \frac{x+a}{a}e^{-x/a}. \tag{1.5.2}$$

З означення (1.5.1) отримуємо

$$p'(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\frac{e^{-x/a}}{a^2}, \quad x \geq 0.$$

Тому крива смертей $y = p(x)$ спочатку зростає від 0 до $(ae)^{-1}$ на проміжку $[0, a]$, а потім спадає до 0 на проміжку $[a, \infty)$.

Таким чином, у цьому сенсі модель Ерланга краще апроксимує емпіричні дані, ніж модель де Муавра. Але в той час, як у дійсності максимум кривої смертей досягається біля віку, близького до середнього часу життя, в моделі Ерланга точка максимума вдвоє менша ніж середній час життя (див. приклад 1).

Зазначимо, що випадкову величину X зі щільністю (1.5.1) можна подати у вигляді суми двох випадкових величин X_1 і X_2, кожна з яких має показниковий розподіл із середнім значенням a.

Розподіл Ерланга можна розглядати як спеціальний випадок гамма-розподілу. За допомогою гамма-розподілу може бути досягнута більша відповідність емпіричним даним.

1.6 Середня тривалість життя та її дисперсія

З практичного і теоретичного погляду важливими є такі глобальні характеристики тривалості життя X, як її середнє значення $e_0^o := MX$ (тобто математичне сподівання) і дисперсія DX. Відповідно до загальних формул, відомих з теорії ймовірностей,

$$MX = \int_0^\infty xp(x)dx, \quad MX^2 = \int_0^\infty x^2 p(x)dx,$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 .$$

За допомогою інтегрування частинами звідси неважко отримати формули для цих характеристик у термінах функції виживання $s(x)$.

$$e_0^o := MX = \int_0^\infty xp(x)dx = -\int_0^\infty xds(x) =$$

$$= -\left[xs(x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty s(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx \tag{1.6.1}$$

(природно вважати, що існує такий граничний вік ω, що $s(x) = 0$ для $x > \omega$). Тому $[xs(x)]_0^\infty = 0$. Аналогічно

$$MX^2 = \int_0^\infty x^2 p(x)dx = -\int_0^\infty x^2 ds(x) =$$

$$= -\left[x^2 s(x)\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty xs(x)dx = 2\int_0^\infty xs(x)dx. \tag{1.6.2}$$

1.7 Приклади розрахунків

Приклад 1. Показати, що формулою (1.5.1) дійсно задається крива смертей. Знайти інтенсивність смертності μ_x у моделі Ерланга, а також середню тривалість життя в цій моделі.

Розв'язання. 1. Нехай $p(x) = \frac{x}{a^2}e^{-x/a}$. Зрозуміло, що $p(x) \geq 0$. Крім того, за допомогою інтегрування частинами отримуємо

$$\int_0^\infty p(x)dx = \int_0^\infty \frac{x}{a^2}e^{-x/a}dx = -\int_0^\infty \frac{x}{a}de^{-x/a} = -\frac{x}{a}e^{-x/a}|_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x/a}dx = 1.$$

Таким чином, виконуються обидві характеристичні властивості щільності.

2. Для того щоб знайти інтенсивність смертності μ_x застосуємо означення 1.4.1 і формули (1.5.1) і (1.5.2):

$$\mu_x = \frac{p(x)}{s(x)} = \frac{\frac{x}{a^2}e^{-x/a}}{\frac{x+a}{a}e^{-x/a}} = \frac{x}{a(x+a)}.$$

3. Середню тривалість життя в даній моделі підрахуємо за формулою (1.6.1). Ураховуючи при цьому співвідношення (1.5.2), отримуємо

$$e_0^o = \int_0^\infty s(x)dx = \int_0^\infty \frac{x+a}{a}e^{-x/a}dx =$$

$$= -\int_0^\infty (x+a)de^{-x/a}x = (x+a)de^{-x/a}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x/a}dx = a + a = 2a.$$

Приклад 2. Використовуючи таблицю 1 знайти середнє і дисперсію кількості представників групи з $l_0 = 1000$ новонароджених, які помруть у віці від 50 до 70 років.

Розв'язання. Шукана величина позначається символом ${}_{20}D_{50}$ (див. §1.3). Її середнє значення ${}_{20}d_{50}$ може бути обраховане за допомогою формул (1.3.3), (1.2.1) і таблиці 1:

$${}_{20}d_{50} = l_{50} - l_{70} = l_0(s(50) - s(70)) = 1000(0.915 - 0.682) = 233\ ().$$

Для обчислення дисперсії $D({}_{20}D_{50})$ застосуємо формулу (1.3.1). Оскільки випадкові величини X_i (де X_i – тривалість життя i-ї особи даної групи) незалежні, то

$$D({}_{20}D_{50}) = l_0 DI(50 < X_i \leq 70),$$

де $I(A)$ – індикатор множини A. Але $Dz = Mz^2 - (Mz)^2$. Тому

$$DI(50 < X_i \leq 70) = P\{50 < X_i \leq 70\} - P\{50 < X_i \leq 70\}^2.$$

Зазначимо, що $P\{50 < X_i \leq 70\} = s(50) - s(70) = 0.233$. Таким чином, $D({}_{20}D_{50}) = 1000(0.233 - (0.233)^2) = 178.711$.

Розділ 2

Залишковий час життя

2.1 Функція розподілу і щільність залишкового часу життя

Страхові компанії мають справу з конкретними людьми цілком певного віку. Зрозуміло, що статистичні властивості тривалості життя людей, які дожили до певного віку, суттєво відрізняються від статистичних властивостей тривалості життя новонароджених, і взагалі ці властивості суттєво залежать від віку людини. Так, імовірність $P(x < X \leq x + 10|X > x)$ смерті протягом найближчих 10 років людини, яка дожила до x років, суттєво залежить від x. Дійсно, використовуючи таблицю 1, за означенням умовної ймовірності знаходимо, що для віку $x = 60$ років ця ймовірність дорівнює

$$P(60 < X \leq 70|X > 60) = \frac{P(60 < X \leq 70)}{P(X > 60)} = \frac{0.837 - 0.682}{0.837} \approx 0.2,$$

у той час, як для віку $x = 90$ років ця ймовірність дорівнює

$$P(90 < X \leq 100|X > 90) = \frac{0.142 - 0.012}{0.142} \approx 0.9.$$

Тому *в актуарній математиці діє така угода*: всі події, пов'язані з людиною, що досягла віку x років, розглядаються при умові $X > x$. Зокрема, ймовірність смерті такої людини в найближчі 10 років – це умовна ймовірність $P(x < X \leq x + 10|X > x)$, середня тривалість життя такої людини – це умовне математичне сподівання $M(X|X > x)$ і под.

Для людини, що досягла віку x років, в актуарній математиці прийнято застосовувати замість випадкової величини X (тривалості життя) іншу характеристику – залишковий час життя.

Означення 2.1.1 Залишковим часом життя людини у віці x років називається випадкова величина $T(x) := X - x$.

Функція розподілу залишкового часу життя $P\{T(x) \leq t\}$ відповідно до прийнятої вище угоди – це умовна функція розподілу:

$$P\{T(x) \leq t\} := P\{X - x \leq t|X > x\} = \frac{P(x < X \leq x + t)}{P(X > x)} =$$

$$= \frac{F(x+t)-F(x)}{s(x)} = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \qquad (2.1.1)$$

(остання рівність виконується внаслідок формули (1.2.1)).

Щільність залишкового часу життя людини у віці x років прийнято позначати символом $p_x(t)$. З (2.1.1) одержуємо

$$p_x(t) = \frac{d}{dt}P\{T(x) \le t\} = \frac{p(x+t)}{s(x)}, \quad t > 0. \qquad (2.1.2)$$

З геометричного погляду остання рівність означає, що графік щільності залишкового часу життя $p_x(t)$ можна отримати з кривої смертей $p(t)$ зсувом останньої вліво на x і стисканням уздовж осі Oy в $s(x)$ разів.

2.2 Деякі інші характеристики залишкового часу життя

Функцію розподілу величини $T(x)$ залишкового часу життя в актуарній математиці прийнято позначати символом ${}_tq_x$ (слід пам'ятати, що насправді це умовна функція розподілу з огляду на прийняту в попередньому параграфі угоду). Таким чином, за означенням

$${}_tq_x := P\{T(x) \le t\}. \qquad (2.2.1)$$

Величина ${}_tq_x$ виражає ймовірність смерті людини у віці x років протягом найближчих t років. Згідно з формулою (2.1.1)

$${}_tq_x = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}. \qquad (2.2.2)$$

Додаткову ймовірність в актуарній математиці позначають символом ${}_tp_x$, тобто ${}_tp_x := 1 - {}_tq_x$. Вона дорівнює ймовірності того, що людина у віці x років проживе ще щонайменше t років. З урахуванням (2.2.1) і (2.2.2) отримуємо

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = P\{T(x) > t\}. \qquad (2.2.3)$$

Випадок $t = 1$ в актуарній математиці найбільш важливий, тому що страхування, як правило, проводиться на ціле число років. У цьому випадку прийнято опускати індекс t у позначеннях характеристик ${}_tq_x$ і ${}_tp_x$. Таким чином, q_x – це ймовірність смерті протягом року людини у віці x років, а p_x – це ймовірність того, що людина у віці x років, проживе ще не менше одного року. З огляду на рівності (2.2.2) і (2.2.3) маємо

$$q_x = \frac{s(x)-s(x+1)}{s(x)} = P\{T(x) \le 1\}; \qquad p_x = \frac{s(x+1)}{s(x)} = P\{T(x) > 1\}.$$

Окрім функції розподілу ${}_tq_x$ і додаткової функції розподілу ${}_tp_x$ залишкового часу життя в актуарній математиці застосовується таке узагальнення величини ${}_tq_x$.

Означення 2.2.1 Символом ${}_{t|u}q_x$ позначається ймовірність того, що людина у віці x років проживе ще t років, але помре протягом наступних u років.

У термінах залишкового часу життя $T(x)$ ця ймовірність виражається рівністю

$$ {}_{t|u}q_x = P\{t < T(x) \le t+u\}. \tag{2.2.4}$$

Ўмовірність ${}_{t|u}q_x$ можна виразити через функцію розподілу залишкового часу життя або через його додаткову функцію розподілу. Дійсно,

$$ {}_{t|u}q_x = P\{T(x) \le t+u\} - P\{T(x) \le t\} = {}_{t+u}q_x - {}_{t}q_x, \tag{2.2.5}$$

$$ {}_{t|u}q_x = P\{T(x) > t\} - P\{T(x) > t+u\} = {}_{t}p_x - {}_{t+u}p_x. $$

За допомогою (2.2.2) і (2.2.5) імовірність ${}_{t|u}q_x$ можна виразити через основну характеристику тривалості життя – функцію виживання:

$$ {}_{t|u}q_x = {}_{t+u}q_x - {}_{t}q_x = \frac{[s(x)-s(x+t+u)]-[s(x)-s(x+t)]}{s(x)} = $$

$$ = \frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x)}. \tag{2.2.6}$$

Випадок $u=1$ є найбільш цікавим з погляду актуарної математики. Ўндекс 1 у цьому випадку опускається. Таким чином, ${}_{t|}q_x$ – це ймовірність, того, що людина у віці x років проживе ще t років, але помре протягом наступного року.

2.3 Середній залишковий час життя і його дисперсія

Означення 2.3.1 Середнє значення залишкового часу життя $T(x)$ людини у віці x років (тобто математичне сподівання величини $T(x)$) називається повною ймовірною тривалістю життя людини у віці x років. Це середнє значення позначається символом e_x^o. Отже,

$$ e_x^o := MT(x) $$

(слід пам'ятати, що $MT(x)$ – це умовне математичне сподівання).

Ураховуючи, що величина $T(x)$ невід'ємна, отримуємо

$$ e_x^o = \int_0^\infty t dP\{T(x) \le t\} = -\int_0^\infty t dP\{T(x) > t\} = $$

$$ = -\int_0^\infty t dP\{X > x+t | X > x\} = -\int_0^\infty t d\frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{1}{s(x)} \int_0^\infty s(x+t) dt. $$

Звідси маємо

$$e_x^o = \frac{1}{s(x)} \int\limits_x^\infty s(u)du. \tag{2.3.1}$$

Аналогічну формулу можна отримати для моменту другого порядку:

$$MT^2(x) = -\int\limits_0^\infty t^2 dP\{T(x) > t\} = 2\int\limits_0^\infty tP\{T(x) > t\}dt = \frac{2}{s(x)} \int\limits_0^\infty ts(x+t)dt.$$

2.4 Обчислення повної ймовірної тривалості життя людини у віці x років за допомогою таблиць тривалості життя

У цьому параграфі ми отримаємо формулу для обчислення величини e_x^o у термінах табличних характеристик тривалості життя. Такі формули є найбільш зручними для застосувань.

Як і в §1.2 розглянемо групу з l_0 новонароджених. Через $X_i,\ i = 1, 2, ..., l_0$, позначимо тривалість життя i-ї особи з цієї групи. Нехай σ_x – сумарне число років, які проживуть представники даної групи після віку x років. Зрозуміло, що внесок i-го представника цієї групи в суму σ_x дорівнює $X_i - x$, якщо $X_i > x$; якщо ж $X_i \le x$, то цей внесок дорівнює нулю. Таким чином,

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{l_0} (X_i - x)_+.$$

Нехай далі T_x – середнє сумарне число років, які проживуть представники даної групи після віку x років, тобто $T_x := M\sigma_x$.

Для обчислення T_x знайдемо додаткову функцію розподілу величини $X_i - x$. Для $t \ge 0$ маємо $P\{(X_i - x)_+ > t\} = P\{X_i > x + t\} = s(x+t)$. Тому

$$T_x = M\sigma_x = \sum_{i=1}^{l_0} M(X_i - x)_+ = l_0 M(X_i - x)_+ = l_0 \int\limits_0^\infty tdP\{(X_i - x)_+ \le t\} =$$

$$= -l_0 \int\limits_0^\infty tdP\{(X_i - x)_+ > t\} = l_0 \int\limits_0^\infty P\{(X_i - x)_+ > t\}dt =$$

$$= l_0 \int\limits_0^\infty s(x+t)dt = l_0 \int\limits_x^\infty s(u)du.$$

Ураховуючи формули (2.3.1) і (1.2.1), звідси отримуємо

$$e_x^o = \frac{l_0}{l_0 s(x)} \int\limits_x^{\infty} s(u)du = \frac{T_x}{l_x}.$$

Таким чином, повна ймовірна тривалість життя людини у віці x років дорівнює середньому сумарному числу років, які прожили представники даної групи після віку x років, поділеному на середнє число представників даної групи у віці x років і старших.

2.5 Залишковий час життя в конкретних аналітичних моделях тривалості життя

1. *Модель де Муавра.* У цій моделі (див. §1.5) тривалість життя рівномірно розподілена на відрізку $[0,\omega]$. Тому

$$p(x) = \begin{cases} 1/\omega, & x \in [0,\omega] \\ 0, & x > \omega \end{cases}, \qquad s(x) = \begin{cases} 1 - x/\omega, & x \in [0,\omega] \\ 0, & x > \omega \end{cases}.$$

Звідси, застосовуючи рівність (2.1.2), отримуємо таку формулу для щільності $p_x(t)$ залишкового часу життя:

$$p_x(t) = \frac{p(x+t)}{s(x)} = \frac{1/\omega}{1 - x/\omega} = \frac{1}{\omega - x}$$

для $t \in [0, \omega - x]$ і $p_x(t) = 0$ для $t \notin [0, \omega - x]$.

Таким чином, у моделі де Муавра залишковий час життя людини у віці x років також рівномірно розподілений, але на відрізку $[0, \omega - x]$.

2. *Модель Мейкхама.* У цій моделі (як ми бачили в §1.5) функція виживання і щільність розподілу тривалості життя задаються формулами

$$s(x) = \exp\left\{-Ax - \frac{B\left(e^{\alpha x} - 1\right)}{\alpha}\right\}$$

і

$$p(x) = \left(A + Be^{\alpha x}\right)\exp\left\{-Ax - \frac{B\left(e^{\alpha x} - 1\right)}{\alpha}\right\}$$

(будемо називати випадкову величину з такою щільністю $p(x)$ розподіленою за законом Мейкхама з параметрами A, B і α). Тому з огляду на рівність (2.1.2) щільність розподілу $p_x(t)$ залишкового часу життя $T(x)$ у цій моделі має такий вигляд:

$$p_x(t) = \frac{p(x+t)}{s(x)} = \frac{\left[A + Be^{\alpha(x+t)}\right]\exp\left\{-A(x+t) - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - 1\right)\right\}}{\exp\left\{-Ax - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x} - 1\right)\right\}} =$$

$$= \left[A + \left(Be^{\alpha x}\right) e^{\alpha t}\right] \exp\left\{-At - \frac{Be^{\alpha x}\left(e^{\alpha t} - 1\right)}{\alpha}\right\}.$$

Порівнявши $p_x(t)$ і $p(t)$, дійдемо висновку, що залишковий час життя $T(x)$ також розподілений за законом Мейкхама, але з параметрами A, $Be^{\alpha x}$ і α.

3. *Модель Ерланга.* У цій моделі щільність розподілу і функція виживання задаються формулами (1.5.1) і (1.5.2) відповідно. Тому внаслідок рівності (2.1.2) для щільності залишкового часу життя отримуємо

$$p_x(t) = \frac{p(x+t)}{s(x)} = \frac{\frac{x+t}{a^2} e^{-(x+t)/a}}{\frac{x+a}{a} e^{-x/a}} = \frac{x+t}{a(x+a)} e^{-t/a}.$$

Перепишемо цю формулу інакше:

$$p_x(t) = \frac{x}{x+a} \cdot \frac{1}{a} e^{-t/a} + \frac{a}{x+a} \cdot \frac{t}{a^2} e^{-t/a}.$$

Таким чином, щільність розподілу залишкового часу життя в моделі Ерланга – це опукла комбінація показникової щільності та щільності Ерланга (див формулу (1.5.1)).

Знайдемо додаткову функцію розподілу залишкового часу життя:

$$P\{T(x) > t\} = P\{X > x + t | X > x\} = \frac{s(x+t)}{s(x)} =$$

$$\frac{\frac{x+t+a}{a} e^{-(x+t)/a}}{\frac{x+a}{a} e^{-x/a}} = \frac{x+t+a}{x+a} e^{-t/a} = \left(1 + \frac{t}{x+a}\right) e^{-t/a}.$$

Звідси випливає рівність

$$\lim_{x \to \infty} P\{T(x) > t\} = e^{-t/a}.$$

Але зрозуміло, що ця границя повинна дорівнювати нулю. Таким чином, модель Ерланга не є адекватною для великих x і тому не може застосовуватись для людей похилого віку.

2.6 Частковий залишковий час життя

Припустимо, що договір страхування був укладений на n років. При цьому за його умовою страхова сума виплачується або в момент смерті застрахованого (якщо вона настала до закінчення терміну дії договору), або в момент закінчення дії договору (якщо смерть застрахованого не настала протягом n років). Такий вид страхування називають змішаним n-річним страхуванням (більш детально види страхування розглядаються в 4-му і 5-му розділах).

Отже, за умовою договору змішаного n-річного страхування страхова сума виплачується в момент часу

$$\min\{T(x), n\},$$

де x – вік застрахованого на момент заключення договору. З погляду страхової компанії в цей момент відбувається "смерть"застрахованого. Тому величину $\min\{T(x), n\}$ називають частковим залишковим часом життя. Середнє значення цієї величини (тобто її математичне сподівання) називають середнім частковим часом життя і позначають символом $e^o_{x:n\rceil}$. Отже,

$$e^o_{x:n\rceil} := M \min\{T(x), n\}.$$

Поставимо за мету отримати формулу для обчислення середнього часткового часу життя в термінах функції виживання. Для цього спочатку знайдемо додаткову функцію розподілу часткового залишкового часу життя $\min\{T(x), n\}$. Зрозуміло, що $P\{\min\{T(x), n\} > t\} = 0$ при $t \geq n$. Нехай $t \in [0, n)$. У цьому випадку подія $\min\{T(x), n\} > t$ збігається з подією $T(x) > t$. Тому

$$P\{\min\{T(x), n\} > t\} = P\{T(x) > t\} = P\{X > x + t | X > x\} = \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Таким чином,

$$P\{\min\{T(x), n\} > t\} = \begin{cases} \frac{s(x+t)}{s(x)}, & t \in [0, n), \\ 0, & t \geq n. \end{cases}$$

Зазначимо, що додаткова функція розподілу має стрибок у точці $t = n$, величина якого $h_n = -(s(x+n))/s(x)$. Тому

$$e^o_{x:n\rceil} = \int\limits_0^\infty t dP\{\min\{T(x), n\} \leq t\} = -\int\limits_0^\infty t dP\{\min\{T(x), n\} > t\} =$$

$$= -\int\limits_0^n t dP\{\min\{T(x), n\} > t\} + n h_n = \int\limits_0^n P\{\min\{T(x), n\} > t\} dt =$$

$$= \frac{1}{s(x)} \int\limits_0^n s(x+t) dt = \frac{1}{s(x)} \int\limits_x^{x+n} s(u) du.$$

2.7 Приклади розрахунків

Приклад 1. За допомогою таблиці 1 обчислити ймовірність того, що залишковий час життя людини у віці 20 років міститься в проміжку від 40 до 50 років.

Розв'язання. Шукана ймовірність була в §2.2 позначена символом ${}_{40|10}q_{20}$. За означенням залишкового часу життя (див. §2.1) і з огляду на угоду, прийняту в §2.1, отримуємо

$${}_{40|10}q_{20} = P\{40 < T(20) < 50\} = P\{40 < X - 20 < 50 | X > 20\} =$$

$$= \frac{s(60) - s(70)}{s(20)} = \frac{0.837 - 0.682}{0.977} \approx 0.16.$$

Приклад 2. Припустимо, що у віці від 30 до 33 рокі інтенсивність смертності задається формулою $\mu_x = 0.001x$. Обчислити ${}_{2|}\,q_{30}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі маємо

$${}_{2|}\,q_{30} = P\{2 < T(30) < 3\} = P\{2 < X - 30 < 3 | X > 30\} = \frac{s(32) - s(33)}{s(30)}.$$

Застосовуючи формулу (1.4.3), ми можемо обчислити ${}_{2|}\,q_{30}$ за допомогою інтенсивності смертності:

$${}_{2|}\,q_{30} = -\frac{\exp\{-\int_0^{32} \mu_x dx\} - \exp\{-\int_0^{33} \mu_x dx\}}{\exp\{-\int_0^{30} \mu_x dx\}} =$$

$$= \exp\left\{-\int_{30}^{32} \mu_x dx\right\} - \exp\left\{-\int_{30}^{33} \mu_x dx\right\} \approx 0.03.$$

Приклад 3. Припустимо, що функція виживання задається формулою $s(x) = \sqrt{1 - x/110}$, $\;0 \le x \le 110$. Обчислити ймовірність того, що людина у віці 50 років помре протягом наступного року, а також середній залишковий час життя цієї людини.

Розв'язання. 1. Шукана ймовірність позначається символом q_{50}. За означенням

$$q_{50} = P\{T(50) \le 1\} = \frac{s(50) - s(51)}{s(50)} = 1 - \frac{\sqrt{1 - 51/110}}{\sqrt{1 - 50/110}} = 1 - \sqrt{\frac{59}{60}} \approx 0.0084.$$

2. Для обчислення $e^o_{50} = MT(50)$ застосуємо формулу (2.3.1):

$$e^o_{50} = \frac{1}{s(50)} \int\limits_{50}^{\infty} s(t) dt = \frac{1}{\sqrt{1 - 50/110}} \int\limits_{50}^{110} \sqrt{1 - t/110}\, dt =$$

$$= \int\limits_{50}^{110} \sqrt{1 - \frac{t - 50}{60}}\, dt = \int\limits_{0}^{60} \sqrt{1 - u/60}\, du = 120 \int\limits_{0}^{1} z^2 dz = 40(\text{i})$$

(при обчисленні останнього інтеграла було зроблено заміну змінних $z = \sqrt{1 - u/60}$).

Розділ 3

Округлений час життя

Зазвичай люди ведуть відлік прожитого часу цілими роками. Відповідно до цього страхові компанії укладають договори на ціле число років. Тому в актуарній математиці разом з тривалістю життя X та залишковим часом життя $T(x)$ розглядають цілі частини цих величин.

Означення 3.0.1 Випадкову величину $K(x) := [T(x)]$ (символом $[a]$ позначається ціла частина числа a) називають округленим залишковим часом життя.

