10 лет

МЕЖДУНАРОДНАЯ АССОЦИАЦИЯ АКАДЕМИЙ НАУК

1993

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

В.Ф. БАБЕНКО
Н.П. КОРНЕЙЧУК
В.А. КОФАНОВ
С.А. ПИЧУГОВ

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРОЕКТ
«НАУКОВА КНИГА»

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 2003

УДК 517.5

В монографии систематизированы результаты исследований по неравенствам для норм промежуточных производных (неравенствам типа Колмогорова) функций с различными областями определения. Основное внимание уделено точным неравенствам такого типа. Изложены как классические, так и полученные в последнее время результаты. Рассмотрены взаимосвязи этих неравенств с различными экстремальными задачами анализа. В частности, приведен ряд приложений точных неравенств типа Колмогорова в теории аппроксимации.

Для научных работников, аспирантов и студентов математических специальностей.

У монографії систематизовано результати досліджень по нерівностях для норм проміжних похідних (нерівностях типу Колмогорова) функцій з різними областями визначення. Основну увагу приділено точним нерівностям такого типу. Викладено як класичні, так і одержані останнім часом результати. Розглянуто взаємозв'язки цих нерівностей з різними екстремальними задачами аналізу. Зокрема, наведено ряд застосувань точних нерівностей типу Колмогорова в теорії апроксимації.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів математичних спеціальностей.

Ответственный редактор *В.Н. Коновалов*

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

Редакция физико-математической
и технической литературы

Редактор *Т.С. Мельник*

Б $\frac{\textbf{1602010000-010}}{\textbf{2004}}$

ISBN 966-00-0074-4

© В.Ф. Бабенко,
Н.П. Корнейчук,
В.А. Кофанов,
С.А. Пичугов, 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

Неравенства, которые оценивают сверху L_q-норму промежуточной производной функции через L_p-норму самой функции и L_s-норму ее старшей производной, имеют большое значение для многих областей математики и ее приложений (математический анализ, теория аппроксимации, дифференциальные уравнения, теория некорректных задач, оптимизация алгоритмов и др.). Особенно интересными являются неулучшаемые неравенства такого типа по той причине, что именно они имеют наиболее яркие приложения.

На протяжении почти 100 лет усилия многих математиков, начиная с Э. Ландау, Ж. Адамара, Г. Харди, Дж. Литлвуда, были направлены на доказательство таких неравенств. Каждое существенное достижение в этом направлении требовало создания новых методов исследования, и как сами точные неравенства, так и методы, созданные для их доказательства, находили важные приложения.

Одним из фундаментальных, наиболее глубоких достижений в данной тематике является результат А.Н. Колмогорова. Поэтому неравенства для норм промежуточных производных стали называть неравенствами типа Колмогорова. Для доказательства своего неравенства А.Н. Колмогоров получил так называемую теорему сравнения производных, которая стала важным инструментом при исследовании различных экстремальных задач анализа.

Неравенства типа Колмогорова для функций многих переменных имеют большое значение в теории дифференциальных уравнений с частными производными и в теоремах вложения классов гладких функций.

В основном тексте данной книги приведены неравенства только для функций одной переменной. При этом главное внимание уделено результатам, имеющим окончательный характер, и представлены все случаи полного решения задачи о точных неравенствах типа Колмогорова для функций, заданных на всей числовой оси, полуоси или окружности.

Монография состоит из десяти глав, “Комментариев” и “Дополнительных результатов” к главам.

В главе 1 приведены результаты работ Ландау, Адамара, Харди–Литлвуда–Полиа, с которых берет начало тематика, связанная с неравенствами для промежуточных производных. Проиллюстрированы возможности методов и

прослежено некоторое развитие идей, заложенных в этих работах. Сформулированы общие постановки задач о неравенствах для промежуточных производных и обсуждены их взаимосвязи.

Основное содержание главы 2 связано с одним из наиболее важных в данной тематике результатом – неравенством Колмогорова, теоремой сравнения производных и задачей Колмогорова. Приведено несколько различных доказательств этого неравенства, включая доказательство самого Колмогорова. Рассмотрены также тесно связанное с неравенством Колмогорова неравенство Стейна и неравенство Надя.

Глава 3 посвящена точным неравенствам типа Колмогорова для равномерных норм производных функций, заданных на полуоси. Приведены результаты Маторина, Стечкина, Шенберга и Каваретты (и их “несимметричные” аналоги), Оловянишникова. Отмечено, что задача о точной константе для норм производных функций, заданных на полуоси, труднее поддается исследованию, чем эта же задача для функций, заданных на всей оси: сказывается возмущающее влияние граничной точки.

В главе 4 изучается вопрос о возможности неравенств, оценивающих L_q-норму промежуточной производной через L_p-норму функции и L_s-норму старшей производной, для функций с различными областями задания. Изло-

женные здесь результаты показывают, что решение этого вопроса существенно зависит от области определения функций данного класса.

В главе 5, самой большой по объему, представлены результаты о точных константах в неравенствах типа Колмогорова в ситуациях, когда среди параметров метрик имеются параметры, равные 2. Это позволяет использовать для изучения задачи средства, специфические для гильбертовых пространств, которых нет в других нормированных пространствах.

В главе 6 приведены результаты о точных константах в неравенствах для производных периодических функций (часть таких результатов уже была представлена в предыдущих главах). Для периодических функций к настоящему времени задача о точных константах в неравенствах типа Колмогорова в общей ситуации (т.е. для промежуточных производных любого порядка функций произвольной гладкости) исследована полнее, чем для непериодических. Это связано, во-первых, с тем, что для периодических функций имеется мощная техника сравнения перестановок и Σ-перестановок, развитая Корнейчуком и его учениками, и, во-вторых, с тем, что в периодическом случае проще строить экстремальные функции.

Главы 7 и 8 посвящены приложениям неравенств для производных. В главе 7 рассматриваются приложения к теории аппроксимации. Исследуется взаимосвязь неравенств ти-

па Колмогорова с такими задачами, как приближение неограниченных операторов ограниченными, приближение одного класса функций другим, оценки верхних граней функционалов на классах функций, оценки характеристик типа K-функционала. В главе 8 собраны приложения неравенств типа Колмогорова для периодических функций к исследованию экстремальных свойств тригонометрических полиномов и полиномиальных сплайнов. Такие приложения относятся, на наш взгляд, к числу наиболее интересных. В частности, приведены точные неравенства типа Бернштейна–Никольского для полиномов и сплайнов, полученные при помощи неравенств типа Колмогорова.

Глава 9 носит в основном справочный характер. В ней дан обзор результатов по тематике книги, не нашедших достаточно полного отражения в предыдущих главах. В частности, здесь приведены формулировки результатов о неулучшаемых неравенствах типа Колмогорова для функций малых гладкостей, заданных на оси, полуоси, окружности и конечном отрезке. Не имея возможности привести доказательства всех этих результатов и желая проиллюстрировать хотя бы некоторые методы их получения, мы все же доказываем некоторые из них.

Десятая, заключительная, глава имеет вспомогательный характер. В ней собраны сведения из теории наилучших приближений, пе-

рестановок и Σ-перестановок, которые используются в настоящей книге. Приведены ссылки на источники, в которых можно получить более подробную информацию.

В части, касающейся приложений, мы, следуя своим научным интересам, основное внимание уделяем приложениям точных неравенств типа Колмогорова в теории аппроксимации, а также исследованию экстремальных свойств полиномов и сплайнов.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел

$\mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел

$\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел

$\mathbf{Z}_+$ – множество $\mathbf{N} \cup \{0\}$

G – конечный интервал $\mathbf{I}$, действительная ось $\mathbf{R}$, полуось $\mathbf{R}_+$ или единичная окружность $\mathbf{T}$, реализованная в виде промежутка $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами

$\mathbb{C}(G)$ – пространство непрерывных на G функций x с конечной нормой $\|x\|_{C(G)} := \sup\limits_{t \in G} |x(t)|$

$\|x\|_{L_p(G)}$ – величина, равная $\{\int\limits_G |x(t)|^p dt\}^{1/p}$, если $0 < p < \infty$

$\|x\|_{L_\infty(G)}$ – величина, равная $\sup\limits_{t \in G} \operatorname{vrai} |x(t)|$

$L_p(G)$ – пространство всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$, таких, что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$

$E_0(x)_{L_p(G)}$ – наилучшее приближение функции $x \in L_p(G)$ константами в $L_p(G)$, т.е. $E_0(x)_{L_p(G)} := \inf \left\{ \|x-c\|_{L_p(G)} : c \in \mathbf{R} \right\}$

$c_p(x)$ – константа наилучшего приближения функции $x \in L_p(G)$ $(p \geq 1)$ в $L_p(G)$, т.е. такая константа, что $\|x - c_p(x)\|_{L_p(G)} = E_0(x)_{L_p(G)}$

$\|x\|_p$ – сокращенное обозначение для $\|x\|_{L_p(G)}$

$E_0(x)_p$ – сокращенное обозначение для $E_0(x)_{L_p(G)}$

$E(x,H)_p$ – наилучшее приближение функции $x \in L_p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ множеством $H \subset L_p(G)$ в L_p-метрике, т.е. $E(x,H)_p := \inf\limits_{h \in H} \|x-h\|_{L_p(G)}$

$E(M,H)_p$ – наилучшее приближение множества $M \subset L_p(G)$ множеством $H \subset L_p(G)$ в L_p-метрике, т.е. $E(M,H)_p := \sup\limits_{x \in M} E(x,H)_p$

$L_s^r(G)$ – пространство всех функций x, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $x^{(r-1)}$ и $x^{(r)} \in L_s(G)$

$L_{p,s}^r(G)$ – множество $L_p(G) \cap L_s^r(G)$

$W_s^r(G)$ – множество

$$\{x \in L_s^r(G) : \|x^{(r)}\|_{L_s(G)} \leq 1\}$$

L_s^r – сокращенное обозначение для $L_s^r(G)$

W_s^r – сокращенное обозначение для $W_s^r(G)$

$\varphi_0(t)$ – функция, определенная равенством $\varphi_0(t) := \operatorname{sgn} \sin t$

$\varphi_r(t)$ – r-й 2π-периодический интеграл со средним значением на периоде, равным нулю, от функции $\varphi_0(t)$

$\varphi_{\lambda,r}(t)$ – функция, определенная равенством $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$, $\lambda > 0$. Функции $\varphi_{\lambda,r}$ называют идеальными сплайнами Эйлера

$g_r(t)$ – функция, определенная равенством $g_r(t) := 4^{-1}\varphi_{r-1}(t)$

$r(f,t)$ – перестановка (см., например, [208, § 6.1]) сужения неотрицательной l-периодической функции f на $[0,l]$

$R(f,t)$ – Σ-перестановка Корнейчука (см., например, [208, с. 144]) 2π-периодической функции f

$\mathcal{T}_n$ – множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n

$S_{n,r}$ – множество всех 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, $r \in \mathbf{N}$, дефекта 1 с узлами в точках $\nu\pi/n$, $n \in \mathbf{N}$, $\nu \in \mathbf{Z}$ (см., например, [214, гл. 9]); будем считать, что в точках a разрыва производной

$s^{(r)}$ значение $s^{(r)}(a)$ определяется как $0,5\left(s^{(r)}(a+0)+s^{(r)}(a-0)\right)$

π_n – множество всех алгебраических многочленов степени не выше n

$u_\pm$ – величина, определенная равенством $u_\pm := \max\{\pm u, 0\}$, где $u \in \mathbf{R}$

p' – сопряженный показатель для $p \in [1,\infty]$, т.е. $p' := p/(p-1)$

Глава 1

ИСТОКИ

1.1. Теорема о производных

Одной из первых теорем тематики, связанной с неравенствами для промежуточных производных, является теорема о производных.

Теорема 1.1.1. *Пусть ограниченная вещественнозначная функция $x(t)$ определена для $t > t_0$ и имеет (для всех таких t) непрерывную и ограниченную производную $x''(t)$. Тогда, если $x(t) \to s$ при $t \to \infty$, то $x'(t) \to 0$.*

Как отмечает Ж. Адамар [1], эта теорема используется во многих вопросах, связанных с дифференциальными уравнениями и динамикой (Кнезер, 1896, Адамар, 1897), а также представляет интерес для теории функций и приложений в теории чисел (Г. Харди, Дж. Литлвуд, 1912).

Дж. Литлвуд опубликовал эту теорему в работе [242] 1911 г. Однако в “Математической смеси” [243, с. 39] он пишет, что переоткрыл эту теорему, и описывает [243, с. 86, 87] то, как он пришел к этой теореме. На наш взгляд, это описание весьма интересно, и поэтому мы его здесь полностью воспроизведем.

«Я живо помню забавную для меня историю поисков доказательства теоремы Абеля–Таубера (если $\sum a_n t^n \to s$ при $t \to 1$ и $a_n = O(1/n)$, то $\sum a_n$ сходится к s). Это произошло в Байдфорде во время пасхальных каникул 1911 г. Задача была несомненно поставлена передо мной Харди, но я не знал, что он уже доказал (более

слабую) “теорему Чезаро–Таубера”. Это очень странно, так как он без сомнения мне об этом рассказал; не думаю, что это произошло в то время, когда я активно размышлял над проблемами в этой области. С другой стороны, я тогда старался неукоснительно следовать правилу начинающих разузнавать все, что было сделано до них по вопросам, близким к изучаемому; по-видимому, этот случай был исключением. Как бы то ни было, все указанные обстоятельства содействовали успеху. Доказательство основной теоремы базируется на двух не связанных между собой идеях, одна из которых состоит в связи между тремя (или большим числом) последовательными производными (если $x = o(1)$ и $x'' = O(1)$, то $x' = o(1)$). Я начал с теоремы Чезаро–Таубера и в процессе отыскания доказательства пришел к теореме о производных. Если бы я знал доказательство теоремы Чезаро–Таубера, то теорема о производных, будучи просто одним из звеньев готового доказательства (кстати, весьма отличного от моего), не обратила бы на себя моего внимания, а без этого я никогда не доказал бы основной теоремы (теорема о производных была вообще уже известна, но похоронена в недрах одной работы Адамара о волнах). Начать думать над проблемой, не вникая особенно глубоко в существующую литературу, является, конечно, правильным методом работы, и я его часто применяю.