3.1 Розподіл округленого залишкового часу життя

Згідно з означенням випадкова величина $K(x)$ набуває значень $k = 0, 1, 2, ...$ Таким чином, $K(x)$ – дискретна випадкова величина. У теорії ймовірностей дискретні випадкові величини задаються своїм розподілом. Щоб знайти розподіл $K(x)$, обчислимо ймовірності $P\{K(x) = k\}$. Ураховуючи неперервність функції розподілу величини $T(x)$, що випливає з властивості 5) функції виживання $s(x)$, отримаємо

$$P\{K(x) = k\} = P\{k \leq T(x) < k+1\} = P\{k < T(x) \leq k+1\} =$$

$$= P\{k + x < X \leq k+1+x | X > x\} = \frac{1}{s(x)}\{s(k+x) - s(k+1+x)\}. \quad (3.1.1)$$

Цією формулою розподіл округленого часу життя виражається в термінах функції виживання. Але часто (наприклад, у деяких моделях тривалості життя) цей розподіл зручніше виражати в термінах інтенсивності смертності μ_x. Застосовуючи рівності (3.1.1) і (1.4.3), одержимо потрібну формулу:

$$P\{K(x) = k\} = \frac{\exp\left\{-\int\limits_0^{k+x} \mu_t dt\right\} - \exp\left\{-\int\limits_0^{k+1+x} \mu_t dt\right\}}{\exp\left\{-\int\limits_0^{x} \mu_t dt\right\}},$$

тобто

$$P\{K(x)=k\}=\exp\left\{-\int\limits_x^{x+k}\mu_t dt\right\}-\exp\left\{-\int\limits_x^{x+k+1}\mu_t dt\right\}. \qquad (3.1.2)$$

Зазначимо, що функція розподілу округленого залишкового часу життя $K(x)$ досить просто виражається через функцію розподілу залишкового часу життя $T(x)$. Дійсно,

$$P\{K(x)\le t\}=P\{K(x)\le [t]\}=P\{T(x)<[t]+1\}=P\{T(x)\le [t]+1\}.$$

3.2 Розподіл округленого часу життя

Зазначимо, що основна випадкова величина, яка вивчається в актуарній математиці, – тривалість життя X, за допомогою очевидної рівності

$$X=T(0)$$

виражається через залишковий час життя. Тому всі формули, які були отримані в попередньому параграфі для розподілу округленого залишкового часу життя $K(x)$, залишаються справедливими і для округленого часу життя $K(0)=[X]$. Зокрема, формула (3.1.1) з огляду на рівність $s(0)=0$ набуває такого вигляду:

$$P\{K(0)=k\}=s(k)-s(k+1)=\frac{l_k-l_{k+1}}{l_0} \qquad (3.2.1)$$

(в останній рівності враховано статистичний зміст функції виживання, що виражається формулою (1.2.1)). Далі з формули (3.1.2) отримуємо

$$P\{K(0)=k\}=\exp\left\{-\int\limits_0^{k}\mu_t dt\right\}-\exp\left\{-\int\limits_0^{k+1}\mu_t dt\right\}.$$

Відзначимо ще таку наближену рівність, яка випливає з формули (3.2.1):

$$P\{K(0)=k\}=s(k)-s(k+1)=\int\limits_k^{k+1}p(x)dx\approx p(k).$$

Таким чином, розподіл округленого часу життя наближено описується за допомогою кривої смертей, тобто графіка щільності розподілу $p(x)$.

3.3 Середнє значення округленого залишкового часу життя та його дисперсія

Означення 3.3.1 Математичне сподівання округленого залишкового часу життя $K(x)$ називається середньою округленою тривалістю життя e_x:

$$e_x := MK(x).$$

Згідно з формулою для математичного сподівання дискретної випадкової величини маємо

$$e_x = MK(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{K(x) = k\}.$$

Застосовуючи формулу (3.1.1) та підсумовуючи частинами, отримуємо

$$e_x = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} k\left[s(x+k) - s(x+k+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{s(x)} \left[\sum_{k=1}^{\infty} ks(x+k) - \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)s(x+k)\right] = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k).$$

У такий же спосіб одержуємо формулу для моменту другого порядку

$$M^2(K(x)) = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left[s(x+k) - s(x+k+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{s(x)} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^2 s(x+k) - \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^2 s(x+k)\right] = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)s(x+k) =$$

$$= \frac{2}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} ks(x+k) - e_x.$$

Тепер дисперсія величини $K(x)$ може бути підрахована за відомою формулою $DK(x) = M^2K(x) - (MK(x))^2$.

3.4 Задача наближення для дробового віку

У попередніх параграфах ми розглянули такі характеристики тривалості життя, як залишковий час життя $T(x)$ і округлений залишковий час життя $K(x)$. Але слід зауважити, що при збиранні статистичних даних складають таблиці саме для величини $K(x)$. Це пов'язано з тим, що відлік прожитого часу люди ведуть цілими роками.

Отже, постає завдання знаходження характеристик розподілу величини $T(x)$ за допомогою відомих характеристик розподілу величини $K(x)$. Одразу зазначимо, що при цілих t функцію розподілу величини $T(x)$ можна точно знайти за формулою

$$P\{T(x) \leq t\} = P\{T(x) < t\} = P\{K(x) \leq t-1\}, \quad t = 1, 2, 3, ...$$

Таким чином, задача знаходження характеристик розподілу величини $T(x)$ є задачею інтерполяції. А саме – треба знайти значення функції розподілу залишкового часу життя в усіх точках $t \in [n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, ...$, за відомими її значеннями в цілочислових точках $n = 0, 1, 2, ...$ При цьому, оскільки всі характеристики тривалості життя виражаються через функцію виживання, то досить розв'язати таку задачу для функції виживання.

В актуарній математиці (як і в багатьох розділах прикладної математики) цю задачу розв'язують, вважаючи, що на проміжках $[n, n+1]$ функція виживання має той чи інший простий конкретний вигляд. Якщо "склеїти"ці прості функції, задані на окремих проміжках $[n, n+1]$, то отримаємо розв'язок даної задачі інтерполяції. За термінологією теорії наближення мова йде про інтерполяцію сплайнами того чи іншого вигляду.

Розглянемо три основних способи такої інтерполяції: інтерполяцію лінійними, показниковими та гіперболічними функціями.

3.5 Інтерполяція лінійними функціями (рівномірний розподіл смертей)

Припустимо, що функція виживання $s(x)$ лінійна на проміжках $[n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, ...$, тобто

$$s(x) = a_n + b_n x, \quad x \in [n, n+1].$$

Оскільки $s(n)$ і $s(n+1)$ відомі (за даними статистики), то для визначення a_n і b_n маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} a_n + b_n n = s(n) \\ a_n + b_n(n+1) = s(n+1). \end{cases}$$

Звідси

$$b_n = s(n+1) - s(n),$$
$$a_n = s(n) - n[s(n+1) - s(n)] = (n+1)s(n) - ns(n+1)$$

і

$$s(x) = (n+1-x)s(n) + (x-n)s(n+1), \quad x \in [n, n+1], \tag{3.5.1}$$

тобто $s(x)$ – опукла комбінація своїх значень на кінцях відрізка $[n, n+1]$. Якщо подати x у вигляді $x = n+t$, $t \in [0, 1]$, то можна переписати формулу (3.5.1) інакше:

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1), \quad t \in [0, 1]. \tag{3.5.2}$$

Обчислимо інші характеристики тривалості життя в даній моделі інтерполяції. З рівності (3.5.1) одразу видно, що крива смертей (тобто графік щільності $p(x)$) задається формулою

$$p(x) = -s'(x) = s(n) - s(n+1), \quad x \in (n, n+1)$$

(зрозуміло, що в цілочислових точках крива смертей не визначена).

Для інтенсивності смертності $\mu_x = p(x)/s(x)$ маємо

$$\mu_x = \frac{s(n) - s(n+1)}{n[s(n) - s(n+1)] + x[s(n+1) - s(n)] + s(n)}, \quad x \in (n, n+1). \quad (3.5.3)$$

Найбільш простий вигляд формула для μ_x має в термінах величини

$$q_n = \frac{s(n) - s(n+1)}{s(n)} = P\{0 \le T(n) < 1\}$$

(див. §2.2). З формули (3.5.3) отримуємо:

$$\mu_x = \frac{s(n) - s(n+1)}{s(n) + n[s(n) - s(n+1)] - x(s(n) - s(n+1))} =$$

$$= \frac{q_n}{1 + (n - x)q_n}, \quad x \in (n, n+1). \quad (3.5.4)$$

Як наслідок рівності (3.5.4) відзначимо, що за умови лінійної інтерполяції інтенсивність смертності в проміжках між вузлами інтерполяції зростає.

Означення 3.5.1 Через τ позначимо дробову частину тривалості життя X:

$$\tau := X - K(0),$$

де $K(0) = [X]$.

Величина τ описує момент смерті всередині року. Знайдемо розподіл величини τ. Для цього спочатку знайдемо умовний розподіл цієї величини при умові, що смерть настала у віці n років (тобто $K = K(0) = n$).

$$P\{\tau \le t | K = n\} = P\{X - K \le t | K = n\} = P\{X \le n + t | n \le X < n+1\} =$$

$$= \frac{P\{n \le X \le n+t\}}{P\{n \le X < n+1\}} = \frac{s(n) - s(n+t)}{s(n) - s(n+1)}, \quad t \in [0, 1].$$

Ураховуючи формулу (3.5.2), отримуємо

$$P\{\tau \le t | K = n\} = \frac{t[s(n) - s(n+1)]}{s(n) - s(n+1)} = t, \quad t \in [0, 1].$$

Тепер за допомогою формули повної ймовірності легко знайти розподіл величини τ:

$$P\{\tau \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau \le t | K = n\} P\{K = n\} = t \sum_{n=0}^{\infty} P\{K = n\} = t, \quad t \in [0, 1].$$

Таким чином,

1) умовний розподіл величини τ не залежить від n і тому збігається з її безумовним розподілом;

2) за умов лінійної інтерполяції дробова частина життя τ розподілена рівномірно на відрізку $[0, 1]$ (іншими словами, у будь-який день між двома днями народження смерть людини однаково ймовірна);

3) округлений час життя $K(0)$ і дробова частина життя τ – величини незалежні.

Зауваження. Аналогічно можна показати, що за умов лінійної інтерполяції випадкові величини $K(x)$ і $\tau_x := T(x) - K(x)$ незалежні, причому дробова частина залишкового часу життя τ_x розподілена рівномірно на $[0, 1]$.

3.6 Інтерполяція показниковими функціями (постійна інтенсивність смертності)

Припустимо, що функція виживання $s(x)$ на проміжках $[n, n + 1]$, $n = 0, 1, 2, ...$ – показникова функція вигляду

$$s(x) = a_n e^{-b_n x}, \quad x \in [n, n + 1].$$

Тоді для знаходження a_n і b_n маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_n e^{-nb_n} = s(n) \\ a_n e^{-(n+1)b_n} = s(n + 1). \end{cases}$$

Звідси

$$e^{-b_n} = \frac{s(n + 1)}{s(n)} = p_n,$$

де $p_n = P\{T(n) > 1\}$ (див §2.2). Тому

$$b_n = -\ln p_n, \quad a_n = s(n)e^{nb_n} = s(n)e^{-n \ln p_n} = s(n)p_n^{-n}.$$

Таким чином,

$$s(x) = a_n e^{-xb_n} = s(n)p_n^{-n} e^{x \ln p_n} = s(n)p_n^{x-n}, \quad x \in [n, n + 1] \qquad (3.6.1)$$

або

$$s(n + t) = s(n)p_n^t, \quad t \in [0, 1]. \qquad (3.6.2)$$

Тому крива смертей за умови інтерполяції показниковими функціями задається формулою

$$p(x) = -s(n)p_n^{x-n} \ln p_n, \quad x \in (n, n + 1)$$

(у цілочислових точках вона не визначена), а для інтенсивності смертності маємо

$$\mu_x = \frac{-s(n)p_n^{x-n} \ln p_n}{s(n)p_n^{x-n}} = -\ln p_n, \quad x \in (n, n + 1).$$

Таким чином, за умови інтерполяції показниковими функціями інтенсивність смертності в інтервалах між цілочисловими значеннями аргумента постійна.

3.7 Інтерполяція гіперболічними функціями (припущення Балдуччі)

Припустимо, що функція виживання $s(x)$ на проміжках $[n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, ...$ – гіперболічна функція, тобто функція вигляду

$$s(x) = \frac{\alpha_n}{\beta_n + x}, \quad x \in [n, n+1].$$

Це припущення рівносильне тому, що функція $1/s(x)$ – лінійна на проміжках між цілочисловими значеннями аргументу. Тому, як і у випадку лінійної інтерполяції, для функції $1/s(x)$ маємо (див. формули (3.5.1) і (3.5.2))

$$\frac{1}{s(x)} = (n+1-x)\frac{1}{s(n)} + (x-n)\frac{1}{s(n+1)}, \quad x \in [n, n+1]$$

або

$$\frac{1}{s(n+t)} = (1-t)\frac{1}{s(n)} + t\frac{1}{s(n+1)}, \quad t \in [0,1].$$

Звідси

$$s(n+t) = \frac{s(n)s(n+1)}{(1-t)s(n+1) + ts(n)} = \frac{s(n)s(n+1)}{s(n+1) + t(s(n) - s(n+1))} =$$

$$= \frac{s(n+1)}{p_n + tq_n}, \quad t \in [0,1], \tag{3.7.1}$$

де

$$p_n = \frac{s(n+1)}{s(n)}, \quad q_n = 1 - p_n.$$

Інакше рівність (3.7.1) можна записати у вигляді

$$s(x) = \frac{s(n+1)}{p_n + (x-n)q_n}, \quad x \in [n, n+1]. \tag{3.7.2}$$

Тому за умови інтерполяції гіперболічними функціями крива смертей задається формулою

$$p(x) = -s'(x) = \frac{s(n+1)q_n}{(p_n + (x-n)q_n)^2}, \quad x \in (n, n+1)$$

і для інтенсивності смертності отримуємо

$$\mu_x = \frac{s(n+1)q_n}{(p_n+(x-n)q_n)^2}\left\{\frac{s(n+1)}{p_n+(x-n)q_n}\right\}^{-1} = \frac{q_n}{p_n+(x-n)q_n}, \quad x\in(n,n+1).$$

Таким чином, за умови припущення Балдуччі інтенсивність смертності в проміжках між цілочисловими значеннями аргументу спадає.

3.8 Інтегральні характеристики дробової частини тривалості життя

Розглянемо середнє значення залишкового часу життя за умови, що воно менше 1, тобто умовне математичне сподівання

$$a(x) := M(T(x)\,|\,T(x)<1). \qquad (3.8.1)$$

Для обчислення $a(x)$ знайдемо умовну додаткову функцію розподілу $P\{T(x)>t\,|\,T(x)<1\}$. Зрозуміло, що при $t\geq 1$ ця функція дорівнює нулю. Для $t\in(0,1)$ маємо

$$P\{T(x)>t\,|\,T(x)<1\} = \frac{P\{t<T(x)<1\}}{P\{T(x)<1\}} = \frac{P\{x+t<X<x+1|X>x\}}{P\{X<x+1|X>x\}} =$$

$$= \frac{P\{x+t<X<x+1\}}{P\{x<X<x+1\}} = \frac{s(x+t)-s(x+1)}{s(x)-s(x+1)}, \quad t\in[0,1].$$

Тому

$$a(x) = \int\limits_0^1 P\{T(x)>t\,|\,T(x)<1\}dt = \int\limits_0^1 \frac{s(x+t)-s(x+1)}{s(x)-s(x+1)}dt. \qquad (3.8.2)$$

Нехай тепер $x=n$ – натуральне число. Тоді умовне математичне сподівання $a(n)$ згідно з означенням – це середнє значення дробової частини тривалості життя. Обчислимо його за умов трьох видів інтерполяції, які були розглянуті в попередньому параграфі.

Лінійна інтерполяція. У цьому випадку функція виживання в проміжках між вузлами інтерполяції задається формулою (3.5.2):

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1), \quad t\in[0,1].$$

Підставляючи це значення $s(n+t)$ у рівність (3.8.2), отримуємо

$$a(n) = \int\limits_0^1 \frac{(1-t)s(n)+ts(n+1)-s(n+1)}{s(n)-s(n+1)}dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)(s(n)-s(n+1))}{s(n)-s(n+1)} dt = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}.$$

Цей результат був очікуваний тому, що за умов лінійної інтерполяції дробова частина життя рівномірно розподілена на відрізку $[0,1]$ (див. §3.5).

Інтерполяція показниковими функціями. У цьому випадку функція виживання в проміжках між вузлами інтерполяції задається формулою (3.6.2):

$$s(n+t) = s(n)p_n^t, \quad t \in [0,1],$$

де $p_n = P\{T(n) > 1\}$. Підставляючи таке значення $s(n+t)$ в рівність (3.8.2), маємо

$$a(n) = \int_0^1 \frac{s(n+t)-s(n+1)}{s(n)-s(n+1)} dt = \int_0^1 \frac{s(n)p_n^t - s(n+1)}{s(n)-s(n+1)} dt =$$

$$= \frac{1}{s(n)-s(n+1)} \left[\left(\frac{s(n)p_n^t}{\ln p_n} \right)_0^1 - s(n+1) \right] =$$

$$= \frac{1}{s(n)-s(n+1)} \left[\frac{s(n)(p_n-1)}{\ln p_n} - s(n+1) \right].$$

Оскільки $p_n = P\{T(n) > 1\} = s(n+1)/s(n)$ (див §2.2), то для середнього значення дробової частини тривалості життя за умови інтерполяції показниковими функціями отримуємо

$$a(n) = \frac{s(n)}{s(n)-s(n+1)} \left[\frac{p_n - 1}{\ln p_n} - p_n \right] = -\frac{1}{\ln p_n} - \frac{p_n}{q_n}, \tag{3.8.3}$$

де $q_n = 1 - p_n = P\{T(n) \le 1\}$.

Згідно з означенням імовірність $q_n = P\{T(n) \le 1\}$ мала у випадку не дуже великих n. Тому, виходячи з (3.8.3), можна одержати асимптотичну формулу для $a(n)$. Для цього застосуємо відоме розвинення $\ln p_n$ у ряд Тейлора в околі нуля:

$$\ln p_n = \ln(1-q_n) = -q_n - \frac{q_n^2}{2} - \frac{q_n^3}{3} - \ldots, \tag{3.8.4}$$

Виконуючи ділення ряду на ряд, матимемо

$$-\frac{1}{\ln p_n} = \frac{1}{q_n} - \frac{1}{2} - \frac{q_n}{12} + o(q_n).$$

Ураховуючи цю асимптотичну рівність, за допомогою формули (3.8.3) знаходимо

$$a(n) = \frac{1}{q_n} - \frac{1}{2} - \frac{q_n}{12} + o(q_n) - \frac{1-q_n}{q_n} = \frac{1}{2} - \frac{q_n}{12} + o(q_n).$$

Інтерполяція гіперболічними функціями. У цьому випадку функція виживання в проміжках між вузлами інтерполяції задається формулою (3.7.1):

$$s(n+t) = \frac{s(n+1)}{p_n + tq_n}, \quad t \in [0,1].$$

Підставляючи це значення $s(n+t)$ у рівність (3.8.2), маємо

$$a(n) = \int_0^1 \frac{s(n+t) - s(n+1)}{s(n) - s(n+1)} dt = \frac{s(n+1)}{s(n) - s(n+1)} \int_0^1 \left[\frac{1}{p_n + tq_n} - 1 \right] dt =$$

$$= \frac{1}{1/p_n - 1} \left[\frac{1}{q_n} \ln \left(p_n + tq_n\right)_0^1 - 1 \right] = \frac{p_n}{q_n^2} \left[\ln \frac{p_n + q_n}{p_n} - q_n \right] =$$

$$= \frac{p_n}{q_n^2} \left[\ln \frac{1}{p_n} - q_n \right] = -\frac{p_n}{q_n^2} \left[\ln p_n + q_n \right]. \tag{3.8.5}$$

Отримаємо асимптотичну формулу для $a(n)$. Оскільки ймовірність $q_n = P\{T(n) \leq 1\}$ мала у випадку не дуже великих n, то, виходячи з рівності (3.8.5) за допомогою формули (3.8.4), маємо

$$a(n) = -\frac{1-q_n}{q_n^2} \left(q_n - q_n - \frac{q_n^2}{2} - \frac{q_n^3}{3} - \ldots \right) = (1 - q_n) \left(\frac{1}{2} + \frac{q_n}{3} + \ldots \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{q_n}{3} + \ldots \right) - \left(\frac{q_n}{2} + \frac{q_n^2}{3} + \ldots \right) = \frac{1}{2} - \frac{q_n}{6} + o(q_n).$$

3.9 Обчислення середнього умовного залишкового часу тривалості життя за допомогою таблиць тривалості життя

Через S_x позначимо загальну кількість років, прожитих у віковому проміжку $(x, x+1]$ тими представниками початкової групи з l_0 новонароджених, які померли в цьому віковому проміжку.

Щоб отримати аналітичний вираз для S_x, розглянемо випадкову величину I_k – внесок k-го представника цієї групи в суму S_x. Очевидно, що

$$I_k = \begin{cases} X_k - x, & x < X_k \leq x+1 \\ 0, & X_k \notin (x, x+1], \end{cases}$$

де X_k – тривалість життя k-го представника цієї групи і

$$S_x = \sum_{k=1}^{l_0} I_k.$$

Обчислимо середнє значення MS_x. Для цього знайдемо спочатку додаткову функцію розподілу випадкової величини I_k. Оскільки значення I_k належать проміжку $[0,1]$, то $P\{I_k > t\} = 0$ для $t \geq 1$. Нехай $t \in (0,1)$. Тоді $\{I_k > t\} = \{x + t < X_k \leq x + 1\}$. Тому

$$P\{I_k > t\} = \begin{cases} s(x+t) - s(x+1), & t \in (0,1) \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Оскільки $MI_x = \int\limits_0^1 P\{I_k > t\}dt$, то

$$MS_x = \sum_{k=1}^{l_0} MI_k = l_0 \int\limits_0^1 [s(x+t) - s(x+1)]dt = \int\limits_0^1 [l_{x+t} - l_x]dt, \qquad (3.8.6)$$

де l_x – середня кількість представників початкової групи з l_0 новонароджених, які дожили до віку x років.

З огляду на отриманий вираз для MS_x, формулу (3.8.2) для умовного середнього залишкового часу життя $a(x)$ можна переписати у вигляді

$$a(x) = \frac{l_0 \int\limits_0^1 [s(x+t) - s(x+1)]dt}{l_0[s(x) - s(x+1)]} = \frac{MS_x}{l_x - l_{x+1}} = \frac{MS_x}{d_x}, \qquad (3.8.7)$$

де d_x – середня кількість представників даної групи з l_0 новонароджених, які померли у віковому проміжку $(x, x+1]$.

Формула (3.8.7) означає, що середній умовний залишковий час тривалості життя дорівнює середній загальній кількості років, прожитих у віковому проміжку $(x, x+1]$ тими представниками початкової групи з l_0 новонароджених, які померли в цьому віковому проміжку, поділеному на середню кількість представників даної групи з l_0 новонароджених, які померли в цьому ж віковому проміжку.

Щоб отримати ще одну формулу, яка виражає $a(x)$ у термінах табличних характеристик тривалості життя, розглянемо величину S_x^* – загальну кількість років, прожитих у проміжку $(x, x+1]$ усіма представниками початкової групи з l_0 новонароджених. Таким чином, на відміну від величини S_x величина S_x^* включає внески і тих представників початкової групи з l_0 новонароджених, які дожили до віку $x+1$ років. Зрозуміло, що внесок кожного такого представника в суму S_x^* дорівнює 1. Тому

$$S_x^* = S_x + L(x+1), \qquad (3.8.8)$$

де $L(x+1)$ – кількість представників даної групи з l_0 новонароджених, які дожили до віку $x+1$ років. Нехай далі

$$L_x := MS_x^* \qquad (3.8.9)$$

– середнє значення загальної кількості років, прожитих у проміжку $(x, x+1]$ усіма представниками даної групи з l_0 новонароджених. Тоді, комбінуючи формули (3.8.7) і (3.8.8), маємо

$$a(x) = \frac{MS_x}{d_x} = \frac{MS_x^* - ML(x+1)}{d_x} = \frac{L_x - l_{x+1}}{d_x}.$$

Зазначимо, що за допомогою табличної величини L_x можна також обчислити $T_x = M\sigma_x$ – середнє значення загальної кількості років, прожитих представниками даної групи з l_0 новонароджених після віку x років (див. §2.4). Дійсно, згідно з означенням

$$\sigma_x = \sum_{k=0}^{\infty} S_{x+k}^*.$$

Тому

$$M\sigma_x = \sum_{k=0}^{\infty} MS_{x+k}^*,$$

і внаслідок рівності (3.8.9)

$$T_x = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k}.$$

3.10 Приклади розрахунків

Приклад 1. Припустимо, що $q_{70} = 0.04$, а $q_{71} = 0.05$. Обчислити ймовірність того, що людина у віці 70 років помре у віковому проміжку $(70.5, 71.5]$ за умови припущення Балдуччі, а також за умови рівномірного розподілу смертей.

Розв'язання. Шукана ймовірність – ${}_{0.5|}q_{70} = P\{1/2 < T(70) < 1.5\}$. За формулою (2.2.6)

$${}_{0.5|}q_{70} = \frac{s(70.5) - s(71.5)}{s(70)}.$$

Обчислення $s(70.5)$ і $s(71.5)$ залежить від припущення про модель тривалості життя для дробового віку.

Припущення Балдуччі. За формулою (3.7.1)

$$s(70.5) = \frac{s(71)}{p_{70} + 0.5q_{70}} = \frac{s(71)}{0.96 + 0.02} = \frac{s(71)}{0.98}$$

і

$$s(71.5) = \frac{s(72)}{p_{71} + 0.5q_{71}} = \frac{s(72)}{0.95 + 0.025} = \frac{s(72)}{0.975}.$$

Таким чином,

$$_{0.5|}q_{70} = \frac{s(71)/0.98 - s(72)/0.975}{s(70)} =$$

$$= p_{70}/0.98 - p_{71}p_{70}/0.975 =$$

$$= 0.96/0.98 - 0.95/0.975 = 0.0442.$$

Припущення про рівномірний розподіл смертей. За формулою (3.5.2)

$$s(70.5) = 0.5s(70) + 0.5s(71)$$

і

$$s(71.5) = 0.5s(71) + 0.5s(72).$$

Тому

$$_{0.5|}q_{70} = 0.5\frac{s(70) + s(71) - s(71) - s(72)}{s(70)} =$$

$$= 0.5\left[1 - \frac{s(72)}{s(70)}\right] = 0.5[1 - p_{71}p_{70}] =$$

$$= 0.5[1 - 0.95 \cdot 0.96] = 0.044.$$

Приклад 2. Довести, що за умови припущення про рівномірний розподіл смертей середня залишкова тривалість життя e_x^o людини у віці x років (x – натуральне число) і середня округлена тривалість життя e_x такої людини пов'язані рівністю

$$e_x^o = e_x + 0.5.$$

Розв'язання. Через τ_x позначимо дробову частину тривалості життя людини у віці x років. Зрозуміло, що $T(x) = K(x) + \tau_x$. Тоді за означеннями (див. §3.3 і §2.3)

$$e_x^o = MT(x) = MK(x) + M\tau_x = e_x + M\tau_x.$$

Так само, як і в §3.5, доводиться, що за умови припущення про рівномірний розподіл смертей величина τ_x розподілена рівномірно на відрізку $[0, 1]$ і тому $M\tau_x = 0.5$.

Розділ 4

Аналіз моделей короткотермінового страхування життя

Моделі страхування життя умовно поділяють на дві великі групи залежно від того, чи береться до уваги зміна вартості грошей з плином часу, чи ні.

Факт зміни вартості грошей з плином часу добре відомий. Найголовнішими чинниками зміни вартості грошей є інфляція і прибуток від вкладення капіталу.

На короткому проміжку часу зміною вартості грошей можна знехтувати. Тому моделі тривалості життя, які не враховують зміни вартості грошей з плином часу, називають моделями короткотермінового страхування життя. Зазвичай як невеликий проміжок часу розглядають один рік.

В іншому випадку, коли беруть до уваги зміну вартості грошей з плином часу, мова йде про довготермінові моделі страхування життя.

4.1 Аналіз індивідуальних позовів при короткотерміновому страхуванні життя

1. Найпростіший вид страхування життя. У цьому виді страхування особа, яка бажає застрахуватися, сплачує страховій компанії страховий внесок, який називається *страховою премією*, у розмірі p. У свою чергу компанія зобов'язується сплатити спадкоємцям застрахованого *страхову виплату* розміром b у випадку смерті застрахованого протягом року. У протилежному випадку компанія не сплачує нічого.

Зрозуміло, що величина страхової виплати b повинна бути набагато більшою за величину страхової премії p: $b >> p$. Саме знаходження правильного співвідношення між величинами b і p є однією з найголовніших задач актуарної математики.

Отже, особа, яка бажає застрахуватися, купує страховий поліс, сплативши компанії страхову премію p, і деякою мірою уникає ризику фінансових втрат, який пов'язаний для неї з непередбачуваністю моменту її смерті. Після укладання договору страхування цей ризик бере на себе страхова компанія. Для компанії ризиком є випадковість моменту позову, який може бути їй висунутий спадкоємцями застрахованого. А саме – цей позов дорівнює нулю, якщо особа лишиться живою протягом року, і дорівнює b, якщо застрахована особа помре протягом року.

Цей позов називається *індивідуальним позовом.* Він є елементарною складовою частиною фінансового ризику компанії. Тому вивчення фінансової діяльності компанії повинно починатися з вивчення індивідуального позову.

Природно вважати індивідуальний ризик випадковою величиною. Найважливішою характеристикою будь-якої дискретної випадкової величини є її розподіл. Згідно з означенням індивідуальний позов ξ за умов найпростішого виду страхування має такий розподіл:

ξ :

i	0	b
π_i	p_x	q_x

У цій таблиці $i = 0, b$ – значення, яких набуває випадкова величина ξ, π_i – імовірність того, що вона набуває значення i, x – вік застрахованого на момент укладання договору, $p_x = P\{T(x) > 1\}$ – імовірність того, що людина у віці x років проживе ще щонайменше рік, $q_x = P\{T(x) \leq 1\}$ – імовірність смерті людини у віці x років протягом року.

Найважливішими числовими характеристиками будь-якої випадкової величини є її математичне сподівання $M\xi$ і дисперсія $D\xi$.

Середнє значення індивідуального позову ξ дорівнює

$$M\xi = 0 \cdot p_x + b \cdot q_x = b \cdot q_x, \tag{4.1.1}$$

а її дисперсія –

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 0^2 \cdot p_x + b^2 \cdot q_x - (b \cdot q_x)^2 = b^2 \cdot q_x - b^2 \cdot q_x^2 = b^2 \cdot q_x \cdot p_x. \tag{4.1.2}$$

Розглянемо випадкову величину ε, що характеризує *прибуток* страхової компанії від укладання договору короткотермінового страхування життя:

$$\varepsilon := p - \xi, \tag{4.1.3}$$

де p – страхова премія; ξ – індивідуальний позов.

З цього означення випливає, що величина доходу ε компанії від укладання договору короткотермінового страхування має такий розподіл:

ε :

p	$-(b-p)$
p_x	q_x

Ўнакше кажучи, компанія має прибуток p з імовірністю p_x і зазнає збитку $b - p$ з імовірністю q_x.

Обчислимо середній прибуток компанії (тобто $M\varepsilon$):

$$M\varepsilon = p \cdot p_x + (p - b)q_x = p(p_x + q_x) - b \cdot q_x = p - bq_x. \tag{4.1.4}$$

Ця формула дозволяє зробити найпростіші висновки про величину страхової премії p. Для цього зауважимо, що для існування компанії необхідно, щоб її прибуток був невід'ємним, тобто $p \geq bq_x$.

Означення 4.1.1 Мінімальне значення $p = p_0$, що задовольняє умову $p \geq bq_x$, дорівнює
$$p_0 = bq_x$$
і має назву *нетто-премія.* З огляду на формулу (4.1.4) нетто-премія – це такий розмір страхової премії, при якому середній прибуток компанії дорівнює нулю.

Звичайно, реальна страхова премія повинна бути більшою за нетто-премію для того, щоб компенсувати витрати компанії, забезпечити прибуток і, найголовніше, – забезпечити малу ймовірність розорення компанії. Умова нерозорення компанії важлива перш за все для її клієнтів, тому що ця умова означає можливість компанії виконати свої зобов'язання перед ними. Таким чином, помірне збільшення плати за страховку відповідає інтересам самих клієнтів.

Означення 4.1.2 Різниця $p - p_0$ між страховою премією p і нетто-премією p_0 називається *страховою надбавкою.*

Відносною страховою надбавкою Θ називається величина
$$\Theta = \frac{p - p_0}{p_0}.$$

Основне питання, яке виникає у зв'язку з цим, – наскільки треба збільшувати страхову премію по відношенню до нетто-премії? Це питання буде обговорюватися в наступних розділах.

2. Більш складні моделі короткотермінового страхування життя. Зазначимо, що в розглянутій щойно моделі страхування страхова виплата, якщо вона сплачується, є величиною постійною (вона визначається умовою договору і дорівнює b). У більш складних моделях страхування розмір страхової виплати може набувати кількох значень. Наведемо приклад такого договору.

Нехай за умовою договору компанія сплачує спадкоємцям застрахованого суму b_1 у випадку його смерті протягом року з природних причин і суму b_2 у випадку смерті застрахованого протягом року внаслідок нещасного випадку. Якщо ж застрахований залишився живим протягом року, то компанія не сплачує нічого.

Знайдемо розмір нетто-премії за умов такого договору. Припустимо, що тривалість життя описується за допомогою моделі Мейкхама (див. §1.5). Нагадаємо, що в цій моделі інтенсивність смертності задається формулою
$$\mu_x = A + Be^{\alpha x}.$$
Ця модель є найбільш зручною для розв'язання поставленої задачі, тому що в ній A характеризує ймовірність смерті застрахованого протягом року внаслідок нещасного випадку (ця ймовірність практично не залежіть від віку), а $Be^{\alpha x}$ – імовірність смерті протягом року з природних причин особи віком x років.

Обчислимо спочатку середній розмір $M\varepsilon$ прибутку $\varepsilon = p - \xi$, де p – страхова премія, а ξ – індивідуальний позов. Для цього знайдемо розподіл величини ξ.

За умови договору ξ набуває трьох значень: b_1, b_2 і 0. У моделі Мейкхама

$$P\{\xi = b_1\} = Be^{\alpha x}, \quad P\{\xi = b_2\} = A.$$

Тому

$$P\{\xi = 0\} = 1 - A - Be^{\alpha x}.$$

Таким чином,

$$M\xi = b_1 \cdot P\{\xi = b_1\} + b_2 \cdot P\{\xi = b_2\} + 0 \cdot P\{\xi = 0\} = b_1 \cdot Be^{\alpha x} + b_2 \cdot A.$$

За означенням нетто-премія задовольняє умову $M\varepsilon = 0$, тобто $p - M\xi = 0$. Розв'язуючи це рівняння (відносно p), отримуємо

$$p_0 = b_1 \cdot Be^{\alpha x} + b_2 \cdot A$$

– розмір нетто-премії p_0.

4.2 Методи точного розрахунку характеристик підсумкового ризику

У своїй роботі страхова компанія укладає велику сукупність договорів. Тому для неї важливим є не окремий індивідуальний позов і сплата страхової виплати за цим позовом, а загальна сума S виплат застрахованим за всіма індивідуальними позовами. Нехай компанія уклала N договорів страхування, а ξ_k, $k \in \{1, 2, ..., N\}$, – індивідуальні позови за цими договорами. Тоді

$$S = \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Означення 4.2.1 Будемо називати цю суму S підсумковим ризиком.

Якщо підсумковий ризик S не перевищує капіталу компанії u, то компанія успішно виконає свої зобов'язання перед клієнтами. Якщо ж $S > u$, то компанія не зможе сплатити страхові виплати за всіма індивідуальними позовами. У цьому випадку мова йде про розорення компанії. Таким чином, імовірність розорення R компанії можна описати формулою

$$R = P\{S > u\}, \tag{4.2.1}$$

тобто ймовірність розорення компанії R дорівнює значенню додаткової функції розподілу підсумкового ризику в точці u, де u – капітал компанії. Відповідно ймовірність нерозорення компанії дорівнює $P\{S \le u\}$, тобто значенню функції розподілу підсумкового ризику в точці u.

Розрахунок цих імовірностей має першочергове значення для компанії тому, що на основі цих розрахунків компанія ухвалює найважливіші рішення.

Припустимо, що індивідуальні позови ξ_k є незалежними величинами. Тоді розподіл підсумкового ризику можна обчислити за допомогою відомих з теорії ймовірностей методів.

Метод згорток. Як відомо з теорії ймовірностей, якщо величини ξ_1 і ξ_2 з функціями розподілу F_1 і F_1 незалежні, то функція розподілу F їх суми $\xi_1 + \xi_1$ є згорткою функцій F_1 і F_1, тобто

$$F(x) = F_1 * F_2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-t)dF_2(t). \tag{4.2.2}$$

Застосовуючи цю формулу кілька разів, можна обчислити розподіл суми будь-якого числа незалежних випадкових величин.

У випадку, коли незалежні величини ξ_1 і ξ_2 абсолютно неперервні зі щільностями $p_1(x)$ і $p_2(x)$, щільність $p(x)$ суми $\xi_1 + \xi_1$ також є згорткою функцій p_1 і p_2, тобто

$$p(x) = p_1 * p_2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x-t)p_2(t)dt. \tag{4.2.3}$$

Зауваження. Якщо величини ξ_1 і ξ_2 невід'ємні, то неважко бачити, що нижньою і верхньою межами інтегрування у формулах (4.2.2) і (4.2.3) будуть відповідно 0 і x .

Дискретним аналогом формули (4.2.3) є така рівність:

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = x\} = \sum_t P\{\xi_1 = x - t\}P\{\xi_2 = t\}, \tag{4.2.4}$$

де сума береться за множиною всіх можливих значень t випадкової величини ξ_2, а x набуває всіх можливих значень випадкової величини $\xi_1 + \xi_2$.

Для нас найбільш важливими є невід'ємні цілочислові випадкові величини (індивідуальні позови саме такі величини). У цьому випадку формула (4.2.4) набуває вигляду

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = n\} = \sum_{k=0}^{n} P\{\xi_1 = n - k\}P\{\xi_2 = k\}. \tag{4.2.5}$$

Нехай $p_1(i) = P\{\xi_1 = i\}$, $p_2(j) = P\{\xi_2 = j\}$. Для практичного застосування формули (4.2.5) зручно утворити таку матрицю:

$$\begin{array}{ccccc}
 & p_2(0) & p_2(1) & p_2(2) & \ldots \\
p_1(0) & p_1(0)p_2(0) & p_1(0)p_2(1) & p_1(0)p_2(2) & \ldots \\
p_1(1) & p_1(1)p_2(0) & p_1(1)p_2(1) & p_1(1)p_2(2) & \ldots \\
p_1(2) & p_1(2)p_2(0) & p_1(2)p_2(1) & p_1(2)p_2(2) & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{4.2.6}$$

Тоді вздовж ліній $i + j = n$, паралельних головній діагоналі, стоятимуть доданки суми

$$p_1(n)p_1(0) + p_1(n-1)p_1(1) + \ldots + p_1(0)p_1(n),$$

яка згідно з формулою (4.2.5) дорівнює ймовірності $P\{\xi_1+\xi_2=n\}$.

Приклад 1. Нехай компанія уклала 4 договори короткотермінового страхування за таких умов: якщо застрахований помер протягом року від нещасного випадку, то його спадкоємцям сплачується сума в 5.000 дол., а у випадку смерті застрахованого протягом року з природних причин – 2.500 дол.; у разі, якщо застрахований лишився живим протягом року, компанія не сплачує нічого.

Нехай імовірність смерті з природних причин дорівнює 0.1 і така ж ймовірність смерті від нещасного випадку.

Знайти функцію розподілу підсумкового ризику.

Розв'язання. Нехай $S=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4$, де ξ_k – індивідуальні позови. Для спрощення розрахунків візьмемо 2.500 дол. за одиницю. За умовою кожний з індивідуальних позовів ξ_k має такий розподіл:

ξ_k : (4.2.7)

0	1	2
0.8	0.1	0.1

Для того щоб знайти розподіл S знайдемо спочатку розподіл $\xi_1+\xi_2$. Для цього утворимо таблицю вигляду (4.2.6):

	0.8	0.1	0.1
0.8	0.64	0.08	0.08
0.1	0.08	0.01	0.01
0.1	0.08	0.01	0.01

Підсумовуючи доданки вздовж ліній $i+j=k$, $k=0,1,2,3,4$, паралельних головній діагоналі, обчислюємо ймовірності $q(n)=P\{\xi_1+\xi_2=n\}$:

n	0	1	2	3	4
$q(n)$	0.64	0.16	0.17	0.02	0.01

Далі знайдемо розподіл суми $\xi_1+\xi_2+\xi_3$. Для цього знову утворимо таблицю вигляду (4.2.6) з елементами $p_3(i)\cdot q(j)$:

	0.64	0.16	0.17	0.02	0.01
0.8	0.512	0.128	0.136	0.016	0.008
0.1	0.064	0.016	0.017	0.002	0.001
0.1	0.064	0.016	0.017	0.002	0.001

Підсумовуючи доданки вздовж ліній $i+j=k$, $k=0,1,..,6$, паралельних головній діагоналі, обчислюємо ймовірності $r(n)=P\{\xi_1+\xi_2+\xi_3=n\}$:

n	0	1	2	3	4	5	6
$r(n)$	0.512	0.192	0.216	0.049	0.027	0.003	0.001

І тепер для обчислення розподілу підсумкового ризику S утворимо таблицю вигляду (4.2.6) з елементами $p_4(i)\cdot r(j)$:

	0.512	0.192	0.216	0.049	0.027	0.003	0.001
0.8	0.4096	0.1536	0.1728	0.0392	0.0216	0.0024	0.0008
0.1	0.0512	0.0192	0.0216	0.0049	0.0027	0.0003	0.0001
0.1	0.0512	0.0192	0.0216	0.0049	0.0027	0.0003	0.0001

Підсумовуючи доданки вздовж ліній $i + j = k$, $k = 0, 1, .., 8$, обчислюємо розподіл підсумкового ризику S:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s(n)$	0.4096	0.2048	0.2432	0.0800	0.0481	0.0100	0.0038	0.0004	0.0001

Тепер вже неважко отримати функцію розподілу підсумкового ризику $F(n) = P\{S \leq n\}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(n)$	0.4096	0.6144	0.8576	0.9376	0.9857	0.9957	0.9995	0.9999	1

Нагадаємо, що $F(n)$ – це ймовірність нерозорення компанії, якщо її капітал дорівнює n.

Приклад 2. За умов попереднього прикладу обчислити:

1) розмір нетто-премії;

2) імовірність нерозорення компанії, якщо розмір страхової премії буде дорівнювати нетто-премії;

3) розмір страхової премії, за якої ймовірність розорення не перевищуватиме 0.1.

Розв'язання. 1. Згідно з означенням нетто-премія відповідає середньому прибутку компанії, що дорівнює нулю. Прибуток компанії $\varepsilon = 4p - S = 4p - \sum_k \xi_k$. Тому середній прибуток $M\varepsilon = 4p - \sum_k M\xi_k$. Таким чином, для нетто-премії p_0 маємо рівняння $4(p - M\xi_k) = 0$. Звідси $p_0 = M\xi_k = 0 \cdot 0.8 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 = 0.3$.

2. Якщо розмір премії p буде дорівнювати нетто-премії p_0, то капітал компанії складатиме $u = 4 \cdot 0.3 = 1.2$. Тоді ймовірність нерозорення компанії дорівнюватиме $F(1.2) = F(1) = 0.6144$.

Звичайно, це недопустимо мала ймовірність нерозорення.

3. За допомогою таблиці функції розподілу $F(n)$ бачимо, що $1 - F(n) \leq 0.1$ при $n \geq 3$. Тому ймовірність нерозорення не перевищує 0.1, якщо компанія має капітал $u = 3$. Тоді розмір нетто-премії p буде складати $p = 3/4$ одиниці, тобто $p = 0.75 \cdot 2500$ дол. $= 1875$ дол. Звісно, це занадто велика страхова премія. Але це пов'язано з малою кількістю договорів.

Іншим методом точного обчислення розподілу суми незалежних випадкових величин, відомим з теорії ймовірностей, є метод, що базується на застосуванні твірних функцій.

Метод твірних функцій

Означення 4.2.2 Нехай дискретна випадкова величина ξ набуває невід'ємних цілочислових значень. Твірна функція $\varphi_\xi(z)$ випадкової величини ξ визначається рівністю

$$\varphi_\xi(z) := Mz^\xi, \tag{4.2.8}$$

де z – довільне комплексне число.

Згідно з формулою для обчислення математичного сподівання дискретної випадкової величини, маємо

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n, \tag{4.2.9}$$

де $p(n) = P\{\xi = n\}$.

Основні властивості твірних функцій

Твердження 4.2.1 *Твірна функція $\varphi_\xi(z)$ випадкової величини ξ аналітична в одиничному крузі $|z| < 1$.*

Доведення. За основною властивістю будь-якого розподілу $\sum_n p_n = 1$. Це означає, що степеневий ряд $\sum_n p_n z^n$ збігається в точці $z = 1$. Тоді за теоремою Абеля цей ряд збігається в одиничному крузі $|z| < 1$ і за теоремою про диференційовність суми степеневого ряду його сума є аналітичною в цьому крузі функцією.

Твердження 4.2.2 *Розподіл випадкової величини ξ однозначно відновлюється за твірною функцією $\varphi_\xi(z)$. Зокрема, якщо твірні функції випадкових величин збігаються, то їх розподіли однакові.*

Доведення. Розгорнемо твірну функцію в ряд Тейлора в околі нуля:

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Як відомо, таке розвинення в ряд єдине і $c_n = \varphi_\xi^{(n)}(0)/n!$ Тому $p_n = P\{\xi = n\} = \varphi_\xi^{(n)}(0)/n!$

Твердження 4.2.3 *Якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні, то твірна функція їх суми $\xi_1 + \xi_2$ дорівнює добутку їх твірних функцій.*

Доведення. Оскільки математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань, то

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(z) = Mz^{\xi_1+\xi_2} = Mz^{\xi_1} \cdot z^{\xi_2} = Mz^{\xi_1} \cdot Mz^{\xi_2} = \varphi_{\xi_1}(z) \cdot \varphi_{\xi_2}(z).$$

Означення 4.2.3 Нехай k – натуральне число. k-м факторіальним моментом випадкової величини ξ називається математичне сподівання

$$M\xi(\xi - 1)(\xi - 2)\dots(\xi - k + 1).$$

Твердження 4.2.4 *Якщо k-й факторіальний момент випадкової величини ξ існує, то існує лівобічна похідна k-го порядку $\varphi_\xi^{(k)}(1 - 0)$ і*

$$\varphi_\xi^{(k)}(1 - 0) = M\xi(\xi - 1)(\xi - 2)\dots(\xi - k + 1).$$

Зокрема,

$$M\xi = \varphi'_\xi(1 - 0), \quad M\xi^2 = \varphi''_\xi(1 - 0) + \varphi'_\xi(1 - 0).$$

Доведення базується на відомій із ТФКЗ 2-й теоремі Абеля.

Теорема 4.2.5 *Якщо степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *збігається в деякій граничній точці* z_0 *круга збіжності, то його сума* $s(z)$ *неперервна вздовж радіуса* $0z_0$, *тобто* $\lim_{z\to z_0} s(z) = s(z_0)$, *якщо точка* z *збігається до точки* z_0 *уздовж радіуса* $0z_0$.

Доведення твердження 4.2.4. За формулою (4.2.9) $\varphi_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n$, де $p(n) = P\{\xi = n\}$, причому останній ряд збігається в крузі $|z| < 1$ унаслідок твердження 4.2.1. Згідно з теоремою про диференційовність суми степеневого ряду

$$\varphi_\xi^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)p(n)z^n, \tag{4.2.10}$$

якщо $|z| < 1$. За умовою існує k-й факторіальний момент

$$M\xi(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-k+1) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)p(n).$$

Це означає, що степеневий ряд (4.2.10) збігається в точці $z = 1$. Тоді за теоремою 4.2.5 функція $\varphi_\xi^{(k)}(z)$ неперервна зліва в точці $z = 1$, тобто

$$\lim_{z\to 1-0} \varphi_\xi^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)p(n) = M\xi(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-k+1).$$

Зокрема,

$$\varphi_\xi'(1-0) = M\xi, \quad \varphi_\xi''(1-0) = M\xi^2 - M\xi.$$

Звідси

$$M\xi^2 = \varphi_\xi''(1-0) + \varphi_\xi'(1-0).$$

Обчислення розподілу підсумкового ризику компанії базується на властивостях твірних функцій, наведених у твердженнях 4.2.2 і 4.2.3.

Спочатку обчислюється твірна функція φ_{ξ_k} індивідуального позову ξ_k за формулою (4.2.9). Згідно з цією формулою φ_{ξ_k} – багаточлен, оскільки індивідуальний позов набуває скінченного числа значень.

Потім із використанням твердження 4.2.3 і з огляду на незалежність випадкових величин ξ_k обчислюється твірна функція підсумкового ризику $S = \sum_k \xi_k$:

$$\varphi_S(z) = \prod_k \varphi_{\xi_k}.$$

Таким чином, $\varphi_S(z)$ також є деяким багаточленом

$$\varphi_S(z) = \sum_n s(n)z^n,$$

а саме – добутком багаточленів φ_{ξ_k} (ці багаточлени однакові, якщо індивідуальні позови однаково розподілені).

Нарешті, за допомогою твірної функції $\varphi_S(z)$ знаходимо розподіл підсумкового ризику. Згідно з твердженням 4.2.2

$$P\{S = n\} = s(n),$$

тобто ймовірність $P\{S = n\}$ є коефіцієнтом багаточлена $\varphi_S(z)$ при z^n.

Приклад 3. За умов прикладу 1 обчислити розподіл підсумкового ризику S методом твірних функцій.

Розв'язання. За умовою всі індивідуальні позови ξ_k мають однаковий розподіл

ξ_k :

0	1	2
0.8	0.1	0.1

Тому всі вони мають одну твірну функцію

$$\varphi_{\xi_k}(z) = 0.8 \cdot z^0 + 0.1 \cdot z^1 + 0.1 \cdot z^2 = 0.1(8 + z + z^2).$$

Користуючись твердженням 4.2.3, знаходимо твірну функцію підсумкового ризику S:

$$\varphi_S(z) = \varphi_{\xi_k}^4(z) = (0.1)^4(8 + z + z^2)^4 = 10^{-4}(64 + 16z + 17z^2 + 2z^3 + z^4)^2 =$$

$$= 10^{-4}(4096 + 2048z + 2432z^2 + 800z^3 + 481z^4 + 100z^5 + 38z^6 + 4z^7 + z^8).$$

Записавши коефіцієнти $s(n)$ при z^n під відповідними значеннями степеня n, отримаємо розподіл підсумкового ризику ($s(n) = P\{S = n\}$):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s(n)$	0.4096	0.2048	0.2432	0.0800	0.0481	0.0100	0.0038	0.0004	0.0001

Таку ж таблицю було отримано раніше методом згорток.

4.3 Методи наближеного розрахунку характеристик підсумкового ризику

Кількість застрахованих у страховій компанії зазвичай дуже велике. Тому виникає необхідність розрахунку розподілу суми великої кількості доданків. Зрозуміло, що ручні методи розрахунків за допомогою згорток або твірних функцій, які було розглянуто в попередньому параграфі, для цього непридатні. Розрахунки за допомогою цих методів із застосуванням ЕОМ теж можуть викликати проблеми, пов'язані з малими ймовірностями значень, що набуває сума великої кількості доданків.

Отже, точний розрахунок характеристик підсумкового ризику суми великої кількості доданків практично неможливий. У цій ситуації на допомогу приходять граничні теореми теорії ймовірностей. Зміст цих теорем полягає в тому, що за деяких досить загальних умов функція розподілу суми S_N N

незалежних випадкових величин при $N \to \infty$ збігається до функції розподілу деякої конкретної випадкової величини. Це дає змогу замість функції розподілу суми S_N, яку важко обчислити, застосовувати цю конкретну функцію розподілу для розв'язання практичних задач. При цьому похибка від такої заміни досить мала і задовольняє практичні вимоги щодо точності обчислень.