Теорема о производных позволяет отбрасывать некоторые части выражения, стремление к нулю которого нужно доказать».

В “Математической смеси” [243, с. 39] Дж. Литлвуд приводит доказательство следующего варианта “теоремы о производных” как образец рассуждения, основанного на графике: *из* $x(t) = o(1)$ *при* $t \to \infty$ *и* $x''(t) = O(1)$ *следует, что* $x'(t) = o(1)$.

Рассуждение таково. Если $x'(t) \neq o(1)$ при $t \to \infty$, то под графиком функции $y = |x'(t)|$ для сколь угодно больших t будут содержаться треугольники PQR ($P = P(t, |x'(t)|)$, $Q = Q(t - \delta, 0)$, $R = R(t + \delta, 0)$), в которых высота PH ($H = H(t, 0)$) не мала, наклоны сторон PQ и PR не велики и, следовательно, площадь треугольника PQR не мала. Тогда $|x(t - \delta) - x(t + \delta)| = \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} |x'(u)|du$ не мало, в противоречии с условием $x(t) = o(1)$ при $t \to \infty$.

Приведенное доказательство теоремы о производных является очень интересным. По существу дела, в нем содержатся идеи, которые сыграли существенную роль во многих исследованиях по неравенствам для производных.

В работе [232] Э. Ландау замечает, что для справедливости теоремы 1.1.1 непрерывность $x''(t)$ не нужна — достаточно потребовать, чтобы $x''(t)$ существовала в каждой точке и была ограниченной, и приводит следующее доказательство этой теоремы.

Для любого $\varepsilon > 0$ и $t > t_0$ по формуле Тейлора

$$x(t+\varepsilon) - x(t) = \varepsilon x'(t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 x''(\xi), \quad t < \xi < t+\varepsilon.$$

Значит,

$$|x'(t)| \le \frac{|x(t+\varepsilon) - x(t)|}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon|x''(\xi)| < \frac{|x(t+\varepsilon) - x(t)|}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon C.$$

Так как $x(t) \to s$, для $t > t_1(\varepsilon)$ имеем $|x(t+\varepsilon) - x(t)| < \varepsilon^2$, т. е. для таких t

$$|x'(t)| < \varepsilon + \frac{\varepsilon C}{2} = \varepsilon(1 + 1/2C).$$

Значит, $x'(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Существенное влияние на становление всей проблематики, связанной с неравенствами для производных, оказала работа Г. Харди и Дж. Литлвуда [324] 1912 г. в связи с появлением в ней следующих двух результатов. Первый из них составляет такая теорема.

Теорема 1.1.2. *Пусть $x(t)$ определена для $t > 0$ и $x''(t)$ существует для $t > 0$. Пусть, далее, $g(t)$ и $h(t)$ – положительные функции (обе возрастающие или обе убывающие). Тогда (при $t \to +\infty$) справедливы следующие утверждения:*

1) *если $x(t) = O(g(t))$, $x''(t) = O(h(t))$, то*

$$x'(t) = O\left(\sqrt{g(t)h(t)}\,\right);$$

2) *если $x(t) = o(g(t))$, $x''(t) = O(h(t))$, то*

$$x'(t) = o\left(\sqrt{g(t)h(t)}\,\right);$$

3) *если* $x(t) = O(g(t))$, $x''(t) = o(h(t))$, *то*

$$x'(t) = o\left(\sqrt{g(t)h(t)}\,\right).$$

Г. Харди и Дж. Литлвуд доказали эту теорему для возрастающих g и h с помощью геометрических рассмотрений (для этого можно использовать рассуждения, близкие к рассуждениям Дж. Литлвуда). Им казалось, что случай убывающих g и h более деликатен и требует дополнительных ограничений. Но это не так (данный случай в известном смысле более прост) и это будет показано в § 1.3, где дано аналитическое доказательство теоремы 1.1.2.

Второй результат (который, конечно, непосредственно примыкает к предыдущему) связан с принципиальной возможностью неравенств для верхних граней последовательных производных функции $x(t)$, заданной на всей числовой оси или полуоси: если для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$M_k(x) = \sup_t |x^{(k)}(t)|,$$

то для заданных чисел $0 < k < r$ существует константа $C = C_{r,k}$, такая, что для любой достаточно гладкой функции $x(t)$ выполняется неравенство

$$M_k(x) \le C M_0(x)^{\frac{r-k}{r}} M_r(x)^{\frac{k}{r}}.$$

Именно со временем появления в 1912 г. работы [324] во многих источниках (см., например, [19]) связывается и время рождения всей проблематики, связанной с неравенствами для производных.

1.2. Результаты Ландау и Адамара

В данном параграфе изложим результаты, полученные Э. Ландау [233] в 1913 г. и Ж. Адамаром [1] в 1914 г. Именно в работе [233] появились первые точные неравенства для промежуточных производных.

Теоремы 1.2.1–1.2.6 принадлежат Ландау.

Теорема 1.2.1. *Пусть функция* $x(t)$ *определена на отрезке дли-*

ны не меньшей 2, *причем для всех* t *из этого отрезка*

$$|x(t)| \le 1, \quad |x''(t)| \le 1. \tag{1.2.1}$$

Тогда для всех таких t

$$|x'(t)| \le 2. \tag{1.2.2}$$

Константа 2 *в неравенстве* $(1.2.2)$ *неулучшаема.*

Доказательство. Условия теоремы, будучи выполненными на отрезке длины, не меньшей 2, будут выполнены на любом содержащемся в нем отрезке, длина которого в точности равна 2. Поэтому неравенство (1.2.2) достаточно доказать для отрезка длины 2, который, не уменьшая общности, можно считать отрезком $[0, 2]$. Пусть $t \in [0, 2]$. Тогда

$$x(0) = x(t) + (0-t)x'(t) + \frac{(0-t)^2}{2}x''(\xi_1), \quad \xi_1 \in [0, t],$$

$$x(2) = x(t) + (2-t)x'(t) + \frac{(2-t)^2}{2}x''(\xi_2), \quad \xi_2 \in [t, 2].$$

Отсюда, вычитая первое равенство из второго, получаем

$$2x'(t) = x(2) - x(0) - \frac{(2-t)^2}{2}x''(\xi_2) + \frac{(0-t)^2}{2}x''(\xi_1)$$

и, следовательно, в силу (1.2.1)

$$|x'(t)| \le 1 + \frac{1}{4}\left[(2-t)^2 + t^2\right] = 1 + \frac{1}{4}\left(4 + 2t^2 - 4t\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}t(t-2) \le 2.$$

Для доказательства неулучшаемости константы 2 в (1.2.2) достаточно рассмотреть функцию $x_0(t) := t^2/2 - 1$ на отрезке $[0, 2]$.

Теорема доказана.

Отметим, что для доказательства неулучшаемости неравенства (1.2.2) на отрезке $[0, a]$ при $a > 2$ достаточно рассмотреть функцию $x(t)$, равную $t^2/2 - 1$, если $t \in [0, 2]$, и равную -1, если $t > 2$. При

$a > 2$ эта функция не удовлетворяет условиям теоремы ($x''(2)$ не существует), однако, сглаживая функцию $x(t)$, нетрудно построить последовательность $\{x_n(t)\}$ функций, удовлетворяющих условиям (1.2.1), такую, что $|x_n'(0)| \to 2$.

В связи с этой теоремой Ландау также отмечает, что для отрезков длины, меньшей 2, оценка $|x'(t)|$ перестает быть верной, что проверяется с помощью полиномов $x(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - \left(\dfrac{2}{\rho} + \dfrac{\rho}{2}\right) + 1$ на отрезке $[0, \rho]$.

Далее Ландау отмечает, что теорема 1.2.1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 1.2.2. *Пусть $a, b > 0$ и функция $x(t)$ определена на отрезке длины, не меньшей $2\sqrt{a/b}$, причем для всех t*

$$|x(t)| \le a, \quad |x''(t)| \le b.$$

Тогда для всех t выполняется точное неравенство

$$|x'(t)| \le 2\sqrt{ab}.$$

Доказательство. Положим $s := t\sqrt{b/a}$. Когда t пробегает отрезок длиной $\ge 2\sqrt{a/b}$, s пробегает отрезок длиной ≥ 2. Следовательно, функция $y(s) := a^{-1}x\left(s\sqrt{a/b}\right)$ определена на отрезке длиной ≥ 2. При этом $|y(s)| \le 1$, $|y''(s)| = (a/b)a^{-1}|x''\left(s\sqrt{a/b}\right)| \le 1$. Поэтому в силу теоремы 1.2.1 $|y'(s)| \le 2$, т.е. $\sqrt{a/b} \cdot a^{-1}|x'(t)| \le 2$ или $|x'(t)| \le 2\sqrt{ab}$. Точность последнего неравенства проверяется при помощи функции $y_0(t) := x_0\left(t\sqrt{a/b}\right)$, где $x_0(t)$ – экстремаль в (1.2.2). Теорема доказана.

Из теоремы 1.2.2 очевидным образом вытекает следующее неравенство Ландау для функций, заданных на полуоси $\mathbf{R}_+$.

Теорема 1.2.3. *Пусть $a, b > 0$ и функция $x(t)$ определена на полуоси $\mathbf{R}_+$, причем для всех $t > 0$*

$$|x(t)| \le a, \quad |x''(t)| \le b. \tag{1.2.3}$$

Тогда для всех $t > 0$

$$|x'(t)| \le 2\sqrt{ab}. \tag{1.2.4}$$

Неравенство (1.2.4) *неулучшаемо.*

Точность неравенства (1.2.4) устанавливается при помощи функции

$$x_0(t) := \begin{cases} -0,5b\left(t - 4\sqrt{a/b}\right)^2 + a, & \text{если } t \in \left[0, 4\sqrt{a/b}\right]; \\ a, & \text{если } t \ge 4\sqrt{a/b}. \end{cases}$$

Отметим, что в своей статье Ландау теорему 1.2.3 явно не сформулировал. Однако, используя теорему 1.2.2, он приводит следующее доказательство “теоремы о производной”.

Пусть $g(y) = f(y) - s$. Тогда $g(y) \to 0$ при $y \to \infty$ (и, следовательно, $|g(y)| < \delta$ при $y > y_0$) и $|g''(y)| = |f''(y)| \le C$. Значит, для всех $y > y_0$

$$|f'(y)| = |g'(y)| \le 2\sqrt{\delta c},$$

так что $f'(y) \to 0$ при $y \to +\infty$.

Следующая теорема, доказанная в работе [233], касается функций, заданных на всей числовой оси.

Теорема 1.2.4. *Если для функции* $x(t)$ *выполнены условия*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|x(t)| \le 1, \quad \overline{\lim_{t\to\infty}}|x''(t)| \le 1,$$

то

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|x'(t)| \le \sqrt{2}, \tag{1.2.5}$$

причем константу $\sqrt{2}$ *уменьшить нельзя.*

Доказательство. Если на интервале длины, не меньшей $2\sqrt{2}$, выполнены условия

$$|x(t)| \le 1, \quad |x''(t)| \le 1, \tag{1.2.6}$$

то для центральной точки t этого интервала справедливо неравенство

$$|x'(t)| \le \sqrt{2}. \tag{1.2.7}$$

Действительно, используя формулу Тейлора, получим

$$x(t+\sqrt{2}) = x(t) + \sqrt{2}x'(t) + \frac{1}{2}2x''(\xi_1), \quad \xi_1 \in [t, t+\sqrt{2}],$$

$$x(t-\sqrt{2}) = x(t) - \sqrt{2}x'(t) + \frac{1}{2}2x''(\xi_1), \quad \xi_1 \in [t-\sqrt{2}, t].$$

Отсюда

$$x(t+\sqrt{2}) - x(t-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}x'(t) + x''(\xi_1) - x''(\xi_2)$$

и, следовательно, в силу (1.2.6) $2\sqrt{2}|x'(t)| \leq 4$, что равносильно (1.2.7).

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$|x_\varepsilon(t)| := \frac{x(t)}{1+\varepsilon}.$$

Тогда существует $t_1(\varepsilon)$, такое, что для любого $t > t_1(\varepsilon)$ выполнены условия

$$|x_\varepsilon(t)| \leq 1, \quad |x''_\varepsilon(t)| \leq 1.$$

Отсюда ввиду (1.2.7) вытекает, что при любом $t > t_1(\varepsilon) + \sqrt{2}$ будет $|x'_\varepsilon(t)| \leq \sqrt{2}$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|x'(t)| \leq (1+\varepsilon)\sqrt{2}.$$

Ввиду произвольности ε из этого неравенства вытекает (1.2.5). Точность константы $\sqrt{2}$ в (1.2.5) легко проверяется при помощи $4\sqrt{2}$-периодической функции x_0, которая на отрезке $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ определена соотношениями

$$x_0(t) := \begin{cases} -0,5t\left(t-2\sqrt{2}\right), & \text{если } t \in \left[0, 2\sqrt{2}\right], \\ 0,5t\left(t+2\sqrt{2}\right), & \text{если } t \in \left[-2\sqrt{2}, 0\right]. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Из рассуждений, приведенных в начале доказательства теоремы 1.2.4, очевидным образом вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.2.5. *Если для функции $x(t)$ при всех $t \in \mathbf{R}$ выполнены условия*

$$|x(t)| \le 1, \quad |x''(t)| \le 1,$$

то для всех $t \in \mathbf{R}$

$$|x'(t)| \le \sqrt{2}.$$

Константу $\sqrt{2}$ в последнем неравенстве уменьшить нельзя.

Отметим также, что совершенно аналогично тому, как из теоремы 1.2.1 была выведена теорема 1.2.3, из теоремы 1.2.5 выводится следующая теорема.

Теорема 1.2.6. *Пусть $a, b > 0$. Если для функции $x(t)$ при всех $t \in \mathbf{R}$ выполнены условия*

$$|x(t)| \le a, \quad |x''(t)| \le b, \tag{1.2.8}$$

то для всех $t \in \mathbf{R}$

$$|x'(t)| \le \sqrt{2ab}. \tag{1.2.9}$$

Неравенство (1.2.9) *неулучшаемо.*

Отметим, что точность (1.2.9) проверяется при помощи функции $y_0(t) := x_0(t\sqrt{a/b})$, где x_0 – экстремаль в предыдущей теореме.

Другие доказательства результатов Э. Ландау и некоторые их обобщения приведены в следующем параграфе.

В работе [1] 1914 г. Ж. Адамар отмечает, что небольшая модификация доказательства теоремы 1.2.1, принадлежащей Э. Ландау, позволяет установить справедливость следующего утверждения.

Пусть $M_0, M_1, \ldots, M_k, \ldots$ – верхние грани модулей функции $x(t)$ и ее последовательных производных

$$|x(t)|, \ \left|x'(t)\right|, \ \ldots, \left|x^{(k)}(t)\right|, \ldots$$

Теорема 1.2.7. *Если непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$, заданная на отрезке длины a, такова, что в любой внутренней*

точке этого отрезка существует $x''(t)$, *то для любого* $a' \in (0, a)$ *справедливо неравенство*

$$M_1 \leq \frac{2M_0}{a'} + \frac{a'}{2} M_2. \tag{1.2.10}$$

Доказательство. Пусть точка t_0 из заданного отрезка такова, что $M_1 = |x'(t_0)|$. Рассмотрим отрезок длины a', содержащий точку t_0. Не уменьшая общности, можно считать, что точку t_0 содержит отрезок $[0, a']$. Тогда

$$x(0) = x(t_0) + (0 - t_0)x'(t_0) + \frac{(0-t)^2}{2} x''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (0, t_0),$$

$$x(a') = x(t_0) + (a' - t_0)x'(t_0) + \frac{(a'-t)^2}{2} x''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (t_0, a').$$

Отсюда, вычитая из второго неравенства первое, получаем

$$a'x'(t_0) = x(a') - x(0) - \frac{(a'-t_0)^2}{2} x''(\xi_2) + \frac{(0-t_0)^2}{2} x''(\xi_1)$$

и, следовательно,

$$|x'(t_0)| \leq \frac{1}{a'} \left[2M_0 + \frac{1}{2} M_2 \left((a' - t_0)^2 + t_0^2 \right) \right] =$$

$$= \frac{2M_0}{a'} + \frac{a'}{2} M_2 - M_2 t_0 a' \leq \frac{2M_0}{a'} + \frac{a'}{2} M_2.$$

Теорема доказана.

Далее Адамар отмечает, что минимум (по a') правой части неравенства (1.2.10) достигается при

$$a' = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}},$$

так что, если

$$2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \leq a, \tag{1.2.11}$$

то из (1.2.10) получается неравенство

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}. \tag{1.2.12}$$

В противном случае, т.е. если

$$2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} > a,$$

то

$$M_2 < \frac{4M_0}{a^2},$$

и из (1.2.10) при $a' = a$ получим

$$M_1 \leq \frac{2M_0}{a} + \frac{a}{2}\frac{4M_0}{a^2} = \frac{4M_0}{a}.$$

Неравенство (1.2.11) для функций, заданных на полуоси (т.е. когда $a = \infty$), выполняется для любых конечных M_0 и M_2. Стало быть, для функций, заданных на всей полуоси, справедливо неравенство

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Далее, если $M_0,\ M_1, ..., M_r$ определены и конечны для функций, заданных на всей полуоси, то при всех $i < r$ справедливо неравенство

$$M_i^2 \leq 4M_{i-1}M_{i+1},$$

или, что равносильно,

$$\frac{M_i}{M_{i-1}} \leq 4\frac{M_{i+1}}{M_i}.$$

Отсюда, по индукции, получаем

$$M_1 \leq 2^{r-1} M_0^{1-1/r} M_r^{1/r}. \tag{1.2.13}$$

В частности, из (1.2.13) следует, что для неулучшаемой константы $C_{r,1}$ в неравенствах типа (1.2.13) справедлива оценка

$$C_{r,1} \leq 2^{r-1}.$$

Это, по-видимому, первая из известных оценок для неулучшаемых констант в неравенстве вида

$$M_k \le C_{r,k} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r}.$$

Сразу же отметим, что для функций, заданных на всей оси по схеме доказательства теоремы 1.2.4, нетрудно доказать, что при любом $a > 0$ выполняется неравенство

$$M_1 \le \frac{M_0}{a} + \frac{a}{2} M_2. \tag{1.2.14}$$

Действительно, для любого $t \in \mathbf{R}$ имеем

$$x(t+a) = x(t) + ax'(t) + \frac{1}{2}a^2 x''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (t, t+a),$$

$$x(t-a) = x(t) - ax'(t) + \frac{1}{2}a^2 x''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (t-a, t).$$

Отсюда,

$$x(t+a) - x(t-a) = 2ax'(t) + \frac{a^2}{2}x''(\xi_1) - \frac{a^2}{2}x''(\xi_2),$$

так что

$$|x'(t)| \le \frac{1}{2a} 2M_0 + \frac{1}{2a} a^2 M_2 = \frac{M_0}{a} + \frac{a}{2} M_2.$$

Минимум по a правой части (1.2.14) достигается при

$$a = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}},$$

так что из (1.2.14) следует, что для функций, заданных на всей оси,

$$M_1 \le \sqrt{2M_0 M_2}. \tag{1.2.15}$$

Далее Адамар отмечает, что оценить сверху величину $M_0(x)$ величиной

$$T = \int\limits_G |x(t)|^2 dt$$

(G – конечный или бесконечный интервал), вообще говоря, невозможно. Однако оценить $M_0(x)$ величинами T и $M_1(x)$ уже можно. В этой связи Адамар приводит неравенство

$$M_0 \leq \sqrt{\frac{T}{a'}} + a' M_1,$$

справедливое для любого $a' \leq a$, где a – длина интервала G.

Затем для функций, заданных на всей оси или полуоси, минимизируя по a' правую часть этого неравенства, Адамар получает оценку

$$M_0 \leq \frac{3}{2^{2/3}} (\sqrt{T})^{2/3} M_1^{1/3}, \tag{1.2.16}$$

из которой по индукции следует неравенство

$$M_0 \leq (27^r 2^{r(r-2)})^{1/2} M_r^{\frac{1/2}{r+1/2}} (\sqrt{T})^{\frac{r}{r+1/2}}, \ r \geq 1.$$

1.3. Другие доказательства результатов Ландау и Адамара

В данном параграфе для функций, заданных на всей числовой оси или полуоси, приведем доказательства неравенств Ландау (1.2.4) и (1.2.9), основанные на аппроксимативных соображениях, восходящих к С.Б. Стечкину [296]. Идею, которая будет использована, можно рассматривать, с одной стороны, как идею аппроксимации оператора дифференцирования ограниченным разностным оператором, а с другой – как идею “промежуточного приближения” функции $x'(t)$ более гладкой функцией (обе точки зрения получат в нашей книге свое развитие).

В данном параграфе эта идея позволит доказать неравенства Ландау для более широких классов функций.

Кроме того, приведем доказательства результатов Ландау, основанные на приведенном в § 1.1 “геометрическом” доказательстве Дж. Литлвуда теоремы о производной.

Проиллюстрируем также некоторые дополнительные возможности методов, которые будут использованы в данном параграфе.

Для функций $x \in L_1(\mathbf{R}_+)$ положим

$$x_h^+(t) := \frac{1}{h}\int\limits_0^h x(t+u)du, \quad h > 0,$$

а для функций $x \in L_1(\mathbf{R})$ –

$$x_h(t) := \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^h x(t+u)du.$$

Это средние Стеклова (см., например, [208, с. 98]) с шагом h и $2h$ соответственно для функции x. Функции x_h и x_h^+ являются более "гладкими" по сравнению с функцией x.

Если функция x локально абсолютно непрерывна (на полуоси или на всей оси), то

$$(x')_h^+(t) = \frac{1}{h}\left\{x(t+h) - x(t)\right\}$$

и

$$(x')_h(t) = \frac{1}{2h}\left\{x(t+h) - x(t-h)\right\},$$

так что рассмотрение функций Стеклова для производных приводит к разностным операторам, которые обычно используются для аппроксимации оператора дифференцирования.

Доказательство неравенства (1.2.4). Нам потребуются следующие элементарные оценки: для функций $x \in L^1_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ (см. с. 12)

$$|x(t) - x_h(t)| = \frac{1}{2h}\Big|\int\limits_{-h}^h \left(x(t) - x(t+u)\right)du\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^h |x(t) - x(t+u)|\,du \le \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^h \left\|x'\right\|_\infty |u|du = \frac{\|x'\|_\infty}{2}\,h,$$

так что

$$\|x - x_h\|_\infty \le \frac{\|x'\|_\infty}{2}\, h, \tag{1.3.1}$$

и, аналогично,

$$\|x - x_h^+\|_\infty \le \frac{\|x'\|_\infty}{2}\, h, \tag{1.3.2}$$

при этом последняя оценка верна и для функций $x \in L^1_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$.

Кроме того, для функций $x \in L^1_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$

$$|x_h'(t)| = \frac{1}{2h}\left|\int\limits_{-h}^{h} x'(t+u)du\right| = \frac{1}{2h}\,|x(t+h) - x(t-h)| \le \frac{2\|x\|_\infty}{2h},$$

так что

$$\|x_h'\|_\infty \le \frac{\|x\|_\infty}{h} \tag{1.3.3}$$

и, аналогично,

$$\|(x_h^+)'\|_\infty \le \frac{2\|x\|_\infty}{h}. \tag{1.3.4}$$

Запишем неравенство (1.2.4) в форме неравенства для норм промежуточных производных.

Теорема 1.3.1. *Для функций $x \in L^2_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ выполняется точное неравенство*

$$\|x'\|_\infty \le 2\|x\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|x''\|_\infty^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.5}$$

Неравенство (1.3.5) *обращается в равенство для функций вида*

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} -b(t-a)^2 + ba^2/2, & \text{если } 0 \le t \le a, \\ ba^2/2, & \text{если } t \ge a, \end{cases}$$

где $a, b \in \mathbf{R}$ $(a > 0,\ b \ne 0)$ – произвольны.

Доказательство. Применяя (1.3.2) для оценки $\|x' - (x_h^+)'\|_\infty$ и (1.3.4) для оценки $\|(x_h^+)'\|_\infty$, а также учитывая соотношение $(x_h^+)'(t) = (x')_h^+(t)$, имеем

$$|x'(t)| \le \|x'\|_\infty \le \|x' - (x_h^+)'\|_\infty + \|(x_h^+)'\|_\infty \le \frac{h}{2}\,\|x''\|_\infty + \frac{2}{h}\,\|x\|_\infty.$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства по $h > 0$, получаем (1.3.5). Его точность легко следует из соотношений

$$\|x_{a,b}\|_\infty = \frac{|b|a^2}{2}, \quad \|x'_{a,b}\|_\infty = 2a|b|, \quad \|x''_{a,b}\|_\infty = 2|b|.$$

Теорема доказана.

Запишем теперь неравенство (1.2.8) в форме неравенства для норм промежуточных производных.

Теорема 1.3.2. *Для любой функции* $x \in L^2_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$

$$\|x'\|_\infty \le \sqrt{2}\|x\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|x''\|_\infty^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.6}$$

Неравенство (1.3.6) *обращается в равенство для функций вида* $x_{a,b}(t) = a\varphi_2(bt + c)$, a, b, $c \in \mathbf{R}$, $a, b \ne 0$, *где* φ_2 *– идеальный сплайн Эйлера порядка* 2 (*см. определение на с.* 13).

Доказательство. Используя (1.3.1) для оценки $\|x' - x'_h\|_\infty$ и (1.3.3) для оценки $\|x'_h\|_\infty$, имеем

$$\|x'\|_\infty \le \|x' - x'_h\|_\infty + \|x'_h\|_\infty \le \frac{h}{2}\,\|x''\|_\infty + \frac{1}{h}\,\|x\|_\infty.$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства по $h > 0$, получаем (1.3.6). Его неулучшаемость следует из соотношений

$$\|x_{a,b}\|_\infty = |a|\|\varphi_2\|_\infty = \frac{|a|\pi^2}{8},$$

$$\|x'_{a,b}\|_\infty = |ab|\|\varphi_1\|_\infty = \frac{|a||b|\pi}{2},$$

$$\|x''_{a,b}\|_\infty = |a|b^2\|\varphi_0\|_\infty = |a|b^2.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим некоторые простые дополнительные возможности, которые предоставляет приведенный выше метод доказательства теорем 1.3.1 и 1.3.2.