З теорії ймовірностей відомі дві основні граничні теореми такого типу. Це теорема Пуассона і центральна гранична теорема. Розглянемо методи наближеного розрахунку характеристик підсумкового ризику, які базуються на використанні цих теорем.

Метод Пуассона. Цей метод базується на теоремі Пуассона.

Теорема 4.3.1 *Нехай випадкові величини (індивідуальні позови) ξ_k незалежні й набувають тільки двох значень 0 і 1 з імовірностями*

$$p = P\{\xi_k = 0\}, \quad q = P\{\xi_k = 1\}.$$

Якщо $N \to \infty$, а $q \to 0$ так, що $Nq \to \lambda$, де $\lambda > 0$, то виконується така гранична рівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi_1 + \xi_2 \ldots + \xi_N = k\} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Зауваження. Сенс умови $q \to 0$ з погляду актуарної математики полягає в тому, що частка позовів, які набули значення 1, тобто частка осіб, які померли протягом року, серед усіх застрахованих у страховій компанії є малою.

Означення 4.3.1 Випадкова величина ξ, яка набуває значення $k = 0, 1, 2, \ldots$ з ймовірностями

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

називається розподіленою за законом Пуассона з параметром λ.

Ми будемо використовувати такі властивості розподілу Пуассона.

Твердження 4.3.2 *Нехай випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона з параметром λ. Тоді*

$$M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda.$$

Твердження 4.3.3 *Сума двох незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2, які розподілені за законом Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.*

Найпростіше доведення цих тверджень базується на застосуванні твірних функцій.

Доведення твердження 4.3.2. Обчислимо твірну функцію φ випадкової величини ξ за формулою (4.2.9):

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}z^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{\lambda z - \lambda}. \tag{4.3.1}$$

Тому
$$\varphi'(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)}, \quad \varphi''(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}$$
і за твердженням 4.2.4 маємо
$$M\xi = \varphi'(1) = \lambda, \quad M\xi^2 = \varphi''(1) + \varphi'(1) = \lambda^2 + \lambda,$$
$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Доведення твердження 4.3.3. Застосовуючи твердження 4.2.3 і формулу (4.3.1), обчислюємо твірну функцію суми $\xi_1 + \xi_2$:
$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(z) = \varphi_{\xi_1}(z)\varphi_{\xi_2}(z) = e^{\lambda_1 z - \lambda_1} e^{\lambda_2 z - \lambda_2} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)z - (\lambda_1+\lambda_2)}.$$
Але згідно з формулою (4.3.1) це є твірна функція розподілу Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Тому внаслідок твердження 4.2.2 випадкова величина $\xi_1 + \xi_2$ розподілена саме за законом Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Для різних характеристик розподілу Пуассона з метою їх практичних застосувань складені таблиці. Для застосування в актуарній математиці найважливішими є таблиці квантилів.

Означення 4.3.2 Квантилем рівня α випадкової величини ξ називається найменше число x_α, яке задовольняє умову
$$P\{\xi \le x_\alpha\} \ge \alpha.$$

Нижче наведена таблиця квантилів рівня $\alpha = 0.95$ розподілу Пуассона.

λ	$x_{0.95}$	$P\{\xi \le x_{0.95}\}$
0.7	2	0.9659
0.8	2	0.9626
0.9	3	0.9885
1	3	0.9810
2	5	0.9834
3	5	0.9665
4	8	0.9786
5	9	0.9682
6	10	0.9574
7	12	0.9730
8	13	0.9658
9	14	0.9585
10	15	0.9513

Приклад 1. У компанії застраховано $N = 3000$ осіб у віці $x = 38$ років за умов найпростішого виду страхування (див. §4.1). Розмір страхової виплати b, призначений компанією, дорівнює 2.500 дол.

1. Якою повинна бути страхова премія p, щоб ймовірність розорення компанії не перевищувала 5% ?

2. Обчислити нетто-премію p_0, страхову надбавку і відносну страхову надбавку Θ (див. означення 4.1.1 і 4.1.2).

Розв'язання. 1. Використовуючи таблиці тривалості життя, знайдемо ймовірність смерті q_x протягом року особи у віці $x = 38$ років: $q = q_x = 0.002984$.

Оскільки N досить велике, а q досить мале, то застосування теореми Пуассона даватиме хороші результати щодо точності наближення функції розподілу підсумкового ризику.

Візьмемо $b = 2.500$ дол. за одиницю (у теоремі Пуассона за одиницю взято величину страхового позову, тобто страхову виплату). Тоді згідно з теоремою Пуассона розподіл підсумкового ризику можна замінити розподілом Пуассона з параметром $\lambda = Nq = 3000 \cdot 0.002984 \approx 9$. Тому ймовірність $P\{\sum_{k=1}^{N} \xi_k \leq u\}$ наближено дорівнює ймовірності $P\{\xi \leq u\}$, де ξ – випадкова величина, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 9$.

За умовою ймовірність нерозорення компанії повинна бути не меншою за 95%. Це означає з огляду на формулу (4.2.1), що капітал компанії u повинен задовольняти умову

$$P\left\{\sum_{k=1}^{N} \xi_k \leq u\right\} \geq 0.95.$$

Цю умову згідно з теоремою Пуассона можна наближено замінити умовою

$$P\{\xi \leq u\} \geq 0.95.$$

Таким чином, за означенням 4.3.2 капітал компанії u дорівнює квантилю рівня 0.95 розподілу Пуассона з параметром $\lambda = 9$. Користуючись таблицею квантилів рівня 0.95 розподілу Пуассона, маємо

$$u = x_{0.95} = 14 \tag{4.3.2}$$

(нагадаємо, що за одиницю ми взяли 2.500 дол.). Тому страхова премія p становитиме

$$p = \frac{u}{N} = \frac{14}{3000}\,, \tag{4.3.3}$$

тобто

$$p = \frac{14}{3000} 2.500\ . \ \approx 11.67\ .$$

2. За означенням величина нетто-премії p_0 відповідає середньому прибутку компанії, що дорівнює нулю. Середній прибуток компанії складає $M\varepsilon = N(p - M\xi_k)$. Тому $p_0 = M\xi_k = (0 \cdot p_x + 2.500 \cdot q_x)$ дол. $= 7.5$ дол., розмір страхової надбавки $p - p_0 = (11.67 - 7.5)$ дол. $= 4.17$ дол., а відносна страхова надбавка складає

$$\Theta = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{4.17}{7.5} = 0.556,$$

тобто 55.6%.

Повторюючи міркування, за допомогою яких було отримано формули (4.3.2) і (4.3.3), дійдемо до висновку, що в загальному випадку формула для страхової виплати p, яка забезпечує компанії ймовірність нерозорення α, має такий вигляд:

$$p = \frac{x_\alpha}{N}, \tag{4.3.4}$$

де x_α – квантиль рівня α розподілу Пуассона; N – кількість застрахованих у компанії за умов найпростішого виду страхування.

Зауваження. 1. Метод, що базується на теоремі Пуассона, можна застосовувати і в більш загальній ситуації.

Якщо портфель компанії (тобто сукупність усіх договорів) складається з різнорідних договорів, які відрізняються, наприклад, імовірністю позовів, то їх спочатку треба згрупувати в однорідні (але достатньо великі) групи і до кожної з них застосувати теорему Пуассона, замінивши підсумкові розподіли в кожній з цих груп відповідним розподілом Пуассона. Потім, зважаючи на те, що сума незалежних випадкових величин, розподілених за законом Пуассона, також розподілена за законом Пуассона (твердження 4.3.3), замінити розподіл підсумкового ризику цим підсумковим розподілом Пуассона.

Якщо індивідуальний позов набуває кількох значень, то величина підсумкового ризику матиме поліноміальний розподіл, який у свою чергу може бути замінений багатовимірним розподілом Пуассона.

2. Недоліком методу Пуассона є те, що формула (4.3.4) для страхової виплати, яка забезпечує задану ймовірність нерозорення компанії, не містить у явному вигляді розміру нетто-премії.

Метод Гаусса. Цей метод базується на центральній граничній теоремі. Наведемо найпростіший варіант цієї теореми.

Теорема 4.3.4 *Нехай випадкові величини ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ незалежні, однаково розподілені й мають скінченні математичні сподівання і дисперсію; $S_N := \sum_{k=1}^{N} \xi_k$,*

$$S_N^* := \frac{S_N - MS_N}{\sqrt{DS_N}}.$$

Тоді для функції розподілу $F_{S_N^*}$ нормованої суми S_N^* у будь-якій точці $x \in (-\infty, \infty)$ справедлива така гранична рівність:

$$\lim_{N\to\infty} F_{S_N^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt =: F(x),$$

де $F(x)$ – функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини з параметрами 0 і 1.

Для функції $F(x)$ нормального розподілу з параметрами 0 і 1 складені таблиці, які використовуються при застосуваннях центральної граничної теореми.

Існує велика кількість різноманітних узагальнень цієї теореми. Але зміст будь-якого варіанта центральної граничної теореми полягає в тому, що нормована сума S_N^* великої кількості незалежних випадкових величин при досить загальних умовах має розподіл, близький до нормального з параметрами 0 і 1. Саме цей факт є важливим для застосування центральної граничної теореми.

Розглянемо схему застосування центральної граничної теореми для обчислення розміру страхової премії p, яка забезпечує задану ймовірність нерозорення компанії α.

Нехай у компанії застраховано N осіб у віці x років за умов найпростішого виду страхування (див. §4.1). Згідно з означенням індивідуальний позов ξ за умов цього виду страхування має такий розподіл:

$$\xi: \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & b \\ \hline p_x & q_x \\ \hline \end{array}$$

Як і раніше $p_x = P\{T(x) > 1\}$ – ймовірність того, що людина у віці x років проживе ще щонайменше рік, $q_x = P\{T(x) \le 1\}$ – імовірність смерті людини у віці x років протягом року.

Якщо S_N – підсумковий ризик, то

$$MS_N = NM\xi_k = Nbq_x,$$

а оскільки величини ξ_k незалежні, то

$$DS_N = ND\xi_k = N(M\xi_k^2 - (M\xi_k)^2) = N(b^2 q_x - (bq_x)^2) = Nb^2 q_x p_x.$$

Якщо p – необхідна страхова премія, то капітал компанії дорівнює Np, а ймовірність нерозорення – $P\{S_N \le Np\}$. Застосовуючи центральну граничну теорему, матимемо

$$\alpha = P\{S_N \le Np\} = P\left\{\frac{S_N - MS_N}{\sqrt{DS_N}} \le \frac{Np - MS_N}{\sqrt{DS_N}}\right\} =$$

$$= F_{S_N^*}\left(\frac{Np - MS_N}{\sqrt{DS_N}}\right) \approx F\left(\frac{Np - Nbq_x}{\sqrt{Nb^2 q_x p_x}}\right) = F\left(\sqrt{N}\,\frac{p - bq_x}{b\sqrt{q_x p_x}}\right).$$

Звідси отримуємо рівняння

$$\sqrt{N}\,\frac{p - bq_x}{b\sqrt{q_x p_x}} = x_\alpha$$

відносно p, де x_α – точка, яка задовольняє умову

$$F(x_\alpha) = \alpha.$$

Ця точка знаходиться за допомогою таблиці функції $F(x)$. З цього рівняння отримуємо необхідний розмір страхової премії:

$$p = bq_x + \frac{b\sqrt{q_x p_x}}{\sqrt{N}} x_\alpha. \qquad (4.3.5)$$

Зазначимо, що bq_x – розмір нетто-премії p_0. Дійсно, прибуток компанії $\varepsilon = Np - N\xi_k$, середній прибуток $M\varepsilon = N(p - M\xi_k) = N(p - bq_x)$. Отже, розв'язком рівняння $M\varepsilon = 0$ є $p_0 = bq_x$. Тому другий доданок у формулі (4.3.5), а саме – $\frac{b\sqrt{q_x p_x}}{\sqrt{N}} x_\alpha$, – це розмір страхової надбавки $p - p_0$, а для відносної страхової надбавки $\theta = (p - p_0)/p_0$ маємо

$$\theta = \frac{b\sqrt{q_x p_x}}{\sqrt{N} b q_x} x_\alpha = x_\alpha \sqrt{\frac{p_x}{N q_x}}.$$

Зокрема, з цієї формули випливає, що розмір відносної страхової надбавки зменшується при збільшенні кількості застрахованих N.

Приклад 2. За умови прикладу 1 методом Гаусса знайти розмір страхової премії p, яка забезпечує ймовірність нерозорення компанії 0.95.

Розв'язання. За допомогою таблиці функції розподілу нормального закону з параметрами 0 і 1 знаходимо $x_{0.95} = 1.645$, а за допомогою таблиці тривалості життя – $q_x = 0.003$ (для $x = 38$). Тепер за формулою (4.3.5) отримуємо

$$p = 2500 \cdot 0.003 + \frac{2500\sqrt{0.003 \cdot 0.997}}{\sqrt{3000}} \times 1.645 \approx 7.5 + 2.5 \cdot 1.645 \approx 11.61\ .$$

Порівнюючи цей результат з результатом, який було отримано за допомогою методу Гаусса (див. прикл. 1), бачимо, що вони істотно не відрізняються.

4.4 Приклади розрахунків

Приклад 1. У страховій компанії застраховано $N_1 = 3000$ осіб у віці 38 років і $N_1 = 1000$ осіб у віці 18 років. Компанія сплачує спадкоємцям застрахованого виплату в розмірі $b = 250000$ грн у разі його смерті протягом року і не сплачує нічого, якщо він проживе більше року після укладання договору. Методами Пуассона і Гаусса підрахувати розмір страхової виплати, яка гарантує, що ймовірність розорення не перевищуватиме 5%.

Розв'язання. 1. *Метод Пуассона.* Візьмемо розмір страхової виплати b за одиницю. За допомогою таблиць тривалості життя знаходимо, що $q_{38} \approx 0.003$, а $q_{18} \approx 0.001$. Тому згідно з теоремою Пуассона підсумковий позов від застрахованих у віці 38 (18) років можна розглядати як випадкову величину, розподілену за законом Пуассона з параметром $\lambda_1 = N_1 \cdot q_{38} = 9$ (відповідно $\lambda_2 = N_1 \cdot q_{18} = 1$). Тоді за твердженням 4.3.3 підсумковий ризик компанії є пуассонівською випадковою величиною з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 10$. Отже, імовірність нерозорення компанії наближено дорівнює $P\{\xi \le u\}$, де ξ – пуассонівська випадкова величина з параметром $\lambda = 10$, а u – капітал компанії. За умовою повинно бути $P\{\xi \le u\} \ge 0.95$. З цієї умови і з огляду на означення 4.3.2 маємо $u = x_{0.95}$, де $x_{0.95}$ – квантиль рівня 0.95 розподілу Пуассона з параметром 10. За допомогою таблиці квантилів знаходимо, що $u = x_{0.95} = 15$.

Нетто-премія для першої групи застрахованих дорівнює $b \cdot q_{38} = 0.003$, а для другої групи – $b \cdot q_{18} = 0.001$. Таким чином, за рахунок нетто-премій компанія отримає суму $3000 \cdot 0.003 + 1000 \cdot 0.001 = 10$. Решту потрібної суми $15 - 10 = 5$ складатиме страхова надбавка. Оскільки страхова надбавка складає 50% від суми нетто-премій, то компанія повинна збільшити нетто-премії на 50%. Отже, для першої групи застрахованих розмір премії складатиме $0.003 \cdot 1.5 = 0.0045$, а для другої групи застрахованих – $0.001 \cdot 1.5 = 0.0015$.

2. *Метод Гаусса.* Нехай S_1 і S_2 – підсумкові позови від застрахованих з першої і другої груп відповідно. Тоді середнє значення підсумкового ризику S компанії дорівнює

$$MS = MS_1 + MS_2 = N_1 q_{38} + N_2 q_{18} = 10,$$

а його дисперсія –

$$DS = DS_1 + DS_2 = N_1 q_{38} p_{38} + N_2 q_{18} p_{18} \approx 10.$$

Далі за допомогою центральної граничної теореми знаходимо ймовірність нерозорення компанії:

$$P\{S \leq u\} = P\left\{\frac{S - MS}{\sqrt{DS}} \leq \frac{u - MS}{\sqrt{DS}}\right\} = F_{S^*}\left(\frac{u - MS}{\sqrt{DS}}\right) \approx$$

$$\approx F\left(\frac{u - MS}{\sqrt{DS}}\right) = F\left(\frac{u - 10}{\sqrt{10}}\right).$$

Оскільки за умовою ця ймовірність повинна бути не меншою за 95%, то має виконуватися рівність

$$\frac{u - 10}{\sqrt{10}} = x_{0.95},$$

де число $x_{0.95}$ задовольняє умову $F(x_{0.95}) = 0.95$. Звідси за допомогою таблиць функції $F(x) := (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ знаходимо, що $x_{0.95} \approx 1.645$ і необхідний капітал компанії $u = 10 + x_{0.95}\sqrt{10} \approx 15.2$.

Обчислення нетто-премій і необхідних страхових премій проводиться так само, як і в попередньому розв'язанні.

Таким чином, методи Пуассона і Гаусса дають практично однакові результати.

Приклад 2. Страхова компанія уклала $N = 10000$ договорів страхування життя терміном на один рік на таких умовах: у разі смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку компанія сплачує спадкоємцям 100000 грн, а у випадку його смерті протягом року внаслідок природних причин – 25000 грн. Компанія не сплачує нічого, якщо застрахований залишиться живим протягом року. Відомо, що ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.0005, а внаслідок природних причин – 0.003. Обчислити розмір страхової премії, яка забезпечує з ймовірністю 95% виконання компанією своїх зобов'язань перед клієнтами. Чому дорівнює розмір страхової надбавки?

Розв'язання. Візьмемо суму 25000 грн за одиницю. Тоді індивідуальний позов ξ має такий розподіл:

ξ_k :

0	1	4
0.9965	0.003	0.0005

Знаходимо середнє значення індивідуального позову

$$M\xi = 0 \cdot 0.9965 + 1 \cdot 0.003 + 4 \cdot 0.0005 = 0.005$$

і його дисперсію

$$D\xi = 0^2 \cdot 0.9965 + 1^2 \cdot 0.003 + 4^2 \cdot 0.0005 - (M\xi)^2 = 0.003 + 0.008 - 0.005^2 \approx 0.011.$$

Застосовуючи формулу (4.3.5), яку можна переписати у вигляді

$$p = p_0 + \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{N}} x_\alpha,$$

отримаємо необхідний розмір страхової премії:

$$p = 0.005 + \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{10000}} x_{0.95} \approx 0.0067,$$

тобто $p = 0.0067 \cdot 25000 \approx 168.1$ грн.

Оскільки нетто-премія $p_0 = M\xi = 0.0005 \cdot 25000 = 125$ грн, то відносна страхова надбавка $\Theta = (p - p_0)/p_0$ складає приблизно 34.5%.

Розділ 5

Аналіз моделей довготермінового страхування життя

Моделі довготермінового страхування життя характеризуються тим, що в них береться до уваги зміна вартості грошей з плином часу.

У реальній банківській практиці проценти за вкладами нараховуються в кінці кожного дня. Але один день це настільки мала одиниця виміру часу, що в математичних моделях можна вважати, що фінансовий час змінюється неперервно.

Означення 5.0.1 За такого припущення сума s через t років перетвориться на суму

$$s(t) = se^{\delta t}. \tag{5.0.1}$$

Число δ називається *інтенсивністю процентів.*

У цьому означенні проценти за вкладом нараховуються неперервно і містять проценти від процентів.

Означення 5.0.2 Величина

$$\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{s(t)} = \frac{se^{\delta(t+\Delta t)} - se^{\delta t}}{se^{\delta t}} = e^{\delta \Delta t} - 1$$

характеризує відносний приріст вкладу за проміжок часу Δt і називається *процентною ставкою за Δt років.* Найчастіше розглядається *річна процентна ставка*

$$i := e^{\delta} - 1. \tag{5.0.2}$$

Зазначимо, що інтенсивність процентів є відносною швидкістю зростання вкладу. Дійсно,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{s(t)\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\delta \Delta t} - 1}{\Delta t} = \delta.$$

Слід також відзначити, що річна процентна ставка i більша за інтенсивність процентів, оскільки

$$i = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \ldots > \delta.$$

Згідно з означенням 5.0.2 процентна ставка за Δt років не залежить від початку відліку часу. Ўноді розглядають більш загальні моделі, в яких процентна ставка за Δt років змінюється з плином часу, тобто інтенсивність процентів є функцією від часу: $\delta = \delta_t$. У таких моделях зміна вартості грошей з перебігом часу задається формулою

$$s(t) = s(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\delta_u du}. \tag{5.0.3}$$

5.1 Повне страхування життя. Принцип розрахунку нетто-премій при довготерміновому страхуванні життя

Означення 5.1.1 Найпростішим видом довготермінового страхування життя є *повне страхування життя.* У цій моделі страхування особа сплачує страховій компанії суму p (страхову премію), а компанія зобов'язується сплатити спадкоємцям застрахованого суму b (страхову виплату) в момент смерті застрахованого.

При повному страхуванні життя факт подання позову застрахованим не містить невизначеності: позов обов'язково буде поданий у момент смерті застрахованого. Розмір позову також не містить елементу випадковості: компанія повинна сплатити спадкоємцям застрахованого суму b, передбачену договором. Саме цими обставинами повне страхування відрізняється від короткотермінових видів страхування.

Зрозуміло, що розмір страхової премії p повинен бути набагато меншим за розмір страхової виплати b. У зв'язку з цим виникає питання: за рахунок чого компанія отримує суму для страхових виплат? Адже за умов повного страхування життя спадкоємці всіх застрахованих обов'язково звернуться до компанії з позовами.

Справа в тому, що компанія отримує страхову премію p у момент укладання договору, а страхову виплату b сплачує набагато пізніше. Протягом цього часу (який дорівнює залишковому часу життя $T(x)$ застрахованого, де x – його вік) страхова премія p приносить прибуток і перетворюється згідно з формулою (5.0.1) на суму $pe^{\delta T(x)}$, де δ – інтенсивність процентів. Таким чином, прибуток компанії від укладання одного договору повного страхування складає

$$\varepsilon = pe^{\delta T(x)} - b.$$

Згідно з принципом нульового середнього доходу, який використовувався для розрахунку нетто-премії за умов короткотермінових видів страхування, розмір нетто-премії p_1 знаходився б як розв'язок рівняння $M\varepsilon = 0$, тобто він складав би

$$p_1 = \frac{b}{Me^{\delta T(x)}}. \tag{5.1.1}$$

Насправді в довготермінових видах страхування нетто-премія розраховується на основі зовсім іншого принципу. Розглянемо цей принцип на прикладі повного страхування життя. Зміст цього принципу полягає в такому. Для того щоб отримати суму b у момент смерті застрахованого (тобто через $T(x)$ років після укладання договору) страхова компанія повинна згідно з формулою (5.0.1) зміни вартості грошей з перебігом часу отримати від нього суму

$$z := be^{-\delta T(x)} \tag{5.1.2}$$

у момент укладання договору. Сума z є випадковою величиною, яка виражає *сучасну* (тобто на момент укладання договору) *величину майбутньої страхової виплати*. Середній розмір p_0 цієї величини страхова компанія призначає як нетто-премію.

Означення 5.1.2 Таким чином, основний принцип розрахунку нетто-премій у довготермінових видах страхування можна виразити такою рівністю:

$$p_0 = Mz. \tag{5.1.3}$$

Головним поняттям у цьому принципі є сучасна величина майбутньої страхової виплати z. У загальному вигляді вона може бути означена таким чином.

Означення 5.1.3 Сучасною величиною майбутньої страхової виплати називається така сума z, яка, змінюючись за законом зміни вартості грошей (5.0.1), у момент виплати дорівнює величині страхової виплати b.

Цікаво порівняти розміри нетто-премій $p_1 = b/(Me^{\delta T(x)})$ і $p_0 = bMe^{-\delta T(x)}$, розрахованих на основі двох різних принципів. Нехай $p(t) = p_{T(x)}(t)$ – щільність залишкового часу життя $T(x)$. Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\delta}{2}t}\sqrt{p(t)}e^{\frac{\delta}{2}t}\sqrt{p(t)}dt \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t}p(t)dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\delta t}p(t)dt \right)^{1/2} = \left(Me^{-\delta T(x)}Me^{\delta T(x)} \right)^{1/2}.$$

Звідси

$$\frac{1}{Me^{\delta T(x)}} \leq Me^{-\delta T(x)},$$

тобто $p_1 \leq p_0$.

Зауваження. Сучасна величина майбутньої страхової виплати z не є індивідуальним позовом. Але, як буде доведено пізніше, при розрахунках імовірності нерозорення компанії все відбувається так само, як за умов короткотермінових видів страхування з величиною індивідуального позову, який дорівнює z.

Означення 5.1.4 В актуарній математиці розмір страхової виплати b часто беруть за одиницю виміру грошей. За такої угоди розмір нетто-премії при повному страхуванні життя складає $Me^{-\delta T(x)}$ і позначається символом $\overline{A}_x$. Отже, якщо $b = 1$, то за означенням

$$\overline{A}_x := Me^{-\delta T(x)}, \tag{5.1.4}$$

де δ – інтенсивність процентів; $T(x)$ – залишковий час життя людини у віці x років. Якщо в позначенні нетто-премії бажають відобразити величину інтенсивності процентів δ, то замість $\overline{A}_x$ пишуть ${}^{\delta}\overline{A}_x$.

Застосовуючи формулу для математичного сподівання функції від випадкової величини, маємо

$$\overline{A}_x = {}^{\delta}\overline{A}_x = Me^{-\delta T(x)} = \int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t} p_x(t) dt, \tag{5.1.5}$$

де $p_x(t)$ – щільність залишкового часу життя $T(x)$.