Пусть $x \in L^2_{\infty,s}(\mathbf{R}_+)$, $1 \le s \le \infty$. Ясно, что оценивая $\|x'\|_\infty$ на полуоси, достаточно оценить $|x'(0)|$. Ясно также, что

$$|x'(0)| \le |x'(0) - (x')^+_h(0)| + |(x')^+_h(0)|. \tag{1.3.7}$$

Представим первое слагаемое в виде

$$|x'(0) - (x')^+_h(0)| = \left| x'(0) - \frac{1}{h}\int\limits_0^h x'(u)du \right| = \frac{1}{h}\left| \int\limits_0^h x''(u)(u-h)du \right|. \tag{1.3.8}$$

Применяя к правой части неравенство Гельдера, получаем (ниже $s' = s/(s-1)$)

$$|x'(0) - (x')^+_h(0)| \le \frac{1}{h}\|x''\|_s \, \| \cdot - h\|_{L_{s'}(0,h)} = \frac{h^{1/s'}\|x''\|_s}{(s'+1)^{1/s'}}.$$

Используя в (1.3.7) оценку (1.3.4) и последнее неравенство, имеем

$$|x'(0)| \le \frac{h^{1/s'}\|x''\|_s}{(s'+1)^{1/s'}} + \frac{2\|x\|_\infty}{h}. \tag{1.3.9}$$

Минимизируя правую часть (1.3.9) по $h > 0$, получаем

$$|x'(0)| \le 2^{\frac{1}{s'+1}} \left(\frac{s'+1}{s'}\right)^{\frac{s'}{s'+1}} \|x\|_\infty^{\frac{1}{s'+1}} \|x''\|_s^{\frac{s'}{s'+1}},$$

так что для любой функции $x \in L^2_{\infty,s}(\mathbf{R}_+)$ выполняется неравенство

$$\|x'\|_\infty \le 2^{\frac{1}{s'+1}} \left(\frac{s'+1}{s'}\right)^{\frac{s'}{s'+1}} \|x\|_\infty^{\frac{1}{s'+1}} \|x''\|_s^{\frac{s'}{s'+1}},$$

которое можно переписать в виде

$$\|x'\|_\infty \le 2^{\frac{1-1/s}{2-1/s}} \left(\frac{2s-1}{s}\right)^{\frac{s}{2s-1}} \|x\|_\infty^{\frac{1-1/s}{2-1/s}} \|x''\|_s^{\frac{1}{2-1/s}}. \tag{1.3.10}$$

Полагая $x_0''(v) := (1-v)^{s'-1}$, если $0 \le v \le 1$, и $x_0''(v) = 0$, если $v \ge 1$;

$$x_0'(u) = \int\limits_1^u x''(v)dv \quad \text{и} \quad x_0(t) = \int\limits_\xi^t x'(u)du$$

(точка $\xi \in [0,1]$ выбрана так, чтобы $\int\limits_0^\xi x_0'(u)du = \int\limits_\xi^1 x_0'(u)du$), нетрудно проверить, что неравенство (1.3.10) неулучшаемо (при всех $s > 1$).

Для функций класса $L^2_{\infty,s}(\mathbf{R})$ используем представление

$$|x'(0) - (x')_h(0)| = \frac{1}{2h}\left|\int\limits_{-h}^h x''(u)g(u)du\right|,$$

где $g(u)$ – нечетная функция, равная $u-h$ для $u \in (0,h]$. Действуя аналогично доказательству неравенства (1.3.10) и используя оценку (1.3.3) вместо (1.3.4), получаем

$$|x'(0)| \le |x'(0) - (x')_h(0)| + |(x')_h(0)| \le$$

$$\le \frac{\|x\|_\infty}{h} + \frac{1}{2h}\left|\int\limits_{-h}^h x''(u)g(u)du\right| \le \frac{\|x\|_\infty}{h} + \frac{1}{2h}\|x''\|_s\|g\|_{L_{s'}[-h,h]} =$$

$$= \frac{\|x\|_\infty}{h} + \frac{h^{1/s'}}{2^{1/s}(s'+1)^{1/s'}}\|x''\|_s.$$

Минимизируя последнее выражение по $h > 0$, приходим к неравенству

$$\|x'\|_\infty \le 2^{\frac{1-s'}{s'+1}}\left(\frac{s'+1}{s'}\right)^{\frac{s'}{s'+1}}\|x\|_\infty^{\frac{1}{s'+1}}\|x''\|_s^{\frac{s'}{s'+1}},$$

которое можно переписать в виде

$$\|x'\|_\infty \le 2^{\frac{1/s}{2-1/s}}\left(\frac{2s-1}{s}\right)^{\frac{s}{2s-1}}\|x\|_\infty^{\frac{1-1/s}{2-1/s}}\|x''\|_s^{\frac{1}{2-1/s}}. \qquad (1.3.11)$$

Полагая $x_0''(v) := (1-v)^{s'-1}$, если $v \in (0,1]$, продолжаем эту функцию нулем на $\mathbf{R}_+$, а затем по нечетности на всю числовую ось. Далее положим

$$x_0'(u) = \int\limits_{-1}^{u} x''(v)dv \quad \text{и} \quad x_0(t) = \int\limits_{0}^{t} x'(u)du. \tag{1.3.12}$$

С помощью функции $x_0(t)$ нетрудно проверить, что константа в неравенстве (1.3.11) также неулучшаема.

Теперь проиллюстрируем возможности, которые содержатся в приведенном в § 1.1 "геометрическом" рассуждении Дж. Литлвуда.

Пусть функция $x(t)$, заданная на всей числовой оси, такова, что для любого t

$$|x(t)| \le 1 \quad \text{и} \quad |x''(t)| \le 1. \tag{1.3.13}$$

Определяем функцию $y(t)$, полагая $y(t) = -t + |x'(0)|$, если $t \in [0, |x'(0)|]$, $y(t) = 0$, если $t > |x'(0)|$, и продолжая ее четным образом на отрицательную полуось. Ясно, что $y(0) = |x'(0)|$. Будем для определенности считать, что $x'(0) > 0$. Ввиду условия $|x''(t)| \le 1$, для всех $t \in [-x'(0), x'(0)]$ имеем $x'(t) \ge y(t)$. Следовательно,

$$x'(0)^2 = \int\limits_{-x'(0)}^{x'(0)} y(t)dt \le \int\limits_{-x'(0)}^{x'(0)} x'(t)dt \le 2\|x\|_\infty \le 2.$$

Таким образом, при выполнении условий (1.3.13)

$$|x'(0)| \le \sqrt{2},$$

и, следовательно,

$$\|x'\|_\infty \le \sqrt{2}.$$

Мы доказали, таким образом, теорему 1.2.5, а также теорему 1.2.6.

Пусть теперь функция $x(t)$, заданная на полуоси $\mathbf{R}_+$, такова, что для $t \ge 0$ ($t \in [0, a]$)

$$|x(t)| \le 1 \quad \text{и} \quad |x''(t)| \le 1. \tag{1.3.14}$$

Определяем функцию $y(t)$, полагая $y(t) = |x'(0)| - t$, если $t \in [0, |x'(0)|]$, и $y(t) = 0$, если $t > |x'(0)|$.

Снова пусть для определенности $x'(0) > 0$. Ввиду условия $|x''(t)| \leq 1$, для всех $t \in [0, x'(0)]$ имеем

$$x'(t) \geq y(t).$$

Следовательно,

$$\frac{x'(0)^2}{2} = \int\limits_0^{x'(0)} y(t)dt \leq \int\limits_0^{x'(0)} x'(t)dt \leq 2\|x\|_\infty \leq 2.$$

Таким образом, при выполнении условий (1.3.14)

$$|x'(0)| \leq 2,$$

и, следовательно,

$$\|x'\|_\infty \leq 2. \tag{1.3.15}$$

Мы доказали теорему 1.2.3 при $a = b = 1$.

Слегка усложняя рассуждения, можно также показать, что при выполнении условий (1.3.14) на отрезке $[0, a]$, $a \geq 2$, для любой точки t из этого отрезка имеем

$$|x'(t)| \leq 2,$$

т.е. доказана теорема 1.2.1.

Теперь рассмотрим заданную на полуоси функцию $x(t)$, такую, что для всех $t \geq 0$

$$|x'(t)| \leq 1,$$

и, кроме того, $\|x\|_p \leq 1$ (пусть $p < \infty$). Определяем функцию $y(t)$, полагая $y(t) = x(0) - t$, если $t \in [0, x(0)]$ (мы снова для определенности предположили, что $x(0) > 0$), и $y(t) = 0$, если $t > x(0)$. Так как $|x'(t)| \leq 1$ для $t \geq 0$, то для всех $t \in [0, x(0)]$ имеем $x(t) \geq y(t)$, и, следовательно,

$$\|x\|_p^p \geq \int\limits_0^{x(0)} y(t)^p dt = \frac{x(0)^{p+1}}{p+1},$$

или

$$x(0) \le (p+1)^{\frac{1}{p+1}} \|x\|_p^{\frac{p}{p+1}}.$$

Значит, для всех $x(t)$, таких, что $|x'(t)| \le 1$ и $x \in L_p(\mathbf{R})$, имеем

$$\|x\|_\infty \le (p+1)^{\frac{1}{p+1}} \|x\|_p^{\frac{1}{1+1/p}}.$$

Применяя это неравенство к функции $z(t) = x(t)/\|x'\|_\infty$ (для таких функций x, что $x'(t)$ ограничена), получаем

$$\|x\|_\infty \le (p+1)^{\frac{1}{p+1}} \|x\|_p^{\frac{1}{1+1/p}} \|x'\|_\infty^{\frac{1/p}{1+1/p}}. \tag{1.3.16}$$

Константа в этом неравенстве, конечно, неулучшаема.

При $p = 2$ получим

$$\|x\|_\infty \le 3^{1/3} \|x\|_2^{2/3} \|x'\|_\infty^{1/3}.$$

Это – уточнение неравенства (1.2.16) Адамара.

1.4. Неравенства для производных с монотонными мажорантами

В данном параграфе приведем принадлежащее Л. Морделлу [264] уточнение теоремы 1.1.2 Харди и Литлвуда.

Начнем со случая невозрастающих мажорант для $x(t)$ и $x''(t)$.

Теорема 1.4.1. *Пусть $g(t)$ и $h(t)$ – положительные, невозрастающие на полуоси $\mathbf{R}_+$ функции. Если функция $x(t)$ определена на полуоси $\mathbf{R}_+$ и для всех $t > 0$ существует $x''(t)$, причем*

$$|x(t)| \le g(t), \quad |x''(t)| \le h(t), \tag{1.4.1}$$

то для всех $t > 0$

$$|x'(t)| \le 2\sqrt{g(t)h(t)}. \tag{1.4.2}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$x(t+\varepsilon) = x(t) + \varepsilon x'(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} x''(\xi), \quad \xi \in (t, t+\varepsilon).$$

Отсюда, ввиду невозрастания функций $g(t)$ и $h(t)$ и условий (1.4.1), имеем

$$|x'(t)| \le \frac{1}{\varepsilon}|x(t+\varepsilon) - x(t)| + \frac{\varepsilon}{2}|x''(\xi)| \le \frac{2}{\varepsilon} g(t) + \frac{\varepsilon}{2} h(t).$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства по $\varepsilon > 0$, получаем

$$|x'(t)| \le 2\sqrt{g(t)h(t)}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Для случая, когда обе мажоранты $g(t)$ и $h(t)$ не убывают, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4.2. *Пусть $g(t)$ и $h(t)$ – положительные неубывающие функции, определенные на полуоси $\mathbf{R}_+$. Если функция $x(t)$ определена на полуоси $\mathbf{R}_+$ и для всех $t > 0$ существует $x''(t)$, причем*

$$|x(t)| \le |g(t)|, \quad |x''(t)| \le |h(t)|, \tag{1.4.3}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует $t(\varepsilon)$, такое, что для всех $t > t(\varepsilon)$

$$|x'(t)| \le (2+\varepsilon)\sqrt{g(t)h(t)}. \tag{1.4.4}$$

Доказательство. Для любого $t > 0$ и любого δ, $0 < \delta \le t$, имеем

$$x(t-\delta) = x(t) - \delta x'(t) + \frac{\delta^2}{2} x''(\xi), \quad \xi \in (t-\delta, t).$$

Отсюда, учитывая, что функции $g(t)$ и $h(t)$ не убывают, выводим

$$|x'(t)| \le \frac{1}{\delta}(|x(t)| + |x(t-\delta)|) + \frac{\delta}{2}|x''(\xi)| \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}(|g(t)| + |g(t-\delta)|) + \frac{\delta}{2}|h(\xi)| \le \frac{2}{\delta} g(t) + \frac{\delta}{2} h(t).$$

Таким образом, для любого $t > 0$ и любого $\delta \in (0, t]$ выполняется неравенство

$$|x'(t)| \le \frac{2}{\delta} g(t) + \frac{\delta}{2} h(t). \tag{1.4.5}$$

Положим $\delta(t) = 2\sqrt{g(t)/h(t)}$. Если $\delta(t) \le t$, то, подставляя в (1.4.5) вместо δ значение $\delta(t)$, получаем

$$|x'(t)| \le 2\sqrt{g(t)h(t)}. \tag{1.4.6}$$

Если же для заданного $t > 0$ будет $t < \delta(t)$, то (ниже $\xi \in (0, t)$)

$$|x'(t)| = |x'(0) + x''(\xi)t| \le$$

$$\le |x'(0)| + th(\xi) \le |x'(0)| + \delta(t)h(t) = |x'(0)| + 2\sqrt{g(t)h(t)}. \tag{1.4.7}$$

Далее заметим, что ввиду монотонного неубывания функций $g(t)$ и $h(t)$ существует (конечный или бесконечный) предел

$$L := \lim_{t \to +\infty} g(t)h(t).$$

Если $L = \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $t(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $t > t(\varepsilon)$ имеем $|x'(0)| < \varepsilon\sqrt{g(t)h(t)}$. Значит, для всех $t > t(\varepsilon)$, для которых выполнено условие $\delta(t) > t$, в силу (1.4.7) получим

$$|x'(t)| \le (2 + \varepsilon)\sqrt{g(t)h(t)}$$

(для всех остальных $t > t(\varepsilon)$ это неравенство согласно (1.4.6) тем более будет выполнено).

Если же $L < \infty$, то существуют конечные пределы

$$a = \lim_{t \to \infty} g(t) \quad \text{и} \quad b = \lim_{t \to \infty} h(t),$$

причем для всех $t \ge 0$

$$|x(t)| \le a \quad \text{и} \quad |x''(t)| \le b,$$

т.е. выполнены условия теоремы 1.2.3, в силу которой для всех $t > 0$

$$|x'(t)| \le 2\sqrt{ab}. \tag{1.4.8}$$

Но для всех достаточно больших t будет $g(t) > (1 + \varepsilon/2)^{-1}a$ и $h(t) > (1 + \varepsilon/2)^{-1}b$, и для таких t из (1.4.8) получаем неравенство (1.4.4). Теорема доказана.

1.5. Неравенства Харди–Литлвуда в L_2 на полуоси

В начале данного параграфа приведем неравенства Харди–Литлвуда для L_2-норм производных функций, заданных на полуоси, в случае $k = 1$ и $r = 2$. Известно несколько доказательств этого неравенства (см., например, [327, § 7.8]). Приведем два доказательства, идеи которых получат дальнейшее развитие в гл. 5 данной книги.

Теорема 1.5.1. *Пусть $x \in L_2(\mathbf{R}_+)$, производная x' локально абсолютно непрерывна и $x'' \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда*

$$\|x'\|_2 \le \sqrt{2}\|x\|_2^{\frac{1}{2}}\|x''\|_2^{\frac{1}{2}} \tag{1.5.1}$$

и

$$\|x'\|_2^2 \le \|x\|_2^2 + \|x''\|_2^2. \tag{1.5.2}$$

Равенство в (1.5.2) *имеет место, если и только если*

$$x(t) = Ay(t), \quad \text{где} \quad y(t) := e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right),$$

а равенство в (1.5.1) *имеет место, если и только если $x(t) = Ay(Bt)$, где A и B – произвольные константы.*

Доказательство 1. Отметим прежде всего эквивалентность неравенств (1.5.1) и (1.5.2).

Действительно, неравенство (1.5.2) следует из неравенства (1.5.1) в силу неравенства Коши между геометрическим и арифметическим средними и выпуклости вверх функции $y(t) = \sqrt{t}$:

$$\|x'\|_2 \le \sqrt{2}\|x\|_2^{\frac{1}{2}}\|x''\|_2^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\frac{\|x\|_2 + \|x''\|_2}{2} \le$$
$$\le \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\|x\|_2^2 + \|x''\|_2^2\right)}.$$

Обратно, пусть неравенство (1.5.2) выполняется. Тогда для любого $\lambda > 0$ и функции $x(\lambda t)$ имеем

$$\lambda^2\int_0^\infty x'(\lambda t)^2 dt \le \int_0^\infty x(\lambda t)^2 dt + \lambda^4\int_0^\infty x''(\lambda t)^2 dt,$$

или

$$\int\limits_0^\infty x'(u)^2du \le \lambda^{-2}\int\limits_0^\infty x(u)^2du + \lambda^2\int\limits_0^\infty x''(u)^2du.$$

Полагая $\lambda^2 = \left[\int\limits_0^\infty x(u)^2du / \int\limits_0^\infty x''(u)^2du\right]^{\frac{1}{2}}$, получаем из последнего неравенства неравенство (1.5.1).

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать неравенство (1.5.2). Для этого заметим, что при любом $T > 0$

$$\int\limits_0^T \Big[x(t)^2 - x'(t)^2 + x''(t)^2 - (x(t) + x'(t) + x''(t))^2\Big]\,dt =$$

$$= -2\int\limits_0^T \Big[x'(t)^2 + x(t)x'(t) + x(t)x''(t) + x'(t)x''(t)\Big]\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^T \Big[(x(t) + x'(t))^2\Big]'\,dt = \big[x(0) + x'(0)\big]^2 - \big[x(T) + x'(T)\big]^2. \tag{1.5.3}$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^T x'(t)^2dt = x(T)x'(T) - x(0)x'(0) - \int\limits_0^T x(t)x''(t)dt. \tag{1.5.4}$$

Так как $x, x'' \in L_2(\mathbf{R}_+)$, то согласно неравенству Гельдера интеграл $\int\limits_0^\infty x(t)x''(t)dt$ конечен. Следовательно, переходя в (1.5.4) к пределу при $T \to \infty$, имеем

$$\int\limits_0^\infty x'(t)^2dt < +\infty, \tag{1.5.5}$$

так как в противном случае из (1.5.4) следовало бы, что

$$x(T)x'(T) \to \infty, \quad T \to \infty,$$

и

$$x^2(T) - x^2(0) = 2\int\limits_0^T x(t)x'(t)dt \to \infty, \quad T \to \infty. \tag{1.5.6}$$

Однако это невозможно, поскольку $x \in L_2(\mathbf{R}_+)$.

Таким образом, оба интеграла в (1.5.4) имеют конечные пределы при $T \to \infty$ и, следовательно, $\lim\limits_{T\to\infty} x(T)x'(T)$ существует и конечен. Этот предел должен равняться нулю, так как в противном случае $\int\limits_0^T x(t)x'(t)dt \to \infty$ при $T \to \infty$ и из (1.5.6) снова получалось бы противоречие, так как $x \in L_2(\mathbf{R}_+)$.

Заметим далее, что при $T \to \infty$ предел интеграла в левой части (1.5.3) существует (надо использовать неравенство Гельдера для $\int\limits_0^T x(t)x'(t)dt$ и $\int\limits_0^T x(t)x''(t)dt$, а также учесть (1.5.5)), и, следовательно, существует предел

$$\lim_{T\to\infty}[x(T)^2 + x'(T)^2] := L,$$

так как $x(T)x'(T) \to 0$ при $T \to \infty$.

Если $L \neq 0$, то либо $\int\limits_0^\infty x(t)^2dt$, либо $\int\limits_0^\infty x'(t)^2dt$ должно равняться $+\infty$, что противоречит условию $x \in L_2(\mathbf{R}_+)$ или соотношению (1.5.5). Следовательно, $L = 0$ и из (1.5.3) имеем

$$\int\limits_0^\infty \left[x(t)^2 - x'(t)^2 + x''(t)^2\right] dt =$$

$$= \left[x(0) + x'(0)\right]^2 + \int\limits_0^\infty (x(t) + x'(t) + x''(t))^2 dt. \tag{1.5.7}$$

Из (1.5.7) получаем

$$\int_0^\infty x'(t)^2 dt = \int_0^\infty x(t)^2 dt + \int_0^\infty x''(t)^2 dt - \big[x(0) + x'(0)\big]^2 -$$

$$- \int_0^\infty (x(t) + x'(t) + x''(t))^2 dt \le \int_0^\infty x(t)^2 dt + \int_0^\infty x''(t)^2 dt,$$

при этом равенство в последнем неравенстве будет, если только $x(t) + x'(t) + x''(t) = 0$ и $x(0) + x'(0) = 0$, т.е. если $x(t) = Ay(t)$. Теорема доказана.

Доказательство 2. В силу эквивалентности неравенств (1.5.1) и (1.5.2) достаточно доказать, что

$$J(x) := \int_0^\infty \left[x^2(t) - x'(t)^2 + x''(t)^2\right] dt \ge 0. \tag{1.5.8}$$

Основная идея состоит в том, чтобы свести проверку неотрицательности функционала $J(x)$ на всем классе $L^2_{2,2}(\mathbf{R}_+)$ к проверке его неотрицательности на более узком классе функций $z \in L^2_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, таких, что $z(0) = 0$.

Непосредственными вычислениями можно проверить, что для экстремальной функции y

$$y(t) + y'(t) + y''(t) = 0, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0 \tag{1.5.9}$$

и

$$J(y) = 0. \tag{1.5.10}$$

Представим теперь $x(t)$ в виде $x(t) = z(t) + cy(t)$, причем выберем c таким, чтобы $z(0) = 0$. Тогда

$$z,\ z,'\ z'' \in L^2(\mathbf{R}_+). \tag{1.5.11}$$

Заметим далее, что если $x' \in L^2(\mathbf{R})$, то $x(t) = o(t^{1/2})$ при $t \to \infty$. Действительно, выберем t_0 таким, чтобы $\int_{t_0}^\infty x'(u)^2 du < \varepsilon^2$.

Тогда для $t > t_0$ будет

$$[x(t) - x(t_0)]^2 = \left(\int\limits_{t_0}^{t} x'(u)du \right)^2 \leq (t - t_0) \int\limits_{t_0}^{t} x'(u)^2 du < t\varepsilon^2.$$

Следовательно, для достаточно больших t получаем

$$x(t) < x(t_0) + \varepsilon t^{1/2} < 2\varepsilon t^{1/2}.$$

С помощью этого замечания из (1.5.11) заключаем, что при $t \to \infty$ будет $z(t) = o(t^{1/2})$ и $z'(t) = o(t^{1/2})$. Кроме того (см. предыдущее доказательство), $z(t)z'(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теперь имеем

$$J(x) = J(z) + 2cK(y, z) + c^2 J(y),$$

где

$$K(y, z) = \int\limits_0^\infty \left[y(t)z(t) - y'(t)z'(t) + y''(t)z''(t) \right] dt =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \left[y'(t) + y''(t) \right] z(t)dt - \int\limits_0^\infty \left[y(t) + y'(t) \right] z''(t)dt -$$

$$- \int\limits_0^\infty y'(t)z'(t)dt = \int\limits_0^\infty \left[y(t) + y'(t) + y''(t) \right] z'(t)dt = 0$$

согласно (1.5.9). Учитывая также (1.5.10), имеем $J(x) = J(z)$, т.е. достаточно доказать, что $J(z) > 0$, если только $z(t) \not\equiv 0$. Но $z(0) = 0$ ввиду выбора c и, как отмечалось выше, $z(t)z'(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и поэтому

$$\int\limits_0^\infty z'(t)^2 dt = -\int\limits_0^\infty z(t)z''(t)dt.$$

Следовательно,

$$J(z) = \int\limits_0^\infty \left[z(t)^2 + z(t)z''(t) + z''(t)^2\right] dt = \int\limits_0^\infty \left[z(t) + z''(t)\right]^2 dt -$$

$$- \int\limits_0^\infty z(t)z''(t)dt = \int\limits_0^\infty \left[z(t) + z''(t)\right]^2 dt + \int\limits_0^\infty z'(t)^2 dt > 0.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема дает аналог теоремы 1.5.1 для функций, заданных на всей числовой оси.

Теорема 1.5.2. *Пусть $x \in L_2(\mathbf{R})$, производная x' локально абсолютно непрерывна и $x'' \in L_2(\mathbf{R})$. Тогда*

$$\|x'\|_2 \le \|x\|_2^{\frac{1}{2}} \|x''\|_2^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5.12}$$

Неравенство (1.5.12) *обращается в равенство только тогда, когда $x(t) \equiv 0$. Это неравенство неулучшаемо на классе функций $x \in L^2_{2,2}(\mathbf{R})$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1.5.1, устанавливается, что

$$x(T)x'(T) \to 0, \quad T \to \pm\infty.$$

Далее с помощью неравенства Шварца получаем

$$\|x'\|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^\infty x'(t)x'(t)dt = -\int\limits_{-\infty}^\infty x(t)x''(t)dt \le \|x\|_2 \|x''\|_2, \tag{1.5.13}$$

причем в последнем неравенстве знак равенства будет тогда, если только $x''(t) = kx(t)$, т.е. если только $x(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$ или $x(t) = A\sin(\alpha t + \beta)$ с некоторыми константами A, B, α, β. Но для функций x такого вида $\int\limits_{-\infty}^\infty x(t)^2 dt$ конечен только тогда, когда $x \equiv 0$.

Чтобы доказать неулучшаемость неравенства (1.5.12) на классе $x \in L^2_{2,2}(\mathbf{R})$, рассмотрим функцию $x_0(t) := e^{-|t|}$. Сглаживая угол ее графика, нетрудно получить такую последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n\in\mathbf{N}}$, которые во всех точках t имеют вторую производную $x''_n(t)$, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x'_n(t)^2 dt \geq 1-\frac{1}{n}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_n(t)^2 dt \leq 1+\frac{1}{n}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} x''_n(t)^2 dt \leq 1+\frac{1}{n}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x'_n(t)^2 dt > (1-\varepsilon) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_n(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x''_n(t)^2 dt \right)^{1/2}.$$

Теорема доказана.

Применяя в (1.5.13) неравенство Гельдера с показателями p и $p' = p/(p-1)$, аналогично теореме 1.5.2 устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 1.5.3. *Пусть $p \in [1,\infty]$, $x \in L_p(\mathbf{R})$, производная x' локально абсолютно непрерывна и $x'' \in L_{p'}(\mathbf{R})$. Тогда*

$$\|x'\|_2 \leq \|x\|_p^{\frac{1}{2}} \|x''\|_{p'}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5.14}$$

причем неравенство (1.5.14) *строгое, если $x \neq 0$. Константа* 1 *в этом неравенстве неулучшаема.*

Для периодических функций аналог теоремы 1.5.3 устанавливается без труда (нет необходимости обосновывать аналог (1.5.13)).

Теорема 1.5.4. *Пусть $x \in L^2_{p'}(\mathbf{T})$, $p \in [1,\infty]$. Тогда*

$$\|x'\|_2 \leq \|x\|_p^{\frac{1}{2}} \|x''\|_{p'}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5.15}$$

Неравенство (1.5.15) *неулучшаемо.*

Мы не приводим доказательство неулучшаемости неравенств (1.5.14) и (1.5.15), поскольку в § 5.9 их неулучшаемость будет доказана в более общем случае.

1.6. Неравенства Харди–Литлвуда–Полиа в L_2 на оси и окружности

Теорема 1.6.1. *Пусть $r, k \in \mathbf{N},\ k < r$. Для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R})$ выполняется точное на классе $L^r_{2,2}(\mathbf{R})$ неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_2(\mathbf{R})} \le \|x\|^{1-k/r}_{L_2(\mathbf{R})} \left\|x^{(r)}\right\|^{k/r}_{L_2(\mathbf{R})}. \tag{1.6.1}$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье функции x:

$$\widehat{x}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Применяя к производной $x^{(k)}$ хорошо известную формулу Планшереля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{x}(\lambda)|^2\, d\lambda,$$

получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|x^{(k)}(t)\right|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2k} |\widehat{x}(\lambda)|^2\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\lambda^{2r} |\widehat{x}(\lambda)|^2\right)^{k/r} \left(|\widehat{x}(\lambda)|^2\right)^{1-k/r}\right) d\lambda.$$

Оценивая последний интеграл при помощи неравенства Гельдера с показателями r/k и $r/(r-k)$ и снова применяя формулу Планшереля, имеем

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} \le \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2r} |\widehat{x}(\lambda)|^2\, d\lambda\right)^{k/r} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{x}(\lambda)|^2\, d\lambda\right)^{1-k/r} =$$

$$= \left\|x^{(r)}\right\|^{2k/r}_{L_2(\mathbf{R})} \|x\|^{2(1-k/r)}_{L_2(\mathbf{R})}.$$

Неравенство (1.6.1) доказано. Чтобы доказать его неулучшаемость, рассмотрим нечетную $r+1$ раз непрерывно дифференцируемую на всей прямой функцию φ с носителем на $[-\pi,\pi]$, такую, что $\varphi^{(k)}(0) = \sin^{(k)}(0),\ k=0,1,...,r$. Положим

$$x_m(t) := \begin{cases} \sin t, & \text{если } |t| \le 2\pi m; \\ \varphi(t-2\pi m), & \text{если } 2\pi m \le t \le (2m+1)\pi; \\ \varphi(t+2\pi m), & \text{если } -(2m+1)\pi \le t \le 2\pi m; \\ 0, & \text{если } |t| \ge (2m+1)\pi. \end{cases}$$

Тогда при $m \to \infty$

$$\|x_m\|^2_{L_2(\mathbf{R})} = 4\pi m + O(1), \quad \left\|x_m^{(k)}\right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} = 4\pi m + O(1),$$

$$\left\|x_m^{(r)}\right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} = 4\pi m + O(1)$$

и, следовательно,

$$\frac{\|x_m\|_{L_2(\mathbf{R})}}{\|x_m\|^{1-k/r}_{L_2(\mathbf{R})} \left\|x_m^{(r)}\right\|^{k/r}_{L_2(\mathbf{R})}} \to 1 \quad (m \to \infty).$$

Теорема доказана.