Розмір нетто-премії $\overline{A}_x$ за умов повного страхування життя можна виразити через інтенсивність смертності μ_x і величину ${}_tp_x := P\{T(x) > t\}$ – імовірність того, що людина у віці x років проживе ще щонайменше t років. Дійсно, оскільки для щільності $p_x(t)$ залишкового часу життя $T(x)$ виконується рівність $p_x(t) = p(x+t)/s(x)$ (див. формулу (2.1.2)), а для величини ${}_tp_x$ – рівність ${}_tp_x = s(x+t)/s(x)$ (див. формулу (2.2.3)), то

$$p_x(t) = \frac{p(x+t)}{s(x)} = \frac{p(x+t)}{s(x+t)} \frac{s(x+t)}{s(x)} = \mu_{x+t} \cdot {}_tp_x.$$

Тому з рівності (5.1.5) отримуємо

$$\overline{A}_x = {}^{\delta}\overline{A}_x = \int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t} \mu_{x+t} \cdot {}_tp_x dt. \tag{5.1.6}$$

При розрахунках премії, яка забезпечує задану ймовірність нерозорення компанії, потрібно буде обчислювати розмір дисперсії Dz сучасної величини майбутньої страхової виплати z. Для цього необхідно мати формулу для обчислення моменту другого порядку Mz^2. Зазначимо, що за умов повного страхування життя

$$z^k|_{\delta} = \left(e^{-\delta T(x)}\right)^k = e^{-(k\delta)T(x)} = z|_{k\delta}, \tag{5.1.7}$$

тобто k-й степінь сучасної величини майбутньої страхової виплати при інтенсивності процентів δ дорівнює сучасній величині майбутньої страхової виплати при інтенсивності процентів $k\delta$. Тому

$$Mz^k|_{\delta} = Mz|_{k\delta} = {}^{k\delta}\overline{A}_x \tag{5.1.8}$$

і

$$Dz = Mz^2 - (Mz)^2 = {}^{2\delta}\overline{A}_x - \left({}^{\delta}\overline{A}_x\right)^2. \tag{5.1.9}$$

5.2 Розрахунок нетто-премій у конкретних моделях тривалості життя

Модель де Муавра. У цій моделі тривалість життя рівномірно розподілена на відрізку $[0, \omega]$, де ω – граничний вік. Як ми бачили в §2.5 залишковий час життя $T(x)$ у моделі де Муавра рівномірно розподілений на відрізку $[0, \omega - x]$, тобто

$$p_x(t) = \begin{cases} 1/(\omega - x), & t \in [0, \omega - x] \\ 0, & t > \omega - x \end{cases}.$$

Тому за формулою (5.1.5)

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} p_x(t) dt = \int_0^{\omega - x} e^{-\delta t} \frac{1}{\omega - x} dt = \frac{1}{\omega - x} \left[\frac{e^{-\delta t}}{-\delta} \right]_0^{\omega - x} = \frac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta(\omega - x)}.$$

Зазначимо, що $\overline{A}_x$, як функція від x, монотонно зростає на проміжку $[0, \omega]$ і границя $\lim_{x \to \omega} \overline{A}_x$ дорівнює страховій виплаті b (згідно з означенням 5.1.4 $b = 1$).

Застосовуючи формули (5.1.8) і (5.1.9), обчислюємо момент другого порядку

$$Mz^2|_\delta = {}^{2\delta}\overline{A}_x = \frac{1 - e^{-2\delta(\omega - x)}}{2\delta(\omega - x)}$$

і дисперсію

$$Dz = {}^{2\delta}\overline{A}_x - ({}^{\delta}\overline{A}_x)^2 = \frac{1 - e^{-2\delta(\omega - x)}}{2\delta(\omega - x)} - \left(\frac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta(\omega - x)} \right)^2.$$

Неважко бачити, що функція розподілу $F_z(t)$ сучасної величини майбутньої страхової виплати z при повному страхуванні життя в моделі де Муавра задається формулою

$$F_z(t) = \begin{cases} 0, & t < e^{-\delta(\omega - x)}, \\ 1 + \ln t / (\delta(\omega - x)), & t \in [e^{-\delta(\omega - x)}, 1], \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Модель Ерланга. У цій моделі крива смертей задається формулою

$$p(x) = \frac{x}{a^2} e^{-x/a}, \quad x \geq 0. \tag{5.2.1}$$

Як показано в §2.5, для щільності залишкового часу життя виконується рівність

$$p_x(t) = \frac{x + t}{a(x + a)} e^{-t/a}.$$

Тому за формулою (5.1.5)

$$\overline{A}_x = \int\limits_0^\infty e^{-\delta t} p_x(t)dt = \int\limits_0^\infty e^{-\delta t} \frac{x+t}{a(x+a)} e^{-t/a} dt =$$

$$= \frac{x}{a(x+a)} \int\limits_0^\infty e^{-t\frac{a\delta+1}{a}} dt + \frac{1}{a(x+a)} \int\limits_0^\infty t e^{-t\frac{a\delta+1}{a}} dt = \frac{1}{a(x+a)}(xI_1 + I_2),$$

де

$$I_1 = \int\limits_0^\infty e^{-t\frac{a\delta+1}{a}} dt = -\left[\frac{a}{a\delta+1} e^{-t\frac{a\delta+1}{a}}\right]_0^\infty = \frac{a}{a\delta+1},$$

$$I_2 = \int\limits_0^\infty t e^{-t\frac{a\delta+1}{a}} dt = -\frac{a}{a\delta+1} \int\limits_0^\infty t d e^{-t\frac{a\delta+1}{a}} =$$

$$= -\left[\frac{a}{a\delta+1} t e^{-t\frac{a\delta+1}{a}}\right]_0^\infty + \frac{a}{a\delta+1} \int\limits_0^\infty e^{-t\frac{a\delta+1}{a}} dt = \left(\frac{a}{a\delta+1}\right)^2.$$

Тому

$$\overline{A}_x = \frac{1}{a(x+a)}(xI_1 + I_2) = \frac{1}{a(x+a)} \left[\frac{ax}{a\delta+1} + \left(\frac{a}{a\delta+1}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{(x+a)(a\delta+1)} \left(x + \frac{a}{a\delta+1}\right) = \frac{xa\delta + x + a}{(x+a)(a\delta+1)^2}. \qquad (5.2.2)$$

Приклад. Припустимо, що тривалість життя описується за допомогою моделі Ерланга, причому середня тривалість життя складає 80 років. Обчислити нетто-премію для застрахованих у віці 20 і 30 років, якщо інтенсивність процентів дорівнює 10%.

Розв'язання. У прикладі 1 з §1.7 було показано, що середня тривалість життя в моделі Ерланга дорівнює $2a$. Тому, підставляючи у формулу (5.2.2) $a = 40$ і $\delta = 0.1$, отримуємо $\overline{A}_{20} \approx 0.0933$ і $\overline{A}_{30} \approx 0.1086$.

Можна показати, що функція розподілу $F_z(t)$ сучасної величини майбутньої страхової виплати z при повному страхуванні життя в моделі Ерланга задається формулою

$$F_z(t) = \begin{cases} t^{1/a\delta}\left(1 - \frac{\ln t}{\delta(x+a)}\right), & t \in (0,1), \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

5.3 Розрахунок нетто-премій за допомогою таблиць тривалості життя

Перетворимо основну формулу (5.1.5)

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} p_x(t)dt \tag{5.3.1}$$

для нетто-премії $\overline{A}_x$ за умов повного страхування життя так, щоб в неї входили (за винятком інтенсивності процентів δ) тільки табличні величини:

l_x – середня кількість представників даної групи з l_0 новонароджених, які дожили до x років (див. §1.2);

$d_x = l_x - l_{x+1}$ – середня кількість представників даної групи з l_0 новонароджених, які померли у віковому проміжку $(x, x+1]$ (див. §1.3).

Для цього спочатку застосуємо формулу (2.1.2) для щільності залишкового часу життя $p_x(t) = \frac{p(x+t)}{s(x)}$ і потім за допомогою заміни змінної $t = n+u$, де n – ціле невід'ємне число, $u \in [0, 1]$, перетворимо праву частину формули (5.3.1) таким чином:

$$\overline{A}_x = \frac{1}{s(x)} \int_0^\infty e^{-\delta t} p(x+t)dt = \frac{1}{s(x)} \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} e^{-\delta t} p(x+t)dt =$$

$$= \frac{1}{s(x)} \sum_{n=0}^\infty e^{-\delta n} \int_0^1 e^{-\delta u} p(x+n+u)du.$$

Нехай тепер x – ціле невід'ємне число. Тоді за допомогою заміни змінної $k = n + x$ отримуємо

$$\overline{A}_x = \frac{e^{\delta x}}{s(x)} \sum_{k=x}^\infty e^{-\delta k} \int_0^1 e^{-\delta u} p(k+u)du. \tag{5.3.2}$$

Подальші перетворення формули (5.3.2) будемо проводити за умов конкретного виду інтерполяції функції виживання $s(x)$ для дробового віку (див. §3.5 – §3.7). Розглянемо для прикладу лінійну інтерполяцію та інтерполяцію показниковими функціями.

Лінійна інтерполяція. Як було показано в §3.5 у цій моделі інтерполяції крива смертей на проміжку $(k, k+1)$ задається формулою $p(x) = s(k) - s(k+1)$. Тому

$$I := \int_0^1 e^{-\delta u} p(k+u)du = [s(k) - s(k+1)] \int_0^1 e^{-\delta u} du =$$

$$= [s(k) - s(k+1)] \left[\frac{e^{-\delta u}}{-\delta}\right]_0^1 = [s(k) - s(k+1)]\frac{1-e^{-\delta}}{\delta}.$$

Підставляючи це значення інтеграла I у рівність (5.3.2) і зважаючи на формули $s(x) = l_x/l_0$ (див. (1.2.1)) та $i := e^{\delta} - 1$ (див. (5.0.2)), де i – річна процентна ставка, отримуємо

$$\overline{A}_x = \frac{e^{\delta x}}{l_0 s(x)} \sum_{k=x}^{\infty} e^{-\delta k} l_0 [s(k) - s(k+1)] \frac{e^{\delta} - 1}{\delta e^{\delta}} = \frac{i e^{\delta(x-1)}}{\delta l_x} \sum_{k=x}^{\infty} d_k e^{-\delta k}. \quad (5.3.3)$$

Ўнтерполяція показниковими функціями. За умов даного виду інтерполяції крива смертей $p(x)$ на проміжку $(k, k+1)$ задається формулою $p(x) = -s(k) p_k^{x-k} \ln p_k$ (див. §3.6), де $p_k = s(k+1)/s(k)$, а інтенсивність смертності μ_x між вузлами інтерполяції постійна, а саме – $\mu_x = -\ln p_k$ для $x \in (k, k+1)$. Нехай $\mu_k := -\ln p_k$. Тоді $p(k+u) = \mu_k s(k) p_k^u$ для $u \in (0,1)$ і для інтеграла в правій частині формули (5.3.2) маємо

$$I := \int_0^1 e^{-\delta u} p(k+u) du = \int_0^1 e^{-\delta u} \mu_k s(k) p_k^u du = \mu_k s(k) \int_0^1 e^{-\delta u} e^{u \ln p_k} du =$$

$$= \mu_k s(k) \int_0^1 e^{-(\delta+\mu_k)u} du = \mu_k s(k) \left[\frac{e^{-(\delta+\mu_k)u}}{-(\delta+\mu_k)}\right]_0^1 =$$

$$= \mu_k s(k) \frac{1 - e^{-(\delta+\mu_k)}}{\delta + \mu_k} = \frac{\mu_k}{\delta+\mu_k} s(k) \left(1 - e^{-\delta} e^{\ln p_k}\right) =$$

$$= \frac{\mu_k}{\delta+\mu_k} s(k) \left(1 - e^{-\delta} \frac{s(k+1)}{s(k)}\right) = \frac{\mu_k}{\delta+\mu_k} \left(s(k) - e^{-\delta} s(k+1)\right).$$

Підставляючи це значення інтеграла I у рівність (5.3.2), отримуємо

$$\overline{A}_x = \frac{e^{\delta x}}{l_0 s(x)} \sum_{k=x}^{\infty} e^{-\delta k} \frac{\mu_k}{\delta+\mu_k} \left(l_0 s(k) - e^{-\delta} l_0 s(k+1)\right) =$$

$$= \frac{e^{\delta x}}{l_x} \sum_{k=x}^{\infty} e^{-\delta k} \frac{\mu_k}{\delta+\mu_k} \left(l_k - e^{-\delta} l_{k+1}\right). \quad (5.3.4)$$

5.4 Розрахунок нетто-премій за допомогою рекурентних формул

Отримаємо рекурентні формули, в яких значення $\overline{A}_x$ виражається через $\overline{A}_{x+1}$. Спочатку розглянемо сенс таких рекурентних формул. Зрозуміло, що коли вік застрахованого x близький до граничного віку ω, то нетто-премія повинна бути близькою до страхової виплати b (нагадаємо, що b було взято за одиницю). Отже, природно вважати, що $\overline{A}_\omega = 1$. Використовуючи це значення як початкове, за допомогою рекурентних формул ми зможемо обчислити значення $\overline{A}_x$ для довільного віку x.

За умов інтерполяції лінійними функціями з формули (5.3.3) отримуємо

$$\overline{A}_x = \frac{ie^{\delta(x-1)}}{\delta l_x} \sum_{k=x}^{\infty} d_k e^{-\delta k} = \frac{ie^{\delta x}}{\delta l_{x+1}} \frac{e^{-\delta} l_{x+1}}{l_x} \left(\sum_{k=x+1}^{\infty} d_k e^{-\delta k} + d_x e^{-\delta x} \right) =$$

$$= \frac{e^{-\delta} l_{x+1}}{l_x} \overline{A}_{x+1} + \frac{ie^{-\delta} d_x}{\delta l_x} = e^{-\delta} p_x \overline{A}_{x+1} + ie^{-\delta} \frac{q_x}{\delta}$$

(ми взяли до уваги, що $l_{x+1}/l_x = s(x+1)/s(x) = p_x$ і $d_x/l_x = (s(x) - s(x+1))/s(x) = q_x$).

Аналогічно, *за умов інтерполяції показниковими функціями* з формули (5.3.4) отримуємо

$$\overline{A}_x = \frac{e^{\delta x}}{l_x} \sum_{k=x}^{\infty} e^{-\delta k} \frac{\mu_k}{\delta + \mu_k} \left(l_k - e^{-\delta} l_{k+1} \right) =$$

$$= \frac{e^{\delta(x+1)}}{l_{x+1}} \frac{e^{-\delta} l_{x+1}}{l_x} \left(\sum_{k=x+1}^{\infty} e^{-\delta k} \frac{\mu_k}{\delta + \mu_k} \left(l_k - e^{-\delta} l_{k+1} \right) + e^{-\delta x} \frac{\mu_x}{\delta + \mu_x} \left(l_x - e^{-\delta} l_{x+1} \right) \right) =$$

$$= e^{-\delta} p_x \overline{A}_{x+1} + \frac{\mu_x}{\delta + \mu_x} \left(1 - e^{-\delta} p_x \right).$$

5.5 n-річне страхування життя

За умовою цього виду страхування страхова виплата фіксованого розміру b сплачується в момент смерті застрахованого, якщо він помер протягом n років з моменту укладання договору. У разі, якщо застрахований прожив більше n років, компанія не сплачує нічого.

Зазначимо, що при $n = \infty$ цей вид страхування життя перетворюється на повне страхування життя, а при $n = 1$ умови n-річного страхування життя збігаються з умовами найпростішого виду короткотермінового страхування життя. Але є істотна різниця між n-річним страхуванням життя у випадку $n = 1$ і найпростішим видом короткотермінового страхування. Ця різниця полягає в тому, що при n-річному страхуванні життя береться до уваги зміна вартості грошей з перебігом часу, тоді як при короткотерміновому страхуванні – ні.

Візьмемо, як і раніше, страхову виплату b за одиницю виміру грошей. Тоді за умов n-річного страхування життя сучасна величина майбутньої страхової виплати z згідно з означенням (5.1.3) задається формулою

$$z = \begin{cases} e^{-\delta T(x)}, & T(x) \le n, \\ 0, & T(x) > n, \end{cases} \tag{5.5.1}$$

де $T(x)$ – залишковий час життя застрахованого у віці x років.

Згідно з основним принципом розрахунку нетто-премій при довготерміновому страхуванні життя як нетто-премія береться середнє значення Mz сучасної величини майбутньої страхової виплати. Нетто-премія при n-річному страхуванні життя позначається символом $\overline{A}^{1}_{x:n\rceil}$. Таким чином,

$$\overline{A}^{1}_{x:n\rceil} = Mz = \int\limits_0^n e^{-\delta t} p_x(t) dt, \tag{5.5.2}$$

де $p_x(t)$ – щільність розподілу залишкового часу життя $T(x)$. Якщо в позначенні нетто-премії при n-річному страхуванні бажають відобразити величину інтенсивності процентів δ, то замість $\overline{A}^{1}_{x:n\rceil}$ пишуть ${}^{\delta}\overline{A}^{1}_{x:n\rceil}$.

Зазначимо, що з формули (5.5.1) випливає рівність

$$z^k|_{\delta} = z|_{k\delta}, \tag{5.5.3}$$

тобто за умов n-річного страхування життя k-та степінь сучасної величини майбутньої страхової виплати при інтенсивності процентів δ дорівнює сучасній величині майбутньої страхової виплати при інтенсивності процентів $k\delta$. Тому

$$Mz^k|_{\delta} = Mz|_{k\delta} = {}^{k\delta}\overline{A}^{1}_{x:n\rceil} \tag{5.5.4}$$

і

$$Dz = Mz^2 - (Mz)^2 = {}^{2\delta}\overline{A}^{1}_{x:n\rceil} - \left({}^{\delta}\overline{A}^{1}_{x:n\rceil} \right)^2. \tag{5.5.5}$$

Зауважимо, що результати, аналогічні тим, що виражені співвідношеннями (5.5.3)–(5.5.5), були отримані раніше і за умов повного страхування життя.

Як і у випадку повного страхування життя, формулу (5.5.2) можна перетворити таким чином, щоб вона містила тільки табличні величини. Повторюючи міркування, які застосовувалися при доведенні формул (5.3.3) і (5.3.4), ми отримаємо такі результати:

$$\overline{A}^{1}_{x:n\rceil} = \frac{ie^{\delta(x-1)}}{\delta l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} d_k e^{-\delta k} \tag{5.5.6}$$

(за умов інтерполяції лінійними функціями) і

$$\overline{A}^{1}_{x:n\rceil} = \frac{e^{\delta x}}{l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} e^{-\delta k} \frac{\mu_k}{\delta + \mu_k} \left(l_k - e^{-\delta} l_{k+1} \right) \tag{5.5.7}$$

(за умов інтерполяції показниковими функціями).

5.6 n-річне змішане страхування життя

Умови цього виду страхування такі. Страхова виплата фіксованого розміру b сплачується в момент смерті застрахованого, якщо він помер протягом n років з моменту укладання договору. У разі, якщо застрахований прожив більше n років, компанія сплачує страхову виплату такого ж розміру b у момент закінчення терміну дії угоди, тобто через n років після укладання договору. Зазначимо, що цей вид страхування також є засобом накопичення коштів.

Як і раніше, візьмемо страхову виплату b за одиницю виміру грошей. Тоді сучасна величина майбутньої страхової виплати z згідно з означенням 5.1.3 задається формулою

$$z = \begin{cases} e^{-\delta T(x)}, & T(x) \le n, \\ e^{-\delta n}, & T(x) > n. \end{cases} \tag{5.6.1}$$

За основним принципом розрахунку нетто-премій при довготерміновому страхуванні життя середнє значення Mz сучасної величини майбутньої страхової виплати береться як нетто-премія. У даному виді страхування вона позначається символом $\overline{A}_{x:n\rceil}$ або ${}^{\delta}\overline{A}_{x:n\rceil}$. Порівнюючи формули (5.5.1) та (5.6.1) і враховуючи рівності (5.5.2) та (2.2.3), отримуємо

$$\overline{A}_{x:n\rceil} = Mz = \int_0^n e^{-\delta t} p_x(t) dt + e^{-\delta n} P\{T(x) > n\} =$$

$$= \overline{A}^{1}_{x:n\rceil} + e^{-\delta n} \frac{s(x+n)}{s(x)}. \tag{5.6.2}$$

Як і за умов повного і n-річного страхувань виконується рівність

$$z^k|_\delta = z|_{k\delta},$$

тобто за умов n-річного змішаного страхування життя k-й степінь сучасної величини майбутньої страхової виплати при інтенсивності процентів δ дорівнює сучасній величині майбутньої страхової виплати при інтенсивності процентів $k\delta$. Тому

$$Mz^k|_\delta = Mz|_{k\delta} = {}^{k\delta}\overline{A}_{x:n\rceil}$$

і

$$Dz = Mz^2 - (Mz)^2 = {}^{2\delta}\overline{A}_{x:n\rceil} - \left({}^{\delta}\overline{A}_{x:n\rceil}\right)^2.$$

Комбінуючи формули (5.6.2), (5.5.6), (5.5.7) і (1.2.1), ми отримаємо, що за умов інтерполяції лінійними функціями

$$\overline{A}_{x:n\rceil} = \frac{ie^{\delta(x-1)}}{\delta l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} d_k e^{-\delta k} + e^{-\delta n} \frac{l_{x+n}}{l_x}, \tag{5.6.3}$$

а за умов інтерполяції показниковими функціями

$$\overline{A}_{x:n\rceil} = \frac{e^{\delta x}}{l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} e^{-\delta k} \frac{\mu_k}{\delta + \mu_k} \left(l_k - e^{-\delta} l_{k+1} \right) + e^{-\delta n} \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

5.7 Страхування, відкладене на m років

Ўснує ряд видів відкладеного страхування життя. Як приклад розглянемо повне страхування, відкладене на m років. За умовою цього виду страхування страхова виплата фіксованого розміру b сплачується в момент смерті застрахованого, якщо тільки вона настала після закінчення терміну в m років з моменту укладання договору. У разі, якщо застрахований помер раніше цього терміну, компанія не сплачує нічого.

Згідно з означенням 5.1.3 сучасна величина майбутньої страхової виплати z у даному виді страхування задається формулою

$$z = \begin{cases} 0, & T(x) \le m, \\ e^{-\delta T(x)}, & T(x) > m \end{cases} \tag{5.7.1}$$

(ми обрали страхову виплату b за одиницю виміру грошей). Середнє значення Mz цієї величини, як і в інших видах довготермінового страхування життя, береться як нетто-премія. У даному виді страхування вона позначається символом ${}_{m|}\overline{A}_x$ або ${}^{\delta}_{m|}\overline{A}_x$. Таким чином, з огляду на формули (5.1.4) та (5.5.2), отримуємо

$${}_{m|}\overline{A}_x = Mz = \int\limits_m^\infty e^{-\delta t} p_x(t) dt = \int\limits_0^\infty e^{-\delta t} p_x(t) dt - \int\limits_0^m e^{-\delta t} p_x(t) dt =$$

$$= \overline{A}_x - \overline{A}^{\,1}_{x:m\rceil}. \tag{5.7.2}$$

Як і за умов довготермінових видів страхування, які були розглянуті раніше, виконується рівність

$$z^k|_\delta = z|_{k\delta},$$

і тому

$$Mz^k|_\delta = Mz|_{k\delta} = {}^{k\delta}_{m|}\overline{A}_x.$$

Застосовуючи формули (5.7.2), (5.3.3), (5.3.4), (5.5.6) і (5.5.7), нетто-премію ${}_{m|}\overline{A}_x$ можна обчислити за допомогою таблиць тривалості життя.

5.8 Страхування зі змінним розміром страхової виплати

Для всіх розглянутих видів довготермінового страхування характерним є те, що розмір страхової виплати (якщо вона сплачується) не залежить від моменту виплати. Ўснують різноманітні види страхування, в яких розмір страхової виплати змінюється з плином часу. Розглянемо, наприклад, страхування, за умов якого страхова виплата неперервно збільшується, а саме, – її розмір $b(x)$ є прямо пропорційним залишковому часу життя, тобто $b(x) = kT(x)$. Якщо ми візьмемо коефіцієнт пропорційності k за одиницю виміру грошей, то сучасна величина майбутньої страхової виплати складатиме

$$z = T(x)e^{-\delta T(x)}. \tag{5.8.1}$$

Математичне сподівання цієї величини береться як нетто-премія і позначається символом $\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x$. Таким чином,

$$\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x = Mz = \int\limits_0^{\infty} te^{-\delta t}p_x(t)dt, \tag{5.8.2}$$

де $p_x(t)$ – щільність розподілу залишкового часу життя $T(x)$.

Покажемо, що нетто-премію $\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x$ можна виразити через нетто-премію ${}_{m|}\overline{A}_x$ за умов відкладеного на m років страхування. Для цього в інтегралі в правій частині рівності (5.8.2) змінну t подамо у вигляді $t = \int\limits_0^t dm$ і потім застосуємо теорему Фубіні:

$$\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x = \int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t}p_x(t)\int\limits_0^{t} dmdt = \int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t}p_x(t)\int\limits_0^{\infty}(t-m)_+^0 dmdt =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t}p_x(t)(t-m)_+^0 dt\right)dm = \int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_m^{\infty} e^{-\delta t}p_x(t)dt\right)dm.$$

Тепер, зважаючи на формулу (5.7.2), отримуємо

$$\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x = \int\limits_0^{\infty} {}_{m|}\overline{A}_x dm.$$

Зауваження. На відміну від усіх раніше розглянутих видів довготермінового страхування рівність $z^k|_\delta = z|_{k\delta}$ для страхування зі змінним розміром страхової виплати не виконується.