Теорема 1.6.2. *Пусть $r,k \in \mathbf{N},\ k<r$. Для любой функции $x \in L_2^r(\mathbf{T})$ выполняется точное на классе $L_2^r(\mathbf{T})$ неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_2(\mathbf{T})} \le \|x\|^{1-k/r}_{L_2(\mathbf{T})} \left\|x^{(r)}\right\|^{k/r}_{L_2(\mathbf{T})}. \tag{1.6.2}$$

Доказательство. Фиксируем функцию $x \in L_2(\mathbf{T})$, отличную от константы, и пусть $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \rho_l \cos(lt+t_l)$ – ее ряд Фурье. Тогда по неравенству Парсеваля

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{L_2(\mathbf{T})} = \left\|\sum_{l=1}^{\infty} l^k \rho_l \cos(l(\cdot)+t_l+k\pi/2)\right\|^2_{L_2(\mathbf{T})} =$$

$$= \pi \sum_{l=1}^{\infty} l^{2k} \rho_l^2 = \pi \sum_{l=1}^{\infty} \left(l^{2k} \rho_l^2 \right)^{k/r} \left(\rho_l^2 \right)^{1-k/r}.$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_2(\mathbf{T})}^2 \leq \pi \left(\sum_{l=1}^{\infty} l^{2r} \rho_l^2 \right)^{k/r} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \rho_l^2 \right)^{1-k/r} \leq$$

$$\leq \left(\pi \sum_{l=1}^{\infty} l^{2r} \rho_l^2 \right)^{k/r} \left(\pi \left(\frac{1}{2} \rho_0^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \rho_l^2 \right) \right)^{1-k/r} = \left\| x^{(r)} \right\|_{L_2(\mathbf{T})}^{2k/r} \|x\|_{L_2(\mathbf{T})}^{2-2k/r}.$$

Нетрудно проверить, что неравенство (1.6.2) обращается в равенство для функций вида $x(t) = a\cos(nt + b)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Теорема доказана.

1.7. Обсуждения и постановки задач

В работе [233] Ландау по существу решал задачу (см. § 1.2) о промежуточной производной в следующей постановке:

$$\|x'\|_\infty \to \sup, \quad x \in L^2_{\infty,\infty}(G), \quad \|x\|_\infty \leq \gamma, \quad \|x''\|_\infty \leq \delta,$$

где G – конечный интервал $\mathbf{I}$. Естественным обобщением этой задачи является следующая. Пусть G – одно из множеств $\mathbf{I}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{R}$ или $\mathbf{R}_+$. Пусть также заданы числа $k, r \in \mathbf{Z}_+$, $0 \leq k < r$; $q, p, s \in [1, \infty]$; $\gamma, \delta > 0$. Для функций $x \in L^r_{p,s}(G)$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \to \sup, \quad \|x\|_p \leq \gamma, \quad \left\| x^{(r)} \right\|_s \leq \delta. \tag{1.7.1}$$

Значение верхней грани в этой задаче будем обозначать символом

$$\Phi(\gamma, \delta) = \Phi_{q,p,s;k,r}(\gamma, \delta). \tag{1.7.2}$$

Очевидным свойством функции $\Phi(\gamma, \delta)$ является ее монотонное неубывание по каждой переменной.

Наряду с задачей (1.7.1) будем рассматривать также следующую задачу (снова для функций $x \in L^r_{p,s}(G)$):

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \to \sup, \quad \|x\|_p = \gamma, \quad \left\|x^{(r)}\right\|_s = \delta. \tag{1.7.3}$$

Значение верхней грани в этой задаче будем обозначать символом

$$\Psi(\gamma, \delta) = \Psi_{q,p,s;k,r}(\gamma, \delta). \tag{1.7.4}$$

Заметим, что если нам полностью (при всех $\gamma, \delta \geq 0$) известна функция $\Phi(\gamma, \delta)$, то для любой функции $x \in L^r_{p,s}(G)$ выполняется неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq \Phi\left(\|x\|_p, \left\|x^{(r)}\right\|_s\right). \tag{1.7.5}$$

Неравенство (1.7.5) при этом является неулучшаемым в следующем смысле: для любых $\varepsilon,\ \gamma, \delta > 0$ найдется функция $x \in L^r_{p,s}(G)$, для которой $\|x\|_p \leq \gamma$, $\left\|x^{(r)}\right\|_s \leq \delta$ и

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q > (1-\varepsilon)\Phi(\gamma, \delta). \tag{1.7.6}$$

Знание функции $\Psi(\gamma, \delta)$ позволяет для функций $x \in L^r_{p,s}(G)$ записать неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq \Psi\left(\|x\|_p, \left\|x^{(r)}\right\|_s\right), \tag{1.7.7}$$

которое будет неулучшаемым в следующем смысле: для любых $\varepsilon,\ \gamma, \delta > 0$ найдется функция $x \in L^r_{p,s}(G)$, для которой $\|x\|_p = \gamma$, $\left\|x^{(r)}\right\|_s = \delta$ и

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q > (1-\varepsilon)\Psi\left(\|x\|_p, \left\|x^{(r)}\right\|_s\right). \tag{1.7.8}$$

Если в задаче (1.7.3) существует (при всех $\gamma, \delta > 0$) экстремальная (т.е. реализующая супремум в (1.7.3)) функция, то для любых

$\gamma, \delta > 0$ найдется функция $x \in L^r_{p,s}(G)$, для которой $\|x\|_p = \gamma$, $\left\|x^{(r)}\right\|_s = \delta$ и

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q = \Psi\left(\|x\|_p, \left\|x^{(r)}\right\|_s\right).$$

С другой стороны, если нам известны неравенства (1.7.5) и (1.7.7) с некоторыми функциями Φ и Ψ, неулучшаемые в смысле (1.7.6) и (1.7.8) соответственно, то $\Phi(\gamma, \delta)$ и $\Psi(\gamma, \delta)$ – это значения экстремальных задач (1.7.1) и (1.7.3).

Неравенства вида (1.7.5) и (1.7.7) будут называться неравенствами для промежуточных производных.

В связи с задачами (1.7.1) и (1.7.3) естественно возникают следующие вопросы.

1. При каких значениях параметров $q, p, s; k, r$ верхние грани в (1.7.1) и (1.7.3) конечны при всех значениях $\gamma, \delta \geq 0$?

2. Если при данных значениях параметров $q, p, s; k, r$ верхние грани в (1.7.1) и (1.7.3) конечны, то каковы функции $\Phi(\gamma, \delta)$ и $\Psi(\gamma, \delta)$?

3. Существуют ли экстремальные (т.е. реализующие верхние грани в (1.7.1) и (1.7.3)) функции $x \in L^r_{p,s}(G)$?

Что касается ответа на первый вопрос, то он весьма непрост, и будет достаточно подробно изучаться в дальнейшем (см. гл. 4). Здесь отметим только, что ответ на него существенно зависит от области G определения рассматриваемых функций. Так, верхняя грань в задаче (1.7.1) для функций, заданных на конечном интервале или окружности, конечна при любых значениях параметров $q, p, s; k, r; \gamma, \delta$ (см. § 1.3 и 1.6). В случае же функций, заданных на прямой $\mathbf{R}$ или полупрямой $\mathbf{R}_+$, верхняя грань в (1.7.1) будет конечной при всех $\gamma, \delta \geq 0$, если и только если (см. § 4.2) параметры $q, p, s; k, r$ связаны неравенством

$$\frac{r - k - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p} \leq \frac{r - k}{r}. \tag{1.7.9}$$

С вопросом отыскания функций $\Phi(\gamma, \delta)$ и $\Psi(\gamma, \delta)$, т. е. с вопросом о точном решении при некотором допустимом наборе параметров $q, p, s; k, r$ экстремальных задач (1.7.1) и (1.7.3) (или по крайней мере с оценкой этих функций), связано основное содержание настоящей

книги. Здесь надо отметить следующее. В известном смысле ответ на этот вопрос проще для функций, заданных на всей оси или полуоси, чем для функций, заданных на конечном интервале или окружности. Во всяком случае для функций, заданных на оси или полуоси, нетрудно выяснить вид функций $\Phi(\gamma,\delta)$ и $\Psi(\gamma,\delta)$ (и доказать их совпадение).

Теорема 1.7.1. *Пусть* $G = \mathbf{R}$ *или* $G = \mathbf{R}_+$ *и параметры* $q, p, s; k, r$ *связаны неравенством* (1.7.9). *Тогда при любых* $\gamma, \delta \geq 0$

$$\Phi(\gamma,\delta) = \Psi(\gamma,\delta) = K\gamma^{\alpha}\delta^{1-\alpha}, \tag{1.7.10}$$

где $\alpha = \dfrac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}$, *а* K *– неулучшаемая константа в неравенстве*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq K\,\|x\|_p^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}, \tag{1.7.11}$$

т.е.

$$K = \sup_{\substack{x\in L^r_{p,s}(G)\\ x\neq 0}} \frac{\left\|x^{(k)}\right\|_q}{\|x\|_p^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}}. \tag{1.7.12}$$

Доказательство. Ясно, что если для функций $x \in L^r_{p,s}(G)$ выполняется неравенство (1.7.11), то при любых $\gamma, \delta \geq 0$ будем иметь

$$\Phi(\gamma,\delta) \leq K\gamma^{\alpha}\delta^{1-\alpha}. \tag{1.7.13}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $x \in L^r_{p,s}(G)$, для которой

$$\frac{\left\|x_0^{(k)}\right\|_q}{\|x_0\|_p^{\alpha}\left\|x_0^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}} > (1-\varepsilon)K.$$

Если теперь a и b – произвольные положительные числа, и $x_{a,b}(t) := ax_0(bt)$, то для любого $p \in [1,\infty]$

$$\left\|x_{a,b}^{(k)}\right\|_p = ab^{k-1/p}\left\|x_0^{(k)}\right\|_p, \quad k = 0, ..., r.$$

Поэтому с учетом равенства $\alpha = \dfrac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}$ получаем

$$\frac{\left\|x_{a,b}^{(k)}\right\|_q}{\left\|x_{a,b}\right\|_p^{\alpha}\left\|x_{a,b}^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}} = \frac{\left\|x_0^{(k)}\right\|_q}{\|x_0\|_p^{\alpha}\left\|x_0^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}} > (1-\varepsilon)K.$$

Выберем теперь числа a, b так, чтобы

$$\left\|x_{a,b}\right\|_p = \gamma, \quad \left\|x_{a,b}^{(r)}\right\|_s = \delta.$$

Для этого достаточно взять

$$b = \left(\frac{\delta}{\gamma}\frac{\|x_0\|_p}{\left\|x_0^{(r)}\right\|_s}\right)^{(r-1/s+1/p)^{-1}}, \qquad a = \frac{\gamma}{\|x_0\|_p}\left(\frac{\delta}{\gamma}\frac{\|x_0\|_p}{\left\|x_0^{(r)}\right\|_s}\right)^{\frac{1/p}{r-1/s+1/p}}.$$

Для полученной функции $x_{a,b}$ имеем

$$\left\|x_{a,b}^{(k)}\right\|_q \geq (1-\varepsilon)K\gamma^{\alpha}\delta^{1-\alpha},$$

и, следовательно,

$$\Phi(\gamma,\delta) \geq \Psi(\gamma,\delta) \geq (1-\varepsilon)K\gamma^{\alpha}\delta^{1-\alpha}.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\Phi(\gamma,\delta) \geq \Psi(\gamma,\delta) \geq K\gamma^{\alpha}\delta^{1-\alpha},$$

что вместе с (1.7.13) дает (1.7.10). Теорема доказана.

Таким образом, для функций, заданных на всей оси или полуоси, исследование экстремальных задач (1.7.1) и (1.7.3) эквивалентно получению неравенств вида (1.7.11) с неулучшаемой константой (1.7.12).

Пусть теперь функции заданы на единичной окружности. Тогда предыдущие рассуждения, связанные с построением функции

$x_{a,b}$, не годятся по той причине, что функции $x(bt)$ остаются 2π-периодическими лишь в случае $b \in \mathbf{N}$. Как следствие, задачи (1.7.1) и (1.7.3) не эквивалентны отысканию точной константы в неравенстве (1.7.11) для $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})$, хотя, конечно, наличие неравенства (1.7.11) для $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})$ влечет оценку

$$\Phi(\gamma, \delta) \le K\gamma^\alpha \delta^{1-\alpha}. \tag{1.7.14}$$

При этом решение экстремальных задач (1.7.1) и (1.7.3) для периодических функций является весьма сложным (и точных результатов в этом направлении практически нет). Вместе с тем, задачи о точных неравенствах вида (1.7.11) для периодических функций с показателем

$$\alpha = \min\left\{\frac{r-k}{r}, \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}\right\}$$

(по поводу происхождения такого показателя см. § 4.3) уже поддаются исследованию. В этом направлении получено довольно много точных результатов, которые нашли весьма интересные применения в теории аппроксимации.

В данной книге для функций $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})$ будем изучать главным образом задачу о точных неравенствах вида (1.7.11), и только в редких случаях будем обсуждать возможность получения более деликатных, чем (1.7.14), оценок для $\Phi(\gamma, \delta)$.

Теперь обсудим некоторые обобщения задач (1.7.1) и (1.7.3). Пусть X, Y, Z – линейные нормированные пространства, A – оператор, действующий из X в Y; B – оператор, действующий из X в Z, причем $D(A) \subset D(B)$, где $D(A)$ – область определения оператора A.

Рассмотрим следующие две экстремальные задачи (для $x \in D(B)$):

$$\|Ax\|_Y \to \sup, \quad \|x\|_X \le \gamma, \quad \|Bx\|_Z \le \delta \tag{1.7.15}$$

и

$$\|Ax\|_Y \to \sup, \quad \|x\|_X = \gamma, \quad \|Bx\|_Z = \delta. \tag{1.7.16}$$

Как и выше, значения верхних граней в (1.7.15) и (1.7.16) будем обозначать $\Phi(\gamma,\delta)$ и $\Psi(\gamma,\delta)$ соответственно. При необходимости подчеркнуть, что речь идет об экстремальных задачах, связанных с операторами A и B, будем писать $\Phi_{A,B}(\gamma,\delta)$ и $\Psi_{A,B}(\gamma,\delta)$. Предположим, что операторы A и B таковы, что при любых $\gamma,\delta\geq 0$

$$\Phi_{A,B}(\gamma,\delta)<\infty \quad \text{и} \quad \Psi_{A,B}(\gamma,\delta)<\infty.$$

Отметим, что если операторы A и B однородные, то, как нетрудно проверить,

$$\Phi(\gamma,\delta)=\gamma\Phi\left(1,\frac{\delta}{\gamma}\right), \quad \Phi(\gamma,\delta)=\delta\Phi\left(\frac{\gamma}{\delta},1\right),$$

$$\Psi(\gamma,\delta)=\gamma\Psi\left(1,\frac{\delta}{\gamma}\right), \quad \Psi(\gamma,\delta)=\delta\Psi\left(\frac{\gamma}{\delta},1\right).$$

Поэтому, зная при всех $\delta>0$ функцию $\Phi(1,\delta)$ ($\Psi(1,\delta)$) или при всех $\gamma>0$ – функцию $\Phi(\gamma,1)$ ($\Psi(\gamma,1)$), мы полностью знаем функции $\Phi(\gamma,\delta)$ и $\Psi(\gamma,\delta)$. В дальнейшем операторы A и B считаем однородными.

Если функции $\Phi_{A,B}(\gamma,\delta)$ и $\Psi_{A,B}(\gamma,\delta)$ известны, то для любого $x\in D(B)$ можно написать неравенство

$$\|Ax\|_Y\leq\Psi(\|x\|_X,\|Bx\|_Z)\leq\Phi(\|x\|_X,\|Bx\|_Z). \tag{1.7.17}$$

Положим $\omega(\gamma):=\Phi(\gamma,1)$. Это величина равняется верхней грани в следующей задаче:

$$\|Ax\|_Y\to\sup, \quad \|x\|_X\leq\gamma, \quad \|Bx\|_Z\leq 1. \tag{1.7.18}$$

Величина $\omega(\gamma)$ – значение задачи (1.7.18) – введена С.Б. Стечкиным и называется модулем непрерывности оператора A на классе элементов

$$Q_B=\{x\in D(B):\|Bx\|_Z\leq 1\}. \tag{1.7.19}$$

В терминах функции $\omega(\gamma)$ неравенства (1.7.17) можно представить в виде

$$\|Ax\|_Y\leq\|Bx\|_Z\omega\left(\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right), \tag{1.7.20}$$

где $Bx \neq 0$.

Если $X = L_p(G)$, $Y = L_q(G)$ и $Z = L_s(G)$ ($G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$), $A = d^k/dt^k$, $B = d^r/dt^r$, то, как видно из теоремы 1.7.1, модуль непрерывности оператора d^k/dt^k на классе $W^r_{p,s}(G)$ определяется равенством $\omega(\gamma) = K\gamma^\alpha$, где $\alpha = \dfrac{r - k - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p}$.

Таким образом, задача вычисления модуля непрерывности оператора d^k/dt^k на классе $W^r_{p,s}(G)$ эквивалентна задаче отыскания точной константы (1.7.12) в неравенстве (1.7.11). На этом основана связь неравенств для промежуточных производных с задачей С.Б. Стечкина о наилучшем приближении неограниченных операторов ограниченными (см. § 7.1).

Если для любого $x \in D(B)$ выполняется неравенство (1.7.20) (с некоторой функцией $\omega(\gamma)$), причем для любых $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x_{\gamma,\varepsilon} \in D(B)$, для которого $\|Bx_{\gamma,\varepsilon}\|_Z = 1$, $\|x_{\gamma,\varepsilon}\|_X = \gamma$, и

$$\|Ax_{\gamma,\varepsilon}\|_Y \geq (1-\varepsilon)\omega\left(\|x_{\gamma,\varepsilon}\|_X\right), \tag{1.7.21}$$

то $\omega(\cdot)$ – модуль непрерывности оператора A на классе Q_B.

Пусть $X, Y, Z_1, ..., Z_m$ – линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$, $B_i : X \to Z_i$ – некоторые операторы.

Более общими по сравнению с (1.7.15) и (1.7.16) являются следующие экстремальные задачи:

$$\|Ax\|_Y \to \sup, \quad \|B_i x\|_{Z_i} \leq \gamma_i, \quad i = 1, ..., m, \tag{1.7.22}$$

$$\|Ax\|_Y \to \sup, \quad \|B_i x\|_{Z_i} = \gamma_i, \quad i = 1, ..., m. \tag{1.7.23}$$

Мы не будем здесь подробно обсуждать эти задачи. Скажем только, что первая из них особенно интересна в связи с неравенствами для производных функций многих переменных, а вторая – в связи с задачей А.Н. Колмогорова о существовании функции, имеющей заданные числа нормами своих производных (см. § 2.4).

Вернемся к неравенству (1.7.20). Предположим, что операторы A и B таковы, что $\omega(\gamma)$ – выпуклая вверх и непрерывно дифференцируемая в интервале $(0, \infty)$ функция (условие дифференцируемости

в каждой точке не является обязательным и вводится для упрощения изложения). Уравнение касательной к графику функции $y = \omega(t)$ в точке $(t_0, \omega(t_0))$ имеет вид $y = \omega(t_0) + \omega'(t_0)(t - t_0)$. Учитывая, что график выпуклой вверх функции расположен ниже любой касательной, из (1.7.20) получаем (для любого $t_0 > 0$)

$$\|Ax\|_Y \le \|Bx\|_Z \omega\left(\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right) \le$$

$$\le \|Bx\|_Z \left(\omega(t_0) + \omega'(t_0)\left(\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z} - t_0\right)\right) =$$

$$= \omega'(t_0)\|x\|_X + \left[\omega(t_0) - t_0\omega'(t_0)\right] \|Bx\|_Z.$$

Таким образом, для любого $t_0 > 0$ и любого $x \in D(B)$ выполняется неравенство

$$\|Ax\|_Y \le \omega'(t_0)\|x\|_X + \left[\omega(t_0) - t_0\omega'(t_0)\right] \|Bx\|_Z. \qquad (1.7.24)$$

При сделанных относительно функции $\omega(t)$ предположениях производная $\omega'(t)$ не возрастает и принимает все значения между m и M:

$$m = \inf_t \omega'(t) \quad \text{и} \quad M = \sup_t \omega'(t).$$

Поэтому для любого $N \in (m, M)$ найдется $t_0 = t_0(N)$, для которого $\omega'(t_0) = N$ $(t_0 = (\omega')^{-1}(N))$. Теперь неравенство (1.7.24) можно переписать в виде: для любого $N \in (m, M)$ и любого $x \in D(B)$ имеем

$$\|Ax\|_Y \le N\|x\|_X + [\omega(t_0(N)) - Nt_0(N)] \|Bx\|_Z. \qquad (1.7.25)$$

Видно, что из неравенства (1.7.20) вытекает серия неравенств (1.7.25).

Пусть теперь неравенство (1.7.20) неулучшаемо в смысле (1.7.21) и функция $\omega(t)$ строго выпукла. Покажем, что тогда при любом $N \in (m, M)$ константу $\omega(t_0(N)) - Nt_0(N)$ в правой части (1.7.25) уменьшить нельзя. Предположим противное. Тогда для некоторого

$N_0 \in (m, M)$, некоторого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in D(B)$ выполняется неравенство

$$\|Ax\|_Y \leq N\|x\|_X + (1-\varepsilon)\left[\omega(t_0(N)) - Nt_0(N)\right]\|Bx\|_Z.$$

Так как неравенство (1.7.20) неулучшаемо, то для любого достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$ найдется элемент $x_0 \in D(B)$, такой, что (ниже $\bar{t}_0 = t_0(N_0)$)

$$\|x_0\|_X = \bar{t}_0, \quad \|Bx_0\|_Z = 1 \quad \text{и} \quad \|Ax_0\|_Y > (1-\varepsilon_1)\omega(\bar{t}_0).$$

Тогда получаем

$$(1-\varepsilon_1)\omega(\bar{t}_0) < \|Ax_0\|_Y \leq N_0\bar{t}_0 + (1-\varepsilon)\left[\omega(\bar{t}_0) - N_0\bar{t}_0\right],$$

или

$$(\varepsilon - \varepsilon_1)\omega(\bar{t}_0) < \varepsilon N_0\bar{t}_0.$$

Но при всех достаточно малых ε_1 это неравенство противоречиво, поскольку

$$\omega(\bar{t}_0) > N_0\bar{t}_0.$$

Для функций, заданных на оси или полуоси, и оператора дифференцирования имеем

$$\omega(t) = Kt^\alpha, \quad \omega'(t) = K\alpha t^{\alpha-1}.$$

Поэтому решением уравнения $\omega'(t) = N$ будет точка t_0:

$$t_0 = \left(\frac{K\alpha}{N}\right)^{(1-\alpha)^{-1}}.$$

Значит, для любого $N > 0$ справедливо следующее неравенство с неулучшаемой константой при $\left\|x^{(r)}\right\|_s$:

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq N\|x\|_p + K(1-\alpha)\left(\frac{K\alpha}{N}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left\|x^{(r)}\right\|_s. \qquad (1.7.26)$$

Выбрав здесь $N = K\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}$, получим справедливое для всех $x \in L^r_{p,s}(G)$ неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le K\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\left(\|x\|_p + \left\|x^{(r)}\right\|_s\right).$$

Так как оно справедливо и для всех функций вида $x(bt),\ b > 0$, то получим неравенство с параметром $b > 0$:

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le K\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\left(b^{-k+1/q-1/p}\|x\|_p + b^{r-k+1/q-1/s}\left\|x^{(r)}\right\|_s\right).$$

Минимизируя правую часть по $b > 0$, возвращаемся к (1.7.26).

Иногда бывает удобно исследовать аддитивные неравенства в другом виде, когда нормы производных участвуют в этих неравенствах в некоторых степенях (например, для пространства L_2). Рассмотрим такую ситуацию. Возьмем произвольное $r > 0$. Из мультипликативного неравенства

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q^r \le K^r \|x\|_p^{r\alpha} \left\|x^{(r)}\right\|_s^{r(1-\alpha)}$$

и предыдущих соображений следует, что можно записать аддитивное неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q^r \le N\|x\|_p^r + K^r(1-\alpha)\left(\frac{K^r\alpha}{N}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left\|x^{(r)}\right\|_s^r.$$

Выбирая $N = K^r\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}$, приходим к неравенству

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q^r \le K^r\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\left(\|x\|_p^r + \left\|x^{(r)}\right\|_s^r\right). \tag{1.7.27}$$

Если константа K в мультипликативном неравенстве неулучшаемая, то и константа $K^r\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}$ в (1.7.27) также неулучшаема (надо использовать рассуждения, аналогичные применявшимся при доказательстве теоремы 1.7.1).

Если нас интересует неулучшаемое неравенство вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q^r \le \frac{1}{\gamma}\left(\|x\|_p^r + \left\|x^{(r)}\right\|_s^r\right),$$

то соответствующие неулучшаемые константы γ и K связаны соотношением

$$K = \left(\gamma\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\right)^{-1/r}.$$

Например, если $q = p = s = 2$ и $r = 2$, то получим

$$K^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\left(\frac{r-k}{k}\right)^{k/r} + \left(\frac{k}{r-k}\right)^{(r-k)/k}\right).$$

Вернемся к аддитивным неравенствам (1.7.25), которые запишем в виде

$$\|Ax\|_Y \le N\|x\|_X + C(N)\|Bx\|_Z,$$

причем константа $C(N)$ для каждого допустимого N является неулучшаемой. Тогда

$$\|Ax\|_Y \le \inf_N \left(N\|x\|_X + C(N)\|Bx\|_Z\right) =$$

$$= \|Bx\|_Z \inf_N \left(C(N) + N\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right). \qquad (1.7.28)$$

Пусть $\Omega(t) = \inf_N(C(N)+Nt)$ (ясно, что график функции $\Omega(t)$ есть нижняя огибающая семейства прямых $y_N(t) = C(N) + Nt$). Тогда (1.7.28) можно переписать в виде

$$\|Ax\|_Y \le \|Bx\|_Z \Omega\left(\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right). \qquad (1.7.29)$$

Соотношение (1.7.29) тесно связано с неравенством (1.7.20), а функция $\Omega(t)$ может быть полезной при исследовании модулей непрерывности операторов.

Задачи (1.7.1) и (1.7.3) для функций, заданных на отрезке I, по-видимому, являются наиболее сложными (по сравнению с окружностью, осью или полуосью). Заменителя (полного, как в случае функций, заданных на оси или полуоси) или частичного (как в случае функций, заданных на окружности) в виде мультипликативного неравенства типа (1.7.7) в этом случае записать нельзя (если не накладывать на функции каких-либо дополнительных условий). Действительно, множеству $L^r_{p,s}(I)$ принадлежит любой алгебраический

полином степени не выше $r-1$. Поэтому, если бы выполнялось неравенство (1.7.7), мы, выбирая в качестве x такой полином P_{r-1}, сразу получили бы противоречивое неравенство $\|P'_{r-1}\|_q \le 0$.