5.9 Страхування зі сплатою страхової виплати в кінці року смерті

Як приклад такого страхування розглянемо повне страхування (зі сплатою фіксованої страхової виплати b у кінці року смерті).

У такому страхуванні інтервал між укладанням договору і моментом сплати страхової виплати дорівнює $K(x)+1$, де $K(x)=[T(x)]$ – округлений залишковий час життя (див. розділ 3). Тому сучасна величина майбутньої страхової виплати складає

$$z = e^{-\delta(K(x)+1)} \tag{5.9.1}$$

(як завжди ми взяли страхову виплату b за одиницю). Середнє значення цієї величини береться як нетто-премія. У даному страхуванні вона позначається символом A_x. Таким чином,

$$A_x = Mz = Me^{-\delta(K(x)+1)}.$$

Величина $K(x)$ згідно з формулами (3.1.1), (1.2.1) і (1.3.3) має такий розподіл:

$$P\{K(x)=k\} = \frac{s(k+x)-s(k+x+1)}{s(x)} =$$

$$= \frac{l_{k+x}-l_{k+x+1}}{l_x} = \frac{d_{k+x}}{l_x}, \quad k=0,1,\ldots \tag{5.9.2}$$

Тому (для цілих x)

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} \frac{d_{k+x}}{l_x} = \sum_{n=x}^{\infty} e^{-\delta(n-x+1)} \frac{d_n}{l_x} = \frac{e^{\delta(x-1)}}{l_x} \sum_{n=x}^{\infty} d_n e^{-\delta n}. \tag{5.9.3}$$

Порівнюючи формули (5.9.3) і (5.3.3), дійдемо до висновку, що *за умови інтерполяції функції виживання лінійними функціями* (на проміжках між цілочисловими значеннями аргументу) виконується рівність

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x. \tag{5.9.4}$$

Наведемо більш просте і безпосереднє доведення співвідношення (5.9.4), в якому не застосовуються формули (5.9.3) і (5.3.3). У такому разі ці формули будуть випливати одна з одної внаслідок рівності (5.9.4).

Зауважимо, що за умов лінійної інтерполяції випадкові величини $K(x)$ і $\tau_x := T(x)-K(x)$ незалежні, причому дробова частина залишкового часу життя τ_x розподілена рівномірно на $[0,1]$ (див. зауваження в кінці §3.5). Зрозуміло, що тоді величина $1-\tau_x$ також рівномірно розподілена на $[0,1]$. Тому

$$\overline{A}_x = Me^{-\delta T(x)} = M\left(e^{-\delta(K(x)+\tau_x)}\right) = M\left(e^{-\delta(K(x)+1)} e^{\delta(1-\tau_x)}\right) =$$

$$= Me^{-\delta(K(x)+1)} Me^{\delta(1-\tau_x)} = A_x \int_0^1 e^{\delta t} dt = A_x \left[\frac{e^{\delta t}}{\delta}\right]_0^1 = A_x \frac{e^{\delta}-1}{\delta} = \frac{i}{\delta} A_x.$$

Якщо в позначенні нетто-премії A_x бажають відобразити величину інтенсивності процентів δ, то замість A_x пишуть ${}^{\delta}A_x$. З формули (5.9.1) випливають рівності

$$z^k|_{\delta} = z|_{k\delta}$$

і

$$Mz^k|_{\delta} = Mz|_{k\delta} = {}^{k\delta}A_x.$$

Результати такого типу справедливі для всіх розглянутих раніше видів довготермінового страхування, окрім страхування зі змінним розміром страхової виплати.

5.10 Загальна схема довготермінового страхування життя

Усі розглянуті раніше види довготермінового страхування є спеціальними випадками такої загальної схеми страхування життя.

1. Припустимо, що застрахованому у віці x років сплачується страхова виплата в момент часу $\tau(T(x))$, який залежить від моменту смерті $T(x)$.

2. Припустимо, що розмір страхової виплати $b_{\tau(T(x))}$ залежить від моменту виплати $\tau(T(x))$.

Тоді, щоб мати суму $b_{\tau(T(x))}$ у момент $\tau(T(x))$ сучасна величина майбутньої страхової виплати z повинна складати

$$z = b_{\tau(T(x))}e^{-\delta\tau(T(x))}. \tag{5.10.1}$$

Для страхувань із виплатою в момент смерті, тобто $\tau(T(x)) = T(x)$, ця формула набуває виду

$$z = b_{T(x)}e^{-\delta T(x)}.$$

Зрозуміло, що конкретний вид страхування повністю визначається сучасною величиною майбутньої страхової виплати z. Усі розглянуті раніше види довготермінового страхування можна отримати з цієї загальної схеми спеціальним вибором функцій $\tau(t)$ і b_t;

1) для повного страхування (див. формулу (5.1.2))

$$b_t = 1, \quad \tau(t) = t;$$

2) для n-річного страхування (див. формулу (5.5.1))

$$\tau(t) = t, \quad b_t = \begin{cases} 1, & t \le n \\ 0, & t > n; \end{cases}$$

3) для n-річного змішаного страхування (див. формулу (5.6.1))

$$b_t = 1, \quad \tau(t) = \min\{t, n\};$$

4) для відкладеного на m років страхування (див. формулу (5.7.1))

$$\tau(t) = t, \quad b_t = \begin{cases} 0, & t \le m \\ 1, & t > m; \end{cases}$$

5) для страхування зі змінним розміром страхової виплати (див. формулу (5.8.1))

$$b_t = t, \quad \tau(t) = t;$$

6) для повного страхування зі сплатою в кінці року смерті (див. формулу (5.9.1))

$$b_t = 1, \quad \tau(t) = [t] + 1.$$

Можна розглядати більш загальну схему страхування, в якій інтенсивність процентів δ змінюється з плином часу. У таких моделях зміна вартості грошей з часом описується формулою (5.0.3):

$$s(t) = s(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \delta_u du}.$$

Тому сучасна величина майбутньої страхової виплати матиме вигляд

$$z = b_{\tau(T(x))} e^{-\int_0^{\tau(T(x))} \delta_t dt}.$$

У випадку постійної інтенсивності процентів $\delta_t = \delta$ ця рівність перетворюється на рівність (5.10.1).

У попередніх параграфах для спеціальних видів страхування 1) – 4) і 6) були отримані формули

$$z^k|_\delta = z|_{k\delta}$$

і

$$Mz^k|_\delta = Mz|_{k\delta}. \tag{5.10.2}$$

Покажемо, що ці рівності виконуються в рамках розглянутої загальної схеми страхування за однієї додаткової умови. А саме, припустимо, *що* b_t *набуває тільки двох значень:* 0 *і* 1. Це припущення означає, що якщо страхова виплата сплачується, то її розмір не залежить від моменту виплати. Зокрема, цю умову задовольняють види страхування 1) – 4) і 6).

Унаслідок даного припущення $b_t^k = b_t$ для всіх $t > 0$ і тому з формули (5.10.1) випливає

$$z^k|_\delta = b_{\tau(T(x))} e^{-k\delta\tau(T(x))} = z|_{k\delta},$$

тобто k-й степінь сучасної величини майбутньої страхової виплати при інтенсивності процентів δ дорівнює сучасній величині майбутньої страхової виплати при інтенсивності процентів $k\delta$. Як наслідок отримуємо рівність (5.10.2).

У рамках розглянутої загальної схеми страхування можна отримати узагальнення рівності (5.9.4). Припустимо, що виконані такі умови:

а) величина b_t зберігає постійне значення на проміжках $(n, n+1]$, де n – натуральне число, тобто

$$b_t = b_{n+1} \qquad t \in (n, n+1];$$

b) функція виживання лінійна на проміжках $(n, n+1]$.

Розглянемо будь-який вид страхування зі сплатою страхової виплати в момент смерті, який задовольняє умови a) і b). Через $\overline{A}$ позначимо нетто-премію для такого виду страхування, а через A – нетто-премію для аналогічного виду страхування зі сплатою страхової виплати в кінці року смерті. Покажемо, що

$$\overline{A} = \frac{i}{\delta} A. \tag{5.10.3}$$

Нехай, як і раніше, $\tau_x := T(x) - K(x)$, де $K(x) = [T(x)]$. Нагадаємо, що за умови b) випадкові величини τ_x і $K(x)$ незалежні, причому дробова частина залишкового часу життя τ_x рівномірно розподілена на $[0, 1]$ (див. зауваження в кінці §3.5). Зрозуміло, що тоді й величина $1 - \tau_x$ рівномірно розподілена на $[0, 1]$.

Знайдемо сучасну величину майбутньої страхової виплати z за умов договору з виплатою в момент смерті (тобто $\tau(T(x)) = T(x)$). З огляду на умову a) маємо $P\left(b_{T(x)} = b_{K(x)+1}\right) = 1$. Тому з ймовірністю 1

$$z = b_{\tau(T(x))} e^{-\delta \tau(T(x))} = b_{T(x)} e^{-\delta T(x)} = b_{K(x)+1} e^{-\delta T(x)}$$

і

$$\overline{A} = M b_{K(x)+1} e^{-\delta T(x)}. \tag{5.10.4}$$

Водночас сучасна величина майбутньої страхової виплати z за умов договору з виплатою в кінці року смерті (тобто $\tau(T(x)) = K(x) + 1$) складає

$$z = b_{K(x)+1} e^{-\delta(K(x)+1)}$$

і тому

$$A = M b_{K(x)+1} e^{-\delta(K(x)+1)}. \tag{5.10.5}$$

Беручи до уваги незалежність випадкових величин τ_x і $K(x)$ і рівномірну розподіленість на $[0, 1]$ величини $1-\tau_x$, за допомогою формул (5.10.4) і (5.10.5) отримуємо

$$\overline{A} = M b_{K(x)+1} e^{-\delta T(x)} = M b_{K(x)+1} e^{-\delta(K(x)+\tau_x)} = M b_{K(x)+1} e^{-\delta(K(x)+1)} e^{\delta(1-\tau_x)} =$$

$$= M b_{K(x)+1} e^{-\delta(K(x)+1)} M e^{\delta(1-\tau_x)} = A \int_0^1 e^{\delta t} dt = A \left[\frac{e^{\delta t}}{\delta}\right]_0^1 = A \frac{e^{\delta} - 1}{\delta} = \frac{i}{\delta} A,$$

і доведення рівності (5.10.3) завершене.

5.11 Аналіз підсумкового ризику

Проведемо аналіз фінансової діяльності компанії, враховуючи усю сукупність укладених нею договорів (портфель договорів).

Нехай у момент часу $t = 0$ портфель компанії складає $N = N(0)$ договорів. Для простоти припустимо, що всі вони є договорами повного страхування життя. Позначимо символом $N(t)$ кількість живих представників початкової групи з N застрахованих у момент часу t, а символом $S(t)$ – капітал компанії в цей момент часу. При кожному фіксованому t величини $N(t)$ і $S(t)$ є випадковими величинами, тобто як функції часу вони є випадковими процесами. Дослідимо динаміку цих процесів. Перенумеруємо застрахованих і позначимо через T_1, $T_2, \ldots$, T_N моменти їх смерті. Без обмеження загальності можемо вважати, що $T_1 < T_2 < \ldots < T_N$. Нехай також $T_0 := 0$.

На кожному з проміжків $[T_i, T_{i+1})$ процес $N(t)$ зберігає постійне значення, яке дорівнює $N - i$, $i = 0, 1, \ldots N - 1$, а в момент часу T_i його значення зменшується на 1. У момент часу T_N процес $N(t)$ дорівнює нулю і після цього вже не змінюється.

Дослідимо динаміку процесу $S(t)$. На проміжках $[T_i, T_{i+1})$ процес $S(t)$ зростає за законом (5.0.1) зміни вартості грошей, тобто

$$S(T_i + t) = S(T_i)e^{\delta t}, \qquad (5.11.1)$$

де δ – інтенсивність процентів, а в момент часу T_i процес зменшується на величину страхової виплати:

$$S(T_i + 0) = S(T_i - 0) - b.$$

Тому, якщо в деякий момент часу T_i виконується нерівність

$$S(T_i - 0) < b,$$

то компанія буде розорена, бо не зможе сплатити страхову виплату.

З'ясуємо, якою повинна бути поведінка процесу $S(t)$, щоб компанія не розорилась. У момент часу $t = 0$ капітал компанії дорівнює Np. Тоді згідно з формулою (5.11.1) в момент часу $T_1 - 0$ (тобто до виплати) капітал компанії складатиме $Npe^{\delta T_1}$. Для того щоб у момент часу T_1 компанія змогла сплатити страхову виплату і продовжити свою діяльність повинно бути

$$Npe^{\delta T_1} > b. \qquad (5.11.2)$$

Після сплати страхової виплати компанія матиме капітал $Npe^{\delta T_1} - b$ і в момент часу $T_2 - 0$ її капітал складатиме

$$\left(Npe^{\delta T_1} - b\right) e^{\delta(T_2 - T_1)} = Npe^{\delta T_2} - be^{\delta(T_2 - T_1)}.$$

Необхідна умова нерозорення компанії в момент часу T_2 виражається нерівністю

$$Npe^{\delta T_2} - be^{\delta(T_2 - T_1)} > b. \qquad (5.11.3)$$

При виконанні цієї умови в момент часу T_2 компанія сплатить страхову виплату b і в момент часу $T_2 + 0$ (тобто після виплати) матиме суму

$$Npe^{\delta T_2} - be^{\delta(T_2 - T_1)} - b,$$

яка згідно з формулою (5.11.1) в момент часу $T_3 - 0$ перетвориться на суму

$$\left(Npe^{\delta T_2} - be^{\delta(T_2-T_1)} - b\right) e^{\delta(T_3-T_2)} = Npe^{\delta T_3} - be^{\delta(T_3-T_1)} - be^{\delta(T_3-T_2)}.$$

Вона повинна бути більшою за величину страхової виплати, тобто

$$Npe^{\delta T_3} - be^{\delta(T_3-T_1)} - be^{\delta(T_3-T_2)} > b. \qquad (5.11.4)$$

Тоді компанія в момент T_3 сплатить суму b і в момент часу $T_3 + 0$ її капітал складатиме

$$Npe^{\delta T_3} - be^{\delta(T_3-T_1)} - be^{\delta(T_3-T_2)} - b...$$

Продовжуючи таким чином міркування, дійдемо до висновку, що в момент часу $T_{N-1} - 0$ компанія матиме капітал

$$Npe^{\delta T_{N-1}} - be^{\delta(T_{N-1}-T_1)} - be^{\delta(T_{N-1}-T_2)} - ... - be^{\delta(T_{N-1}-T_{N-2})}.$$

Цей капітал повинен бути більшим b:

$$Npe^{\delta T_{N-1}} - be^{\delta(T_{N-1}-T_1)} - be^{\delta(T_{N-1}-T_2)} - ... - be^{\delta(T_{N-1}-T_{N-2})} > b. \qquad (5.11.5)$$

Тоді, сплативши страхову виплату в момент T_{N-1}, компанія матиме суму

$$Npe^{\delta T_{N-1}} - be^{\delta(T_{N-1}-T_1)} - be^{\delta(T_{N-1}-T_2)} - ... - be^{\delta(T_{N-1}-T_{N-2})} - b,$$

яка в момент $T_N - 0$ перетвориться на суму

$$\left(Npe^{\delta T_{N-1}} - be^{\delta(T_{N-1}-T_1)} - be^{\delta(T_{N-1}-T_2)} - ... - be^{\delta(T_{N-1}-T_{N-2})} - b\right) e^{\delta(T_N-T_{N-1})} =$$

$$= Npe^{\delta T_N} - be^{\delta(T_N-T_1)} - be^{\delta(T_N-T_2)} - ... - be^{\delta(T_N-T_{N-1})}.$$

Ця сума повинна бути *не меншою* за страхову виплату

$$Npe^{\delta T_N} - be^{\delta(T_N-T_1)} - be^{\delta(T_N-T_2)} - ... - be^{\delta(T_N-T_{N-1})} \geq b. \qquad (5.11.6)$$

Таким чином, необхідною і достатньою умовою нерозорення компанії є виконання нерівностей (5.11.2) – (5.11.6), тобто

$$Npe^{\delta T_k} > be^{\delta(T_k-T_1)} + be^{\delta(T_k-T_2)} + ... + be^{\delta(T_k-T_{k-1})} + b, \quad k = 1, \dots, N,$$

причому у випадку $k = N$ нерівність нестрога. Поділивши на $e^{\delta T_k}$, перепишемо цю систему нерівностей у вигляді

$$be^{-\delta T_1} + be^{-\delta T_2} + ... + be^{-\delta T_k} < Np, \quad k = 1, \dots, N$$

(у випадку $k = N$ нерівність нестрога). Зрозуміло, що для виконання всіх цих нерівностей необхідно і достатньо виконання останньої з них, тобто

$$b \sum_{k=1}^{N} e^{-\delta T_k} \leq Np.$$

Відповідно ймовірність розорення R компанії задається формулою

$$R = \left(\sum_{k=1}^{N} z_k > Np \right),$$

де $z_k = be^{-\delta T_k}$ – сучасна величина майбутньої страхової виплати при повному страхуванні життя. Ця формула цілком аналогічна формулі (4.2.1) для ймовірності розорення компанії при короткотерміновому страхуванні.

Таким чином, *при розрахунках імовірності розорення компанії за умов довготермінового страхування життя все відбувається так само, як і за умов короткотермінового страхування, якщо як індивідуальні позови ξ_k взяти сучасні величини майбутніх страхових виплат z_k.*

Оскільки випадкові величини T_k $(k = 1, \ldots, N)$ незалежні, то випадкові величини $z_k = e^{-\delta T_k}$ також незалежні. Тому розподіл суми

$$S = \sum_{k=0}^{N} z_k$$

можна знайти точно за допомогою методу згорток або методу твірних функцій. Але для великих N ці методи практично непридатні. Тоді розподіл суми S можна знайти наближено за допомогою методу Пуассона або методу Гаусса. Так, застосовуючи останній метод, отримаємо

$$R = P\{S > Np\} = P\left\{ \frac{S - MS}{\sqrt{DS}} > \frac{Np - MS}{\sqrt{DS}} \right\} = P\left\{S_N^* > a\right\} \approx 1 - F\left(a\right),$$

де $F(x)$ – функція розподілу нормального закону з параметрами 0 і 1,

$$a = \frac{Np - M\sum_{k=0}^{N} z_k}{\sqrt{D\sum_{k=0}^{N} z_k}} = \sqrt{N}\,\frac{p - Mz_k}{\sqrt{Dz_k}}.$$

Таким чином, для страхової виплати p, за якої ймовірність розорення компанії не перевищує $R = 1 - \alpha$ (де α близьке до 1), отримуємо рівняння

$$\sqrt{N}\,\frac{p - Mz_k}{\sqrt{Dz_k}} = x_\alpha,$$

де x_α знаходиться за допомогою таблиці функції $F(x)$ з умови $F(x_\alpha) = \alpha$. Звідси

$$p = Mz_k + x_\alpha \sqrt{\frac{Dz_k}{N}} = p_0 + x_\alpha \sqrt{\frac{Dz_k}{N}}. \tag{5.11.7}$$

У цій формулі $p_0 = Mz_k$ – нетто-премія, а $x_\alpha \cdot \sqrt{Dz_k/N}$ – страхова надбавка. Для відносної страхової надбавки θ маємо

$$\theta = x_\alpha \frac{\sqrt{Dz_k}}{Mz_k\sqrt{N}}.$$

5.12 Приклади розрахунків

Приклад 1. Припустимо, що інтенсивність процентів δ складає 15%. За умови рівномірного розподілу смертей використовуючи таблиці тривалості життя обчислити нетто-премію при укладанні договору 3-річного змішаного страхування життя людини у віці 25 років.

Розв'язання. Невідома нетто-премія позначається символом $\overline{A}_{25:\overline{3}|}$. Для її обчислення застосуємо формулу (5.6.3):

$$\overline{A}_{25:\overline{3}|} = \frac{ie^{24\delta}}{\delta l_{25}} \sum_{k=25}^{27} d_k e^{-\delta k} + e^{-3\delta} \frac{l_{28}}{l_{25}}.$$

Оскільки $e^{\delta} = e^{0.15} \approx 1.16$, $e^{-\delta} \approx 0.86$, $i = e^{\delta} - 1 \approx 0.16$, $d_{25} = 152$, $d_{26} = 159$, $d_{27} = 160$, $l_{28} = 96663$, $l_{25} = 97140$, то ми отримуємо $\overline{A}_{25:\overline{3}|} \approx 0.64$ (від величини страхової виплати).

Приклад 2. Припустимо, що тривалість життя описується за допомогою моделі де Муавра з граничним віком $\omega = 120$ років, а річна процентна ставка складає 15%. Підрахувати нетто-премію для людини у віці 40 років, якщо укладено договір:

а) повного страхування життя;

б) 5-річного страхування життя;

в) 5-річного змішаного страхування життя;

г) повного страхування, відкладеного на 2 роки;

д) повного страхування життя зі страховою виплатою, що неперервно збільшується.

Розв'язання. Як було з'ясовано в §2.5 залишковий час життя в моделі де Муавра рівномірно розподілений на відрізку $[0, \omega - x]$, тобто за умов даного прикладу щільність залишкового часу життя $p_x(t)$ задається формулою

$$p_x(t) = \frac{1}{80}$$

для $t \in [0, 80]$ і $p_x(t) = 0$ для $t \notin [0, 80]$.

Інтенсивність відсотків δ можна підрахувати за допомогою формули $i = e^{\delta} - 1$. Звідси $\delta \approx 0.14$.

а) за формулою (5.1.5)

$$\overline{A}_{40} = \int_0^{80} e^{-\delta t} \frac{1}{80} dt = -\frac{1}{80\delta} \left[e^{-\delta t}\right]_0^{80} = \frac{1 - e^{-80\delta}}{80\delta} \approx 0.089;$$

б) за формулою (5.5.2)

$$\overline{A}^{1}_{40:\overline{5}|} = \int_0^{5} e^{-\delta t} \frac{1}{80} dt = -\frac{1}{80\delta} \left[e^{-\delta t}\right]_0^{5} = \frac{1 - e^{-5\delta}}{80\delta} \approx 0.045;$$

в) за формулою (5.6.2)

$$\overline{A}_{40:5\rceil} = \int\limits_0^5 e^{-\delta t}\frac{1}{80}dt + e^{-5\delta}P\{T(80) > 5\} =$$

$$= \overline{A}^1_{40:5\rceil} + e^{-5\delta}\int\limits_5^{80}\frac{1}{80}dt = \overline{A}^1_{40:5\rceil} + \frac{75}{80}e^{-5\delta} \approx 0.51;$$

г) за формулою (5.7.2)

$${}_{2|}\overline{A}_{40} = \int\limits_2^{80} e^{-\delta t}\frac{1}{80}dt = -\frac{1}{80\delta}\left[e^{-\delta t}\right]_2^{80} = \frac{e^{-2\delta} - e^{-80\delta}}{80\delta} \approx 0.068;$$

д) за формулою (5.8.2)

$$\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_{40} = \int\limits_0^{80} te^{-\delta t}\frac{1}{80}dt = -\int\limits_0^{80}\frac{t}{80\delta}de^{-\delta t} =$$

$$= -\left[\frac{t}{80\delta}e^{-\delta t}\right]_0^{80} + \int\limits_0^{80} e^{-\delta t}\frac{1}{80\delta}dt = -\frac{e^{-80\delta}}{\delta} - \left[\frac{1}{80(\delta)^2}e^{-\delta t}\right]_0^{80} \approx 0.64.$$

Приклад 3. Страхова компанія уклала 1000 договорів повного страхування життя. Нехай залишковий час життя характеризується постійною інтенсивністю смертності $\mu_x = 0.04$, а інтенсивність процентів складає 6%.

Обчислити розмір премії p, яка гарантує 99-процентну ймовірність нерозорення компанії і знайти відносну страхову надбавку.

Розв'язання. Обчислимо спочатку розмір нетто-премії. Згідно з формулою (5.1.4)

$$\overline{A}_x = \int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t}p_x(t)dt,$$

де $p_x(t)$ – щільність залишкового часу життя. Оскільки нам відома інтенсивність смертності $\mu_x = 0.04$, то застосовуючи формулу (1.4.3), знайдемо функцію виживання

$$s(t) = e^{-\mu t},$$

і враховуючи формулу $p_x(t) = p(x+t)/s(x) = -s'(x+t)/s(x)$, обчислимо щільність залишкового часу життя:

$$p_x(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

Тепер отримуємо розмір нетто-премії:

$$p_0 = \overline{A}_x = \int\limits_0^\infty \mu e^{-(\mu+\delta)t} dt = \frac{\mu}{\mu+\delta} = \frac{0.04}{0.04+0.06} = 0.4.$$

Для обчислення невідомої премії p і страхової надбавки потрібно знайти дисперсію сучасної величини майбутньої страхової виплати. Це можна зробити за допомогою формули (5.1.8):

$$Dz = Mz^2 - (Mz)^2 = {}^{2\delta}\overline{A}_x - \left({}^{\delta}\overline{A}_x\right)^2 = \frac{\mu}{\mu+2\delta} - (0.4)^2 = 0.25 - 0.16 = 0.09.$$

Тепер за формулою (5.11.7) отримуємо

$$p = 0.4 + 2.33\sqrt{\frac{0.009}{1000}} \approx 0.42,$$

тобто премія p складає 42% від розміру страхової виплати (нагадаємо, що страхова виплата b була взята за одиницю).

На завершення знаходимо відносну страхову надбавку

$$\theta = \frac{p - p_0}{p_0} \approx 0.055.$$

Розділ 6

Перестрахування

6.1 Суть і різновиди договорів перестрахування

Фізичні та юридичні особи укладають договори страхування з метою позбутися ризику фінансових втрат, які можуть бути спричинені нещасним випадком або смертю даної особи. До укладання договору особа зазнає ризику, який може призвести до випадкових фінансових втрат ξ, а може і не призвести до них. Після укладання договору страхування застрахована особа звільняється від цього ризику, заплативши страховій компанії певну суму $p = (1 + \theta)M\xi$. Отже, укладаючи договір страхування, застрахований свідомо погоджується на порівняно невеликі фінансові витрати для того, щоб позбутися ризику фінансових втрат, які досить малоймовірні, але можуть бути значними для даної особи. Звичайно, ризик при цьому не зникає. Його бере на себе страхова компанія. Страхова компанія захищає себе від цього ризику, укладаючи велику кількість договорів і забезпечуючи малу ймовірність розорення. Але страхова компанія не може повністю позбутися ризику розорення. Завжди можливі, хоча і малоймовірні, дуже великі позови, які можуть спричинити до розорення компанії.

Таким чином, страхова компанія, яка уклала велику кількість договорів страхування, потрапляє в таку ж саму ситуацію, як і її клієнти до укладання договорів страхування. Щоб позбутися цього ризику розорення страхові компанії вдаються до того ж самого засобу, що і їх клієнти. А саме – вони страхують свої ризики в іншій страховій компанії. Такий вид страхування називається перестрахуванням. Компанія, яка укладає договір страхування з метою перестрахування свого ризику, називається *передавальною* компанією, а компанія, яка її страхує, називається *перестрахувальною.* Ўснує багато різновидів перестрахування залежно від виду розділення відповідальності між передавальною і перестрахувальною компаніями. При перестрахуванні можуть перестраховуватися як надто великі індивідуальні позови, так і підсумковий позов за певний проміжок часу, наприклад, за рік.

Розглянемо деякі види перестрахування.

1. *Пропорційне перестрахування* – це такий вид перестрахування, при якому передавальна компанія сплачує певну частку α, $0 \le \alpha \le 1$, кожного позову, а решту кожного позову сплачує перестрахувальна компанія. Параметр α називається *межею утримання.*

2. *Перестрахування перевищення втрат* – такий вид перестрахування,

при якому передавальна компанія сплачує всі індивідуальні позови, які не перевищують деякої фіксованої суми r; якщо ж індивідуальний позов ξ перевищує цю суму, то передавальна компанія сплачує суму r і подає позов до перестрахувальної компанії на суму $\xi - r$. Параметр r також називають *межею утримання.*

Зазначимо, що незважаючи на один і той же термін (межа утримання), що використовується для параметрів α і r, сенс цих параметрів різний.

3. *Перестрахування, що зупиняє втрати* – такий вид перестрахування, при якому передавальна компанія сплачує весь підсумковий позов за певний період (скажімо, за рік), якщо він не перевищує деякої фіксованої суми r; у разі, якщо підсумковий позов S перевищує цю суму, то передавальна компанія сплачує суму r і подає позов на решту суми $S - r$ до перестрахувальної компанії. Параметр r називають *франшизою.*

З погляду перестрахувальної компанії операція перестрахування виглядає як звичайне страхування. Перестрахувальна компанія за певну плату бере на себе ризик від передавальної компанії. Тому плата за перестрахування встановлюється з тих же міркувань, які використовувались за умов звичайного страхування. А саме – плата за перестрахування складає $p = (1+\theta)M\xi$, де ξ – позов до перестрахувальної компанії, а θ – відносна страхова надбавка, яка встановлюється перестрахувальною компанією, виходячи з малої ймовірності нерозорення.

Таким чином, договір перестрахування становить інтерес для актуарної математики тільки з погляду передавальної компанії. Тому будемо надалі вважати, що відносна страхова надбавка, яка встановлюється перестрахувальною компанією, фіксована (тому що предавальна компанія не має змоги регулювати цей параметр). Основна проблема аналізу договорів перестрахування полягає у виборі договору перестрахування й у визначенні основного параметра договору – межі утримання, оптимальної з погляду передавальної компанії.

6.2 Пропорційне перестрахування

Нехай θ^* (θ) – відносна страхова надбавка перестрахувальної (передавальної) компанії. З'ясуємо, якою має бути межа утримання α, $0 \le \alpha \le 1$, що забезпечує мінімальну ймовірність розорення передавальної компанії.

За умов пропорційного перестрахування частку $\alpha\xi$ від кожного індивідуального позову ξ сплачує передавальна компанія, а іншу частку $(1-\alpha)\xi$ – перестрахувальна компанія. Тому підсумковий позов до передавальної компанії $S = \sum_{k=0}^{N} \xi_k$ після перестрахування складає $\alpha S = \sum_{k=0}^{N} \alpha\xi_k$. Але одночасно зменшується і капітал компанії. До укладання договору перестрахування він дорівнював $(1+\theta)MS$. За укладання договору перестрахування передавальна компанія сплатила перестрахувальній суму $(1+\theta^*)(1-\alpha)MS$. Отже, після укладання договору капітал передавальної компанії складає

$$(1+\theta)MS - (1+\theta^*)(1-\alpha)MS =$$
$$= [\theta - \theta^* + \alpha(1+\theta^*)]MS.$$

При цьому ймовірність розорення дорівнюватиме

$$R = P\{\alpha S > [\theta - \theta^* + \alpha(1+\theta^*)]MS\} =$$
$$= P\{S > [(\theta - \theta^*)/\alpha + (1+\theta^*)]MS\}.$$

Ця ймовірність буде мінімальною тоді, коли величина $A := [(\theta - \theta^*)/\alpha + (1+\theta^*)]MS$ максимальна.

Нехай $\theta^* < \theta$. Зрозуміло, що тоді $A = \infty$ при $\alpha = 0$. Тобто, якщо перестрахувальна компанія встановлює меншу відносну страхову надбавку, ніж передавальна компанія, то передавальна компанія має перестрахувати всі договори для мінімізації ймовірності розорення, яка в цьому випадку дорівнюватиме нулю. Але треба враховувати, що при цьому знизиться прибуток компанії. Якщо до перестрахування він дорівнював θMS, то після перестрахування всіх договорів він складатиме $(\theta - \theta^*)MS$.

Нехай $\theta^* > \theta$. Тоді A буде максимальним при $\alpha = 1$. Це означає, що у випадку, коли перестрахувальна компанія встановлює більшу відносну страхову надбавку, ніж передавальна компанія, передавальна компанія має взагалі утриматись від перестрахування з метою мінімізації ймовірності розорення.

Нарешті, у випадку $\theta^* = \theta$ ймовірність розорення передавальної компанії взагалі не залежить від α.

6.3 Перестрахування перевищення втрат

За умов цього виду перестрахування кожний індивідуальний позов ξ перетворюється на позов $\xi^{(r)} = \min\{\xi, r\}$ до передавальної компанії і на позов $\xi - \xi^{(r)} = \max\{\xi - r, 0\}$ до перестрахувальної компанії.

Якщо передавальна компанія перестрахувала N однотипних договорів, то індивідуальні позови ξ_k, $k = 1, \ldots, N$, є незалежними, однаково розподіленими величинами, а підсумковий позов $S = \sum_{k=0}^{N} \xi_k$ зменшується і дорівнює $S = \sum_{k=0}^{N} \xi_k^{(r)}$. Водночас тим зменшиться і капітал компанії. До укладання договорів перестрахування він дорівнював $Np = N(1+\theta)p_0$, де $p_0 = M\xi$ – нетто-премія, а θ – відносна страхова надбавка передавальної компанії. За перестрахування передавальна компанія сплатила суму $N(1+\theta^*)(M\xi - M\xi^{(r)})$, де θ^* – відносна страхова надбавка перестрахувальної компанії. Тому після заключення N договорів перестрахування капітал передавальної компанії складатиме

$$N(1+\theta)M\xi - N(1+\theta^*)(M\xi - M\xi^{(r)}) =$$
$$= N(\theta - \theta^*)M\xi + N(1+\theta^*)M\xi^{(r)},$$

а ймовірність розорення дорівнюватиме

$$R = P\{S^{(r)} > N(\theta - \theta^*)M\xi + N(1+\theta^*)M\xi^{(r)}\}.$$

За допомогою центральної граничної теореми ми зможемо наближено знайти цю ймовірність:

$$R = P\left\{\frac{S^{(r)} - NM\xi^{(r)}}{\sqrt{ND\xi^{(r)}}} > \frac{N(\theta-\theta^*)M\xi + N\theta^* M\xi^{(r)}}{\sqrt{ND\xi^{(r)}}}\right\} \approx$$

$$\approx 1 - F\left(\sqrt{N}\frac{(\theta-\theta^*)M\xi + \theta^* M\xi^{(r)}}{\sqrt{D\xi^{(r)}}}\right), \tag{6.3.1}$$

де $F(x)$ – функція розподілу нормального закону з параметрами 0 і 1. Тому для мінімізації ймовірності рйозорення R треба знайти максимум аргументу функції $F(x)$ у правій частині формули (6.3.1). Таким чином, питання про доцільність перестрахування і про оптимальну межу утримання r зводиться до обчислення найбільшого значення функції

$$\varphi(r) := \frac{([\theta-\theta^*)M\xi + \theta^* M\min\{\xi, r\}]^2}{D\min\{\xi, r\}}$$

на півосі $[0, \infty]$ і знаходження точки її глобального максимуму.

Зазначимо, що коли цей максимум досягається при $r = \infty$, то перестрахування недоцільне; якщо ж максимум досягається в точці $r = 0$, то передавальна компанія має перестрахувати весь портфель договорів.

Приклади дослідження цієї функції в конкретних ситуаціях наведені в наступному параграфі.

6.4 Приклади розрахунків

Приклад 1. Припустимо, що страхова компанія уклала $N = 10000$ однотипових договорів страхування життя терміном на 1 рік. Відповідно до умов договору компанія сплачує 10^6 грн у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку, 10^5 грн у випадку його смерті з природних причин і не сплачує нічого, якщо застрахований доживе до кінця року. Ўмовірність смерті від нещасного випадку дорівнює $5 \cdot 10^{-4}$, а ймовірність смерті з природних причин – $2 \cdot 10^{-3}$.

Припустимо, що компанія бажає встановити таку премію, яка забезпечує 95-відсоткову ймовірність нерозорення. Припустимо також, що компанія вирішує перестрахувати всі позови, що перевищують 10^5 грн.

Відомо, що відносна страхова надбавка перестрахувальної компанії складає 60%.

Вивчити питання про доцільність перестрахування.

Мінімізувати ймовірність розорення компанії і знайти оптимальну межу утримання в проміжку $[10^5$ до $10^6]$.

Розв'язання. За умов прикладу індивідуальний позов має такий розподіл:

ξ :

10^6	10^5	0
$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 - 25 \cdot 10^{-4}$

Тоді середнє значення індивідуального позову (тобто нетто-премія p_0) складає

$$p_0 = M\xi = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 500 + 200 = 700,$$

а дисперсія

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{10} - 700^2 =$$

$$= 5 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^7 - 49 \cdot 10^4 \approx 5.2 \cdot 10^8.$$

За формулою (5.11.7) знаходимо премію p, яка забезпечує 95-відсоткову ймовірність нерозорення

$$p = Mz_k + x_{0.95}\sqrt{\frac{Dz_k}{N}} =$$

$$= 700 + \frac{1.645 \cdot \sqrt{5.2} \cdot 10^4}{10^2} \approx 1075 \quad ,$$

а відносна страхова надбавка

$$\theta = \frac{x_{0.95}}{M\xi}\sqrt{\frac{Dz_k}{N}} = \frac{1.645 \cdot \sqrt{5.2} \cdot 10^4}{10^2 \cdot 700} \approx 3.59\%.$$

Оскільки межа утримання $r = 10^5$, то для передавальної компанії індивідуальний позов ξ перетворюється на позов $\xi^{(r)}$ з розподілом

$\xi^{(r)}$:

10^5	0
$25 \cdot 10^{-4}$	$1 - 25 \cdot 10^{-4}$

Середнє значення і дисперсія індивідуальних позовів тепер дорівнюють

$$M\xi^{(r)} = 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 250,$$

$$D\xi^{(r)} = (25 \cdot 10^{-4} - (25 \cdot 10^{-4})^2) \cdot 10^{10} \approx 25 \cdot 10^6.$$

Капітал компанії до перестрахування складав $Np \approx 10750000$ грн. Обчислимо капітал компанії після перестрахування. Він зменшиться на суму, яка дорівнює виплаті за перестрахування. Щоб обчислити розмір цієї виплати, зазначимо, що для перестрахувальної компанії індивідуальні позови мають такий розподіл:

$\xi - \xi^{(r)}$:

$9 \cdot 10^5$	0
$5 \cdot 10^{-4}$	$1 - 5 \cdot 10^{-4}$

Його середнє значення дорівнює $9 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 450$ грн (це значення можна було б обчислити також як різницю $M\xi - M\xi^{(r)}$). Тому плата за перестрахування дорівнює $10000 \cdot 1.6 \cdot 450 = 7200000$. Таким чином, після перестрахування капітал компанії дорівнюватиме $u^{(r)} = 10750000 - 7200000 = 3550000$.

Обчислимо нарешті ймовірність розорення передавальної компанії після перестрахування. Вона дорівнює

$$P\{S^{(r)} > 3550000\} =$$

$$= P\left\{\frac{S^{(r)} - MS^{(r)}}{\sqrt{DS^{(r)}}} > \frac{3550000 - MS^{(r)}}{\sqrt{DS^{(r)}}}\right\} \approx$$

$$\approx 1 - F\left(\frac{3550000 - 2500000}{5 \cdot 10^3 \cdot 100}\right) = 1 - F(2.1) \approx 0.018.$$

Таким чином, за рахунок перестрахування ймовірність розорення знизилась з 5% до 1.8%. Звичайно, це стало можливим за рахунок втрати деякої частини прибутку. Якщо до перестрахування прибуток дорівнював $Np - Np_0 = 1075 \cdot 10^4 - 700 \cdot 10^4 = 375 \cdot 10^4$, то після перестрахування він зменшиться на очікуваний підсумковий позов (тобто на $NM\xi^{(r)}$) і складатиме $\varepsilon^{(r)} = u^{(r)} - MS^{(r)} = 3550000 - 250 \cdot 10^4 = 105 \cdot 10^4$.

Враховуючи ці два чинники (зменшення ймовірності розорення і зменшення прибутку), компанія приймає рішення про доцільність перестрахування.

Знайдемо тепер оптимальну (на проміжку $[10^5, 10^6]$) межу утримання r з погляду мінімальної ймовірності розорення компанії. Для спрощення розрахунків візьмемо 10^5 грн за одиницю виміру грошей. Тепер r змінюється на проміжку $[0, 10]$, а розподіл індивідуального позову $\xi^{(r)}$ до передавальної компанії має вигляд

$\xi^{(r)}$:

1	r	0
$20 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 - 25 \cdot 10^{-4}$

Його середнє значення і дисперсія дорівнюють

$$M\xi^{(r)} = 1 \cdot 20 \cdot 10^{-4} + r \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4} \cdot (r + 4),$$

$$D\xi^{(r)} = 1^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} + r^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} - 25 \cdot 10^{-8} \cdot (r + 4)^2 \approx 5(r^2 + 4) \cdot 10^{-4}.$$

Середнє значення індивідуального позову до перестрахувальної компанії дорівнює

$$M\xi - M\xi^{(r)} = 700 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-4}(r + 4) = 5 \cdot 10^{-4} \cdot (10 - r)$$

і тому плата за перестрахування одного позову дорівнює

$$1.6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}(10 - r) = 8 \cdot 10^{-4}(10 - r).$$

Середнє значення і дисперсія підсумкового позову $S^{(r)}$ складають

$$MS^{(r)} = NM\xi^{(r)} = 5 \cdot (r + 4),$$

$$DS^{(r)} = ND\xi^{(r)} \approx 5 \cdot (r^2 + 4).$$

Підсумкова виплата за перестрахування всіх позовів дорівнює

$$10^4 \cdot 8 \cdot 10^{-4}(10 - r) = 8 \cdot (10 - r)$$

і тому капітал компанії після перестрахування складатиме

$$u^{(r)} = Np - 8 \cdot (10 - r) =$$

$$= 107.5 - 8 \cdot (10 - r) = 27.5 + 8r.$$

Тепер знайдемо ймовірність розорення $R^{(r)}$ компанії:

$$R^{(r)} = P\{S^{(r)} > u^{(r)}\} =$$

$$= P\left\{\frac{S^{(r)} - MS^{(r)}}{\sqrt{DS^{(r)}}} > \frac{u^{(r)} - MS^{(r)}}{\sqrt{DS^{(r)}}}\right\} \approx$$

$$\approx 1 - F\left(\frac{u^{(r)} - MS^{(r)}}{\sqrt{DS^{(r)}}}\right) = 1 - F\left(\frac{7.5 + 3r}{\sqrt{5r^2 + 20}}\right).$$

Таким чином, для мінімізації ймовірності розорення треба вибрати параметр r так, щоб функція

$$h(r) = \frac{(7.5 + 3r)^2}{5r^2 + 20}$$

набула максимального значення. Оскільки

$$h'(t) = \frac{2(7.5 + 3r)(12 - 7.5r)}{25(r^2 + 4)^2},$$

оптимальне значення r дорівнює $12/7.5 = 1.6$, тобто в абсолютних цифрах $r = 1.6 \cdot 10^5 = 160000$ грн. При цьому $\sqrt{h(1.6)} \approx 2.15$, а тому ймовірність розорення компанії складає $1 - F(2.15) \approx 0.016$, тобто 1.6%.

Середній прибуток компанії при такій межі утримання дорівнює

$$u^{(r)} - MS^{(r)} = 7.5 + 3r = 12.3,$$

тобто $12.3 \cdot 10^5 = 1230000$ грн.

Таким чином, у порівнянні з межею утримання $r = 10^5$ зменшилася ймовірність розорення і збільшився очікуваний прибуток компанії.

Приклад 2. Портфель компанії складається з $N = 20000$ договорів страхування життя терміном на 1 рік. Відповідно до умов договору компанія сплачує певну суму у випадку смерті застрахованого протягом року і не сплачує нічого, якщо застрахований доживе до кінця року. Ймовірність смерті кожного із застрахованих дорівнює $q = 0.01$. З усіх застрахованих $N_1 = 10000$ уклали договір на суму $b_1 = 100000$ грн кожний, $N_2 = 5000$ – на суму $b_2 = 200000$ грн кожний, $N_3 = 4000$ – на суму $b_3 = 500000$ грн кожний, $N_4 = 1000$ – на суму $b_4 = 1000000$ грн кожний. Компанія встановила відносну страхову надбавку в розмірі $\theta = 15\%$.

Вивчити питання про доцільність перестрахування, якщо межа утримання $r = 500000$ грн, а відносна страхова надбавка перестрахувальної компанії θ^* складає 20%.

Розв'язання. Підрахуємо спочатку ймовірність розорення і очікуваний прибуток компанії до перестрахування. Кожний індивідуальний позов ξ_i має такий розподіл:

$$\xi_i : \quad \begin{array}{|c|c|} \hline b_i & 0 \\ \hline q & 1-q \\ \hline \end{array}$$

Розмір страхової виплати b_i, $i = 1, 2, 3, 4$, у кожній з 4 груп різний. Тому для обчислення середнього значення MS та дисперсії DS підсумкового позову S обчислимо спочатку $M\xi_i$ та $D\xi_i$ у кожній із груп. Зрозуміло, що $M\xi_i = q \cdot b_i$, а $D\xi_i = q(1-q) \cdot b_i^2$. Середні значення та дисперсії підсумкових позовів у групах складають $N_i \cdot q \cdot b_i$ і $N_i \cdot q(1-q) \cdot b_i^2$. Отже,

$$MS = \sum_{i=0}^{4} N_i \cdot q \cdot b_i,$$

$$DS = \sum_{i=0}^{4} N_i \cdot q(1-q) \cdot b_i^2.$$

Результати розрахунків наведені нижче в таблиці, останній стовбець якої містить остаточні результати для початкової групи всіх застрахованих.

Номер групи	1	2	3	4	початкова група
Кількість застрахованих	10000	5000	4000	1000	20000
Розмір страхової виплати	100000	200000	500000	1000000	
Середній підсумк. позов у групі	10^7	10^7	$2 \cdot 10^7$	10^7	$5 \cdot 10^7$
Дисперсія підсумкового позову	$99 \cdot 10^{10}$	$198 \cdot 10^{10}$	$990 \cdot 10^{10}$	$990 \cdot 10^{10}$	$2277 \cdot 10^{10}$

Загальна сума u, отримана компанією у вигляді страхових премій (тобто капітал компанії), дорівнює $u = (1+\theta)MS = 5.75 \cdot 10^7$, а очікуваний прибуток

$$\varepsilon = u - MS = \theta MS = 0.15 \cdot 5 \cdot 10^7 = 7.5 \cdot 10^6 \quad .$$

Обчислимо тепер імовірність розорення компанії R:

$$R = P\{S > u\} =$$

$$= P\left\{\frac{S - MS}{\sqrt{DS}} > \frac{u - MS}{\sqrt{DS}}\right\} \approx$$

$$\approx 1 - F\left(\frac{u - MS}{\sqrt{DS}}\right) \approx 1 - F(1.57) \approx 0.0582.$$

Після перестрахування з межею утримання $r = 500000$ грн позови розмірами $b_3 = 500000$ грн і $b_4 = 1000000$ грн перетворюються для передавальної компанії на позови однакового розміру $r = 500000$ грн. Тому договори цих двох груп можна об'єднати в одну групу. Дві інші групи залишаються незмінними. Таблиця розрахунків після перестрахування набуває такого вигляду:

Номер групи	1	2	3	початкова група
Кількість застрахованих	10000	5000	5000	20000
Розмір страхової виплати	100000	200000	500000	
Середній підсумковий позов у групі	10^7	10^7	$2.5 \cdot 10^7$	$4.5 \cdot 10^7$
Дисперсія підсумкового позову	$99 \cdot 10^{10}$	$198 \cdot 10^{10}$	$1237.5 \cdot 10^{10}$	$1534.5 \cdot 10^{10}$

Середній підсумковий позов до перестрахувальної компанії дорівнює різниці $MS - MS^{(r)} = 5 \cdot 10^7 - 4.5 \cdot 10^7 = 0.5 \cdot 10^7$. Тому плата за перестрахування дорівнює $(1+\theta^*)(MS - MS^{(r)}) 1.2 \cdot 0.5 \cdot 10^7 = 0.6 \cdot 10^7$. Отже, капітал компанії після перестрахування $u^{(r)}$ дорівнює $5.75 \cdot 10^7 - 0.6 \cdot 10^7 = 5.15 \cdot 10^7$ і тому очікуваний прибуток $\varepsilon^{(r)}$ складатиме $\varepsilon^{(r)} = u^{(r)} - Mu^{(r)} = 5.15 \cdot 10^7 - 4.5 \cdot 10^7 = 6.5 \cdot 10^6$ грн.

Для ймовірності розорення $R^{(r)}$ після перестрахування маємо

$$R^{(r)} = P\{S^{(r)} > u^{(r)}\} =$$

$$= P\left\{\frac{S^{(r)} - MS^{(r)}}{\sqrt{DS^{(r)}}} > \frac{u - MS^{(r)}}{\sqrt{DS^{(r)}}}\right\} \approx$$

$$\approx 1 - F\left(\frac{u^{(r)} - MS^{(r)}}{\sqrt{DS^{(r)}}}\right) \approx 1 - F(1.66) \approx 0.0485.$$

Таким чином, перестрахування зменшило ймовірність розорення з 5.82% до 4.85%. Але це було досягнуто за рахунок зменшення очікуваного прибутку з $7.5 \cdot 10^6$ грн до $6.5 \cdot 10^6$ грн.

Розділ 7

Контрольні роботи

Контрольна робота 1

Варіант 1

1. Використовуючи таблицю тривалості життя, обчисліть імовірність того, що за припущенням Балдуччі людина віком 80 років помре у віковому проміжку $(80.5, 81.5)$.

2. Використовуючи таблицю функції виживання, знайдіть імовірність того, що залишковий час життя (50) лежить у проміжку від 10 років до 20 років.

3. Нехай смертність у віковому проміжку $(34, 37)$ задається формулою $\mu_x = 0.004x$. Знайдіть ${}_{2|}q_{34}$.

4. Припустимо, що $T(x) < 1$. Обчисліть середній залишковий час життя (60) у припущенні про рівномірний розподіл смертей.

5. Нехай тривалість життя описується за допомогою моделі де Муавра. Знайдіть розмір нетто-премії у випадку повного страхування життя з виплатою в кінці року смерті.

Варіант 2

1. Використовуючи таблицю тривалості життя, обчисліть імовірність того, що в припущенні про рівномірний розподіл смертей людина віком 80 років помре у віковому проміжку $(80.5, 81.5)$.

2. Використовуючи таблицю функції виживання, знайдіть імовірність того, що залишковий час життя (40) лежить у проміжку від 50 років до 60 років.

3. Нехай смертність у віковому проміжку $(34, 37)$ задається формулою $\mu_x = 0.005x$. Знайдіть ${}_{2|}q_{35}$.

4. Припустимо, що $T(x) < 1$. Обчисліть середній залишковий час життя (70) у припущенні про постійну інтенсивність смертності.

5. Нехай тривалість життя описується за допомогою моделі де Муавра. Знайдіть розмір нетто-премії у випадку повного страхування життя зі змінною величиною страхової виплати.

Варіант 3

1. Використовуючи таблицю тривалості життя, обчисліть імовірність того, що в припущенні про постійну інтенсивність смертності людина віком 70 років помре у віковому проміжку $(70.5, 71.5)$.

2. Припустимо, що тривалість життя описується формулою $s(x) = \sqrt{1 - x/100}, \quad 0 \leq x \leq 100$. Знайдіть імовірність того, що людина віком 40 років помре протягом найближчого року.