Достаточно естественным заменителем мультипликативных неравенств в этом случае являются аддитивные неравенства, т.е. неравенства вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le K_0 \|x\|_p + K_r \left\|x^{(r)}\right\|_s, \tag{1.7.30}$$

где K_0 и K_r – некоторые константы. Сразу же заметим, что для полиномов степени не выше $r-1$ из (1.7.30) получаем неравенство типа Маркова–Никольского

$$\left\|P_{r-1}^{(k)}\right\|_q \le K_0 \|P_{r-1}\|_p.$$

Таким образом, неравенство (1.7.30) с константой, меньшей величины

$$M_{k,r}(q,p) := \sup_{P_{r-1}\in\pi_{r-1}} \frac{\left\|P_{r-1}^{(k)}\right\|_q}{\|P_{r-1}\|_p},$$

которая является точной константой в неравенстве Маркова–Никольского, невозможно. Вместе с тем, ниже (см. § 4.6) будет показано, что для любого $K_0 \ge M_{k,r}(q,p)$ найдется константа K_r, такая, что для всех $x \in L^r_{p,s}(I)$ выполняется неравенство (1.7.30). При этом, конечно, для любого K_0 представляет интерес наименьшая такая константа K_r. Таким образом, приходим к следующей естественной постановке задачи о неулучшаемых неравенствах для промежуточных производных функций, заданных на конечном интервале I: для любого заданного $K_0 \ge M_{k,r}(q,p)$ найти величину $\overline{K}_r = \overline{K}_r(K_0)$, равную точной нижней грани таких чисел K_r, что неравенство (1.7.30) выполняется сразу для всех функций $x \in L^r_{p,s}(I)$. Такого рода задачи рассматриваются в § 5.4–5.6.

В заключение данного параграфа отметим, что кроме задач (1.7.1) и (1.7.3) для функций, заданных на отрезке, представляют интерес также следующие две задачи.

Пусть заданы числа $p, s \in [1, \infty]$, $k, r \in \mathbf{Z}_+$, $k < r$, и фиксированная точка $t_0 \in \mathbf{I}$. Для $\gamma, \delta > 0$ требуется найти $\Phi(\gamma, \delta; t_0)$ и $\Psi(\gamma, \delta; t_0)$:

$$\Phi(\gamma, \delta; t_0) = \sup \left\{ |x^{(k)}(t_0)| : x \in L^r_{p,s}(I),\ \|x\|_p \le \gamma,\ \left\|x^{(r)}\right\|_s \le \delta \right\},$$

$$\Psi(\gamma, \delta; t_0) = \sup \left\{ \left|x^{(k)}(t_0)\right| : x \in L^r_{p,s}(I),\ \|x\|_p = \gamma,\ \left\|x^{(r)}\right\|_s = \delta \right\}.$$

Такие задачи рассматриваются в § 9.5. Задачи такого рода не возникают для функций, заданных на оси или окружности, поскольку в этих случаях L_∞-норма инвариантна относительно сдвига, и оценивать $\left|x^{(k)}(t_0)\right|$ в произвольной точке на соответствующем классе функций – это все равно, что оценивать $\left\|x^{(k)}\right\|_\infty$.

Комментарии к главе 1

Данная глава носит вводный характер. В § 1.1 мы предпринимаем попытку, используя доступный нам материал, выяснить, откуда берет начало проблематика, связанная с неравенствами для промежуточных производных.

В § 1.2 изложены принадлежащие Э. Ландау [233] первые точные результаты по неравенствам для производных, а также замечания Ж. Адамара [1] по данной теме.

В § 1.3 приведены доказательства (см. [297]) неравенств Ландау, основанные на других идеях. Эти идеи позволяют, во-первых, несколько расширить (по сравнению с Ландау) классы рассматриваемых функций, а во-вторых, предваряют некоторые из методов, которые впоследствии (см., например, гл. 7) привели к ряду интересных постановок задач и методов их решения. Для иллюстрации некоторых возможностей этих методов приводим доказательство неравенства (1.3.11) (см. [7]). Возможности, которые содержатся в приведенном в § 1.1 геометрическом доказательстве Литлвуда теоремы о производной, иллюстрирует простое доказательство неравенства (1.3.16), которое является частным случаем неравенства Надя (см. § 2.10). Отметим, что это неравенство уточняет и обобщает неравенство Адамара (1.2.16).

§ 1.4 посвящен изложению, принадлежащего Морделлу [264], уточнения теоремы 1.1.2.

§ 1.5 и § 1.6 содержат принадлежащие Харди, Литлвуду и Харди–Литлвуду–Полиа неравенства, связанные с L_2-метриками. В § 1.5 приведены два различных доказательства (заимствованные из книги [327]) неравенства для L_2-норм последовательных производных функций, заданных на полуоси. Идеи каждого из доказательств получили впоследствии свое развитие (подробнее см. гл. 5). В § 1.6 приведены результаты Харди–Литлвуда–Полиа, в которых получены первые точные неравенства вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le \|x\|_2^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_2^{k/r}$$

(при всех k и r) для функций, заданных на всей числовой оси и окружности.

В § 1.7 предпринята попытка на основе материала, изложенного в § 1.1–1.6, сформулировать общие постановки задач о неравенствах для промежуточных производных и обсудить их взаимосвязи.

Дополнительные результаты к главе 1

1. Л. Недер [268] для функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ – отрезок длины L, доказал справедливость неравенства

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le (2r)^{2r} L^{-k} \|x\|_\infty + L^{r-k} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty . \qquad (\text{Д}.1.1)$$

2. Г. Харди, Э. Ландау, Дж. Литлвуд [326] доказали, что если

$$C_{r,k}(p, \mathbf{R}_+) = \sup_{\substack{x \in L^r_{p,p}(\mathbf{R}_+) \\ x \ne 0}} \frac{\left\|x^{(k)}\right\|_p}{\|x\|_p^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_p^{k/r}}, \qquad (\text{Д}.1.2)$$

то

$$C_{2,1}(p, \mathbf{R}_+) \le 2, \qquad (\text{Д}.1.3)$$

причем

$$\lim_{p\to\infty} C_{2,1}(p, \mathbf{R}_+) = 2.$$

3. Чжоу Юнь Ченг [338] получил следующие результаты для функций двух переменных. Пусть функция $x(t,s)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка на $\mathbf{R}^2$, и пусть m_0, m_1, m_2 – это точные верхние грани соответственно функций

$$|x(t,s)|, \quad \left((x'_t)^2(t,s) + (x'_s)^2(t,s)\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad \left|x''_{tt}(t,s) + x''_{ss}(t,s)\right|.$$

Тогда

$$m_1 \le \frac{8}{\pi\sqrt{3}}\sqrt{m_0 m_2}.$$

Если M_0, M_1, M_2 есть точные верхние грани соответственно функций

$$|x(t,s)|, \quad \left|x'_t(t,s) + x'_s(t,s)\right| \quad \text{и} \quad \left|x''_{tt}(t,s) + 2x''_{ts}(t,s) + x''_{ss}(t,s)\right|,$$

то

$$M_1 \le \sqrt{2M_0 M_2}.$$

4. Г.Е. Шилов [357] показал, что

$$C_{3,1}(+\infty, \mathbf{R}) = (9/8)^{1/3}, \quad C_{3,2}(+\infty, \mathbf{R}) = (3)^{1/3},$$

$$C_{4,1}(+\infty, \mathbf{R}) = (512/375)^{1/4}, \quad C_{4,2}(+\infty, \mathbf{R}) = (6/5)^{1/4},$$

$$C_{4,3}(+\infty, \mathbf{R}) = (3/5)^{1/4}(2)^{3/4}$$

и

$$C_{5,2}(+\infty, \mathbf{R}) = \left(\frac{125}{72}\right)^{1/5}.$$

5. А. Горни [151–154] доказал,что если $\mathbf{I}$ – замкнутый интервал длины δ, $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{I})$, $\|x\|_\infty \le M_0$ и $\left\|x^{(r)}\right\|_\infty \le M_r$, то для любой точки $t \in \mathbf{I}$ и для $k \in \mathbf{N}$, $k < r$,

$$\left|x^{(k)}(t)\right| \le 4e^{2k}\binom{r}{k}^k M_0^{1-k/r}\left(M'_0\right)^{k/r},$$

а если t – середина интервала $\mathbf{I}$, то

$$\left|x^{(k)}(t)\right| \le 16(2e)^{2k} M_0^{1-k/r}\left(M'_0\right)^{k/r},$$

где

$$M_0' = \max\left(M_r,\ M_0 r!\delta^{-r}\right).$$

Если $\mathbf{I} = (0,\infty)$ или $\mathbf{I} = (-\infty,\infty)$, то $M_r' = M_r$, причем если $\mathbf{I} = (-\infty,\infty)$, то любую точку можно рассматривать как середину $\mathbf{I}$. Таким образом, А. Горни доказал также, что

$$C_{r,k}(\infty,\mathbf{R}_+) \le 4e^{2k}\binom{r}{k}^k \tag{Д.1.4}$$

и

$$C_{r,k}(\infty,\mathbf{R}) \le 16(2e)^{2k}. \tag{Д.1.5}$$

Аналогичный результат несколько позже получил А. Картан [180].

6. И. Гальперин и Г. Питт [145] доказали, что для функций $x \in L^2_{2,2}(0,X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^X \left(x'\right)^2(t)dt \le K(\varepsilon)\int\limits_0^X x^2(t)dt + \varepsilon\int\limits_0^X \left(x''\right)^2(t)dt, \tag{Д.1.6}$$

где

$$K(\varepsilon) = \frac{P}{\varepsilon} + \frac{Q}{X^2}, \quad P = 1, \quad Q = 12.$$

При этом константы $P = 1$ и $Q = 12$ неулучшаемы в том смысле, что если $P < 1$, или $Q < 12$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ и подходящей функции x неравенство (Д.1.6) перестает быть справедливым.

Если $x \in L^2_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, то записывая неравенство (Д.1.6) при произвольном $X \in (0,\infty)$, а затем устремляя X к бесконечности, для любого $\varepsilon > 0$ получаем неравенство

$$\varepsilon^2\left\|x''\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} - \varepsilon\left\|x'\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \|x\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} \ge 0. \tag{Д.1.7}$$

Однако последнее неравенство, очевидно, верно и при $\varepsilon \le 0$. Значит, дискриминант квадратичного трехчлена, стоящего в левой части (Д.1.7), неположителен. Отсюда следует, что

$$C_{2,1}(2,\mathbf{R}_+) = \sqrt{2}.$$

7. Следующее утверждение [190] можно рассматривать как некоторое дополнение к теореме о производных (теорема 1.1.1).

Если $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R}_+),\ 1 \le p, s \le \infty,\ r \in \mathbf{N}$, то в случае $p < \infty$

$$x^{(k)}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad k = 0, 1, ..., r-1. \tag{Д.1.8}$$

Если же $p = \infty,\ s < \infty$ и $r > 1$, то соотношение (Д.1.8) выполняется при $k = 1, ..., r-1$.

8. Следующая теорема уточняет предыдущее утверждение. Ее можно рассматривать как вариант теоремы Харди–Литлвуда (теорема 1.1.2).

Теорема [190]. *Пусть $r \in \mathbf{N},\ f, g$ – неубывающие функции на $\mathbf{R}_+$. Если функция x такова, что*

$$xf \in L_p(\mathbf{R}_+) \quad \textit{и} \quad x^{(r)}g \in L_s(\mathbf{R}_+)$$

для некоторых p и s, $1 \le p, s \le \infty$, то

$$x^{(k)}(t) = o\left(f(t)^{-\alpha} g(t)^{-(1-\alpha)}\right), \quad t \to \infty, \quad k = 0, 1, ..., r-1,$$

где $\alpha = (r - k - 1/s)/(r - 1/s + 1/p)$, за исключением случая, когда $p = s = \infty$. При этих условиях можно утверждать только, что

$$x^{(k)}(t) = O\left(f(t)^{-\alpha} g(t)^{-(1-\alpha)}\right), \quad t \to \infty, \quad k = 0, 1, ..., r-1.$$

9. Следующее утверждение обобщает неравенства Ландау для функций, заданных на полуоси (теорема 1.2.3) и всей оси (теорема 1.2.5).

Теорема [190]. *Пусть $0 \le \alpha < 1$, $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$. Если $x \in L_\infty(G)$, x' – локально абсолютно непрерывна, и $x''|x|^\alpha \in L_\infty(G)$, то $x' \in L_\infty(G)$ и*

$$\|x'\|^2_\infty \le K \|x\|^{1-\alpha}_\infty \|x''|x|^\alpha\|_\infty,$$

где $K = 2/(1-\alpha)$, если $G = \mathbf{R}$, и $K = 4/(1-\alpha)$, если $G = \mathbf{R}_+$.

Смысл этой теоремы в том, что $x''|x|^\alpha$ может быть ограничено даже в том случае, когда x'' неограничено.

10. Если $\|x\|_\infty = 1$ и $\|x''\| = u$, то

$$\|x'\|_\infty \le \begin{cases} (u+4)/2, & \text{если } 0 \le u \le 4, \\ 2\sqrt{u}, & \text{если } 4 < u < \infty. \end{cases} \tag{Д.1.9}$$

Более того, пусть u_1 таково, что

$$0 \le u_1 \le 2, \quad \text{если} \quad u = 0,$$

$$0 \le u_1 \le (u+4)/2, \quad \text{если} \quad 0 < u \le 4,$$

$$0 < u_1 \le 2\sqrt{u}, \quad \text{если} \quad u > 4.$$

Тогда ([340]) существует функция x, такая, что

$$\|x\|_\infty = 1, \quad \|x''\|_\infty = u, \quad \|x'\|_\infty = u_1.$$

В действительности, Чуи и Смит доказали только неулучшаемость (Д.1.9). Аналогичный результат был получен Сато в 1982 г., который изучил также случай $\|x'''\|_\infty = u