3. Використовуючи таблицю функції виживання, знайдіть середнє і дисперсію числа представників початкової групи з l_0 новонароджених, які помруть у віці від 50 до 70 років.

4. Нехай $T(60) < 1$. Обчисліть середній залишковий час життя (60) у припущенні Балдуччі.

5. Нехай тривалість життя описується за допомогою моделі де Муавра. Знайдіть розмір нетто-премії у випадку n-річного страхування життя людини у віці x років.

Варіант 4

1. Використовуючи таблицю тривалості життя, обчисліть ймовірність того, що у припущенні про постійну інтенсивність смертності людина віком 75 років помре у віковому проміжку $(75.5, 76.5)$.

2. Припустимо, що тривалість життя описується формулою $s(x) = \sqrt{1 - x/120}, \quad 0 \leq x \leq 120$. Знайдіть імовірність того, що людина віком 60 років помре протягом найближчого року.

3. Використовуючи таблицю функції виживання, знайдіть середнє і дисперсію кількості представників початкової групи з l_0 новонароджених, які помруть у віці від 60 до 80 років.

4. Нехай $T(70) < 1$. Обчисліть середній залишковий час життя (70) у припущенні Балдуччі.

5. Нехай тривалість життя описується за допомогою моделі де Муавра. Знайдіть розмір нетто-премії у випадку n-річного змішаного страхування життя людини у віці x років.

Варіант 5

1. Використовуючи таблицю тривалості життя, обчисліть ймовірність того, що в припущенні Балдуччі людина віком 80 років помре у віковому проміжку $(80.5, 82.5)$.

2. Припустимо, що тривалість життя описується формулою $s(x) = \sqrt{1 - x/120}, \quad 0 \leq x \leq 120$. Знайдіть середній залишковий час життя людини віком 70 років.

3. Нехай $T(60) < 1$. Обчисліть середній залишковий час життя (60) у припущенні про постійну інтенсивність смертності.

4. Обчисліть середній залишковий час життя (x) за умови $T(x) < 1$ у припущенні про рівномірний розподіл смертей.

5. Нехай тривалість життя описується за допомогою моделі де Муавра. Знайдіть розмір нетто-премії у випадку страхування, відкладеного на m років, людини у віці x років.

Контрольна робота 2

Варіант 1

1. За допомогою методу згорток знайдіть функцію розподілу підсумкового позову до компанії, яка уклала 3 однакових договори страхування на рік. За умовою договору виплата у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку дорівнює 400 дол., а у випадку смерті з природних причин – 200 дол. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.01, а з природних причин – 0.5.

2. Портфель компанії складається з 5000 договорів страхування на рік. За умовою договору компанія сплачує 1000 дол. у разі смерті від нещасного випадку або 500 дол., якщо смерть настала з природних причин. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.001, а з природних причин – 0.01. Обчисліть розмір премії, що забезпечує 95-відсоткову ймовірність нерозорення компанії. Визначте величину відносної страхової надбавки.

3. Нехай тривалість життя описується за допомогою моделі де Муавра з граничним віком $\omega = 110$ років, а річна процентна ставка складає 15%. Чому дорівнює нетто-премія для людини віком 50 років, якщо укладається договір 5-річного змішаного страхування життя?

4. Портфель компанії складається з 1500 договорів 3-річного змішаного страхування життя. Вік усіх застрахованих – 50 років. Обчислити розмір премії, що гарантує 97-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні про рівномірний розподіл смертей, якщо інтенсивність процентів $\delta = 10\%$. Знайдіть відносну страхову надбавку.

Варіант 2

1. За допомогою методу згорток знайдіть функцію розподілу підсумкового позову до компанії, яка уклала 3 однакових договори страхування на рік. За умовою договору виплата у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку дорівнює 500 дол., а у випадку смерті з природних причин – 250 дол. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.02, а з природних причин – 0.4.

2. Портфель компанії складається з 2000 договорів короткотермінового страхування. За умовою договору страхова виплата дорівнює 500 дол. у разі смерті застрахованого протягом року. Ймовірність смерті протягом року кожного із застрахованих дорівнює 0.01. Застосовуючи метод Гаусса, обчисліть розмір премії, що забезпечує 95-відсоткову ймовірність нерозорення компанії. Визначіть розмір страхової і відносної страхової надбавок.

3. За умови рівномірного розподілу смертей знайдіть нетто-премію для людини віком 50 років, якщо укладається договір 5-річного страхування життя, а річна процентна ставка складає 15%.

4. Портфель компанії складається з 1000 договорів 3-річного змішаного страхування життя. Вік усіх застрахованих – 50 років. Обчисліть розмір премії, що гарантує 95-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні про рівномірний розподіл смертей, якщо річна процентна ставка складає 15%. Знайдіть відносну страхову надбавку.

Варіант 3

1. За допомогою методу твірних функцій знайдіть функцію розподілу підсумкового позову до компанії, яка уклала 3 однакових договори страхування на рік. За умовою договору виплата у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку дорівнює 500 дол., а у випадку смерті з природних причин – 250 дол. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.1, а з природних причин – 0.24.

2. Портфель компанії складається з 2000 договорів короткотермінового страхування. За умовою договору страхова виплата дорівнює 500 дол. у разі смерті застрахованого протягом року. Ймовірність смерті протягом року кожного із застрахованих дорівнює 0.01. Застосовуючи метод Пуассона, обчисліть розмір премії, що забезпечує 95-відсоткову ймовірність нерозорення компанії. Визначіть розмір страхової і відносної страхової надбавок.

3. За умови рівномірного розподілу смертей знайдіть нетто-премію для людини віком 60 років, якщо укладається договір 4-річного змішаного страхування життя, а річна процентна ставка складає 15%.

4. Портфель компанії складається з 1000 договорів 3-річного змішаного страхування життя. Вік усіх застрахованих – 40 років. Обчисліть розмір премії, що гарантує 96-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні про рівномірний розподіл смертей, якщо інтенсивність процентів складає 0.1. Визначіть розмір відносної страхової надбавки.

Варіант 4

1. За допомогою методу твірних функцій знайдіть функцію розподілу підсумкового позову до компанії, яка уклала 3 однакових договори страхування на рік. За умовою договору виплата у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку дорівнює 500 дол., а у випадку смерті з природних причин – 250 дол. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.1, а з природних причин – 0.3.

2. Портфель компанії складається з 2000 договорів короткотермінового страхування. За умовою договору страхова виплата дорівнює 500 дол. у разі смерті застрахованого протягом року. Ймовірність смерті протягом року кожного із застрахованих дорівнює 0.002. Застосовуючи метод Пуассона, обчисліть розмір премії, що забезпечує 95-відсоткову ймовірність нерозорення компанії. Визначіть розмір страхової і відносної страхової надбавок.

3. Припустимо, що крива смертей задається законом Ерланга з середньою тривалістю життя 70 років, а інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Знайдіть нетто-премію для людини віком 30 років, якщо укладається договір повного страхування життя.

4. Портфель компанії складається з 600 договорів 4-річного змішаного страхування життя. Вік усіх застрахованих – 40 років. Обчисліть розмір премії, що гарантує 98-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні про рівномірний розподіл смертей, якщо річна процентна ставка складає 15%. Визначіть розмір відносної страхової надбавки.

Варіант 5

1. За допомогою методу твірних функцій знайдіть функцію розподілу підсумкового позову до компанії, яка уклала 3 однакових договори страхування на рік. За умовою договору виплата у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку дорівнює 400 дол., а у випадку смерті з природних причин – 200 дол. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.01, а з природних причин – 0.05.

2. Портфель компанії складається з 2000 договорів короткотермінового страхування. За умовою договору страхова виплата дорівнює 1500 дол. у разі смерті застрахованого протягом року. Ймовірність смерті протягом року кожного із застрахованих дорівнює 0.002. Застосовуючи метод Пуассона, обчисліть розмір премії, що забезпечує 95-відсоткову ймовірність нерозорення компанії. Визначте розмір страхової і відносної страхової надбавок.

3. Припустимо, що крива смертей задається законом Ерланга з середньою тривалістю життя 70 років, а інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Знайдіть нетто-премію для людини віком 40 років, якщо укладається договір повного страхування життя.

4. Портфель компанії складається з 2000 договорів 4-річного змішаного страхування життя. Вік усіх застрахованих 40 років. Обчисліть розмір премії, що гарантує 96-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні про рівномірний розподіл смертей, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.15%. Визначте розмір відносної страхової надбавки.

Контрольна робота 3

Варіант 1

1. Компанія уклала 2000 договорів 3-річного страхування життя. Вік усіх застрахованих – 40 років. Знайдіть розмір премії, яка забезпечить 96-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні про рівномірний розподіл смертей, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Обчисліть страхову і відносну страхову надбавки.

2. Портфель компанії складається з 1000 договорів страхування відкладеного на 5 років. Нехай залишковий час життя характеризується постійною інтенсивністю смертності $\mu = 0.03$. Визначте розмір премії, яка гарантує, що ймовірність розорення компанії не перевищуватиме 2%, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Обчисліть відносну страхову надбавку.

3. Портфель компанії складається з 3000 договорів короткотермінового страхування. Ймовірність смерті протягом року для кожного із застрахованих дорівнює 0.01. Із 3000 клієнтів 1000 уклали договір на суму 1000 дол. кожний, 500 осіб – на суму 2000 дол. кожний, ще 500 осіб – на суму 5000 дол. кожний, і 1000 осіб – на суму 10000 дол. кожний. Проаналізуйте питання про доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 5000 дол., якщо відносна страхова надбавка передавальної компанії 15%, а перестрахувальної – 20%.

4. Компанія уклала 1000 договорів короткотермінового страхування. За умовою компанія сплачує 1000 дол. у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку і 500 дол. у випадку його смерті протягом

року з природних причин. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.001, а з природних причин – 0.01. Компанія встановлює таку премію, щоб імовірність її розорення не перевищила 3%. Проаналізуйте доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 500 дол., якщо відносна страхова надбавка перестрахувальної компанії складає 15%. Визначте оптимальну межу утримання.

Варіант 2

1. Компанія уклала 1000 договорів 3-річного страхування життя. Вік усіх застрахованих – 30 років. Знайдіть розмір премії, яка забезпечить 97-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні про рівномірний розподіл смертей, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Обчисліть страхову і відносну страхову надбавки.

2. Портфель компанії складається з 500 договорів 5-річного страхування. Нехай залишковий час життя характеризується постійною інтенсивністю смертності $\mu = 0.02$. Визначте розмір премії, яка гарантує, що ймовірність розорення компанії не перевищуватиме 3%, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Обчисліть відносну страхову надбавку.

3. Портфель компанії складається з 3000 договорів короткотермінового страхування. Ймовірність смерті протягом року для кожного із застрахованих дорівнює 0.005. Із 3000 клієнтів 1000 уклали договір на суму 1000 дол. кожний, 1000 осіб – на суму 2000 дол. кожний, 500 осіб – на суму 3000 дол. кожний, і 500 осіб – на суму 4000 дол. кожний. Проаналізуйте питання про доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 3000 дол., якщо відносна страхова надбавка передавальної компанії 10%, а перестрахувальної – 15%.

4. Компанія уклала 2000 договорів короткотермінового страхування. За умовою компанія сплачує 1500 дол. у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку і 1000 дол. у випадку його смерті протягом року з природних причин. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.002, а з природних причин – 0.01. Компанія встановлює таку премію, щоб імовірність її розорення не перевищила 3%. Проаналізуйте доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 1000 дол., якщо відносна страхова надбавка перестрахувальної компанії складає 20%. Визначте оптимальну межу утримання.

Варіант 3

1. Компанія уклала 2000 договорів повного страхування життя. Вік усіх застрахованих – 35 років. Знайдіть розмір премії, яка забезпечить 94-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні, що крива смертей задається законом Ерланга із середньою тривалістю життя 80 років, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Обчисліть страхову і відносну страхову надбавки.

2. Портфель компанії складається з 1000 договорів 5-річного страхування. Нехай залишковий час життя характеризується постійною інтенсивністю смертності $\mu = 0.03$. Визначте розмір премії, яка гарантує, що ймовірність розорення компанії не перевищуватиме 3%, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Обчисліть відносну страхову надбавку.

3. Портфель компанії складається з 2000 договорів короткотермінового страхування. Ймовірність смерті протягом року для кожного із застрахованих дорівнює 0.02. Із 2000 клієнтів 1200 уклали договір на суму 10000 дол. кожний, 400 осіб – на суму 20000 дол. кожний, 300 осіб – на суму 30000 дол. кожний, і 100 осіб – на суму 40000 дол. кожний. Проаналізуйте питання про доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 30000 дол., якщо відносна страхова надбавка передавальної компанії 10%, а перестрахувальної – 15%.

4. Компанія уклала 3000 договорів короткотермінового страхування. За умовою компанія сплачує 1000 дол. у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку і 500 дол. у випадку його смерті протягом року з природних причин. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.003, а з природних причин – 0.01. Компанія встановлює таку премію, щоб ймовірність її розорення не перевищила 5%. Проаналізуйте доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 700 дол., якщо відносна страхова надбавка перестрахувальної компанії складає 12%. Визначте оптимальну межу утримання.

Варіант 4

1. Компанія уклала 1000 договорів повного страхування життя. Вік усіх застрахованих – 25 років. Знайдіть розмір премії, яка забезпечить 97-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні, що крива смертей задається законом Ерланга із середньою тривалістю життя 80 років, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.15. Обчисліть страхову і відносну страхову надбавки.

2. Портфель компанії складається з 1000 договорів 5-річного змішаного страхування. Нехай залишковий час життя характеризується постійною інтенсивністю смертності $\mu = 0.03$. Визначте розмір премії, яка гарантує, що ймовірність розорення компанії не перевищуватиме 4%, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Обчисліть відносну страхову надбавку.

3. Портфель компанії складається з 3000 договорів короткотермінового страхування. Ймовірність смерті протягом року для кожного із застрахованих дорівнює 0.01. Із 3000 клієнтів 1000 уклали договір на суму 5000 дол. кожний, 500 осіб – на суму 10000 дол. кожний, 500 осіб – на суму 20000 дол. кожний, і 1000 осіб – на суму 50000 дол. кожний. Проаналізуйте питання про доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 20000 дол., якщо відносна страхова надбавка передавальної компанії 10%, а перестрахувальної – 15%.

4. Компанія уклала 1000 договорів короткотермінового страхування. За умовою компанія сплачує 500 дол. у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку і 250 дол. у випадку його смерті протягом року з природних причин. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.005, а з природних причин – 0.01. Компанія встановлює таку премію, щоб імовірність її розорення не перевищила 5%. Проаналізуйте доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 300 дол., якщо відносна страхова надбавка перестрахувальної компанії складає 15%. Визначте оптимальну межу утримання.

Варіант 5

1. Компанія уклала 1000 договорів повного страхування життя. Вік усіх застрахованих – 30 років. Знайдіть розмір премії, яка забезпечить 95-відсоткову ймовірність нерозорення компанії в припущенні, що крива смертей задається законом Ерланга із середньою тривалістю життя 80 років, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Обчисліть страхову і відносну страхову надбавки.

2. Портфель компанії складається з 800 договорів 5-річного змішаного страхування. Нехай залишковий час життя характеризується постійною інтенсивністю смертності $\mu = 0.02$. Визначте розмір премії, яка гарантує, що ймовірність розорення компанії не перевищуватиме 6%, якщо інтенсивність процентів дорівнює 0.1. Обчисліть відносну страхову надбавку.

3. Портфель компанії складається з 1000 договорів короткотермінового страхування. Ймовірність смерті протягом року для кожного із застрахованих дорівнює 0.03. Із 1000 клієнтів 500 уклали договір на суму 1000 дол. кожний, 200 осіб – на суму 2000 дол. кожний, 200 осіб – на суму 10000 дол. кожний і 100 осіб – на суму 20000 дол. кожний. Проаналізуйте питання про доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 5000 дол., якщо відносна страхова надбавка передавальної компанії 15%, а перестрахувальної – 20%.

4. Компанія уклала 3000 договорів короткотермінового страхування. За умовою компанія сплачує 2000 дол. у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку і 1000 дол. у випадку його смерті протягом року з природних причин. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.001, а з природних причин – 0.05. Компанія встановлює таку премію, щоб ймовірність її розорення не перевищила 4%. Проаналізуйте доцільність перестрахування перевищення втрат з межею утримання 1200 дол., якщо відносна страхова надбавка перестрахувальної компанії складає 15%. Визначте оптимальну межу утримання.

Таблиця тривалості життя

l_x – середня кількість представників деякої групи з l_0 новонароджених, які дожили до віку x років (див. §1.2);

d_x – середня кількість представників даної групи, які померли у віці від x до $x+1$ років (див. §1.3);

q_x – частка живих представників даної групи у віці x років, які помруть протягом найближчого року (див. §2.2);

L_x – середня підсумкова кількість років, прожитих у віковому проміжку $(x, x+1]$ усіма представниками даної групи з l_0 новонароджених (див. §3.9);

T_x – середня підсумкова кількість років, прожитих після x років усіма представниками даної групи з l_0 новонароджених (див. §2.4);

e_x^o – середній залишковий час життя (див. §2.3).

X	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x^0
0	0.011890	100000	1189	99403.13	7805063.61	78.05
1	0.000982	98811	97	98762.48	7705660.48	77.98
2	0.000709	98714	70	98678.99	7606898.00	77.06
3	0.000507	98644	50	98619.00	7506819.01	76.11
4	0.000426	98594	42	98573.00	7409600.01	75.15
5	0.000386	98552	38	98533.00	7311027.02	74.18
6	0.000335	98514	33	98497.50	7212494.02	73.21
7	0.000315	98481	31	98465.50	7113996.52	72.24
8	0.000264	98450	26	98437.00	7015531.02	71.26
9	0.000224	98424	22	98413.00	6917094.02	70.28
10	0.000213	98402	21	98391.50	6818681.03	69.29
11	0.000203	98381	20	98371.00	6720289.53	68.31
12	0.000244	98361	24	98349.00	6621918.53	67.32
13	0.000305	98337	30	98322.00	6523569.53	66.34
14	0.000448	98307	44	98285.00	6425247.53	65.36
15	0.000631	98263	62	98231.99	6326962.53	64.39
16	0.000815	98201	80	98160.99	6228730.54	63.43
17	0.000927	98121	91	98075.49	6130569.55	62.48
18	0.001071	98030	105	97977.48	6032494.07	61.54
19	0.001144	97925	112	97868.98	5934516.58	60.60
20	0.001268	97813	124	97750.97	5836647.61	59.67
21	0.001321	97689	129	97624.47	5738896.47	58.75
22	0.001374	97560	134	97492.97	5641272.16	57.82
23	0.001437	97426	140	97355.97	5543779.19	56.90
24	0.001501	97286	146	97212.96	5446423.23	55.98
25	0.001565	97140	152	97063.96	5349210.26	55.07
26	0.001639	96988	159	96908.46	5252146.30	54.15
27	0.001714	96829	166	96745.95	5155237.85	53.24
28	0.001800	96663	174	96575.95	5058491.89	52.33
29	0.001886	96489	182	96397.94	4961915.95	51.42

X	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x^0
30	0.001973	96307	190	96211.94	4865518.00	50.52
31	0.002070	96117	199	96017.43	4769306.07	49.62
32	0.002179	95918	209	95813.42	4673288.63	48.72
33	0.002288	95709	219	95599.42	4577475.21	47.83
34	0.002409	95490	230	95374.91	4481875.79	46.94
35	0.002540	95260	242	95138.90	4386500.89	46.05
36	0.002673	95018	254	94890.89	4291361.99	45.16
37	0.002828	94764	268	94629.87	4196471.10	44.28
38	0.002984	94496	282	94354.86	4101841.23	43.41
39	0.003142	94214	296	94065.84	4007486.37	42.54
40	0.003322	93918	312	93761.83	3913420.52	41.67
41	0.003515	93606	329	93441.31	3819658.70	40.81
42	0.003709	93277	346	93103.79	3726217.39	39.95
43	0.003928	92931	365	92748.26	3633113.61	39.09
44	0.004159	92566	385	92373.23	3540365.34	38.25
45	0.004404	92181	406	91977.70	3447992.11	37.40
46	0.004664	91775	428	91560.67	3356014.41	36.57
47	0.004937	91347	451	91121.13	3264453.74	35.74
48	0.005237	90896	476	90657.58	3173332.62	34.91
49	0.005552	90420	502	90168.53	3082675.03	34.09
50	0.005883	89918	529	89652.98	2992506.50	33.28
51	0.006242	89389	558	89109.42	2902853.52	32.47
52	0.006631	88831	589	88535.85	2813744.10	31.68
53	0.007037	88242	621	87930.77	2725208.25	30.88
54	0.007475	87621	655	87292.68	2637277.49	30.10
55	0.007934	86966	690	86620.08	2549984.80	29.32
56	0.008438	86276	728	85910.97	2463364.72	28.55
57	0.008966	85548	767	85163.35	2377453.75	29.79
58	0.009530	84781	808	84375.71	2292290.40	27.04
59	0.010134	83973	851	83546.06	2207914.69	26.29
60	0.010767	83122	895	82672.89	2124368.63	25.56
61	0.011456	82227	942	81754.19	2041695.75	24.83
62	0.012192	81285	991	80787.47	1959941.56	24.11
63	0.012965	80294	1041	79771.24	1879154.08	23.40
64	0.013791	79253	1093	78703.97	1799382.85	22.70
65	0.014688	78160	1148	77583.17	1720678.88	22.01
66	0.015634	77012	1204	76406.84	1643095.71	21.34
67	0.016634	75808	1261	75173.97	1566688.87	20.67
68	0.017707	74547	1320	73883.97	1491514.90	20.01
69	0.018859	73227	1381	72532.12	1417631.83	19.36

X	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x^0
70	0.020085	71846	1443	71119.62	1345099.71	25.56
71	0.021391	70403	1506	69644.57	1273980.09	24.83
72	0.022773	68897	1569	68106.48	1204335.52	24.11
73	0.024269	67328	1634	66504.31	1136229.04	23.40
74	0.025847	65694	1698	64837.59	1069724.73	22.70
75	0.027533	63996	1762	63106.80	1004887.14	22.01
76	0.029341	62234	1826	61311.94	941780.34	15.13
77	0.031254	60408	1888	59454.01	880468.40	14.58
78	0.033305	58520	1949	57534.50	821014.39	14.03
79	0.035495	56571	2008	55554.91	763479.90	13.50
80	0.037828	54563	2064	53517.74	707924.99	12.97
81	0.040306	52499	2116	51426.49	654407.26	12.47
82	0.042971	50383	2165	49284.65	602980.76	11.97
83	0.045792	42218	2208	47096.75	553696.11	11.48
84	0.048815	46010	2246	44868.27	506599.36	11.01
85	0.052029	43764	2277	42605.22	461731.09	10.55
86	0.055463	41487	2301	40314.62	419125.87	10.10
87	0.059128	39186	2317	38003.97	378811.25	9.67
88	0.063034	36869	2324	35681.78	340807.28	9.24
89	0.067188	34545	2321	33357.60	305125.50	8.83
90	0.071624	32224	2308	31041.42	271767.90	8.43
91	0.076381	29916	2285	28743.25	240726.48	8.05
92	0.081430	27631	2250	26474.16	211983.23	7.67
93	0.086797	25381	2203	24246.17	185509.08	7.31
94	0.092545	23178	2145	22070.79	161262.90	6.96
95	0.098702	21033	2076	19959.06	139192.11	6.62
96	0.105238	18957	1995	17922.54	119233.05	6.29
97	0.112192	16292	1903	15972.78	101310.51	5.97
98	0.119663	15059	1802	14119.74	85337.74	5.67
99	0.127555	13257	1691	12373.07	71217.99	5.37
100	0.136089	11566	1574	10740.65	58844.93	5.09
101	0.145116	9992	1450	9229.14	48104.27	4.81
102	0.154765	8542	1322	7843.99	38875.13	4.55
103	0.164958	7220	1191	6588.75	31031.15	4.30
104	0.175983	6029	1061	5464.31	24442.39	4.05
105	0.187601	4968	932	4469.77	18978.08	3.82
106	0.200198	4036	808	3601.97	14508.30	3.59
107	0.213445	3228	689	2855.98	10906.34	3.38
108	0.227649	2539	578	2225.17	8050.36	3.17
109	0.242733	1961	476	1701.00	5825.18	2.97

X	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x^0
110	0.259259	1485	385	1273.30	4124.19	2.78
111	0.276364	1100	304	931.67	2850.88	2.59
112	0.295226	796	235	664.85	1919.22	2.41
113	0.315508	561	177	461.37	1254.36	2.24
114	0.335938	384	129	310.75	792.99	2.07
115	0.360784	255	92	202.18	482.25	1.89
116	0.386503	163	63	126.41	280.06	1.72
117	0.420000	100	42	75.22	153.65	1.54
118	0.448276	58	26	42.45	78.43	1.35
119	0.500000	32	16	22.18	35.98	1.12

Список рекомендованної літератури

.

Фалин Г.И., Фалин А.И. Введение в актуарную математику (математические модели в страховании). М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. – 110 с.

Neill A. Life Contingencies. – London: Heinemann, 1977. – 324 p.

Benjamin B., Pollard J.H. The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics. – Oxford.: Butterworth-Heinemann Ltd, 1980. – 380 p.

Benjamin B. General Insurance. – Oxford.: Butterworth-Heinemann Ltd, 1977. – 423 p.

Dickson D.C., Waters H.R. Risk models. – Edinburg: Herriot-Watt Univ, 1992. – 512 p.

Dickson D.C., Waters H.R. Ruin Theory. – Edinburg: Herriot-Watt Univ, 1992. – 375 p.

Зміст

В.О. Кофанов

ОСНОВИ АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

2005

В.О. Кофанов

ОСНОВИ АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

2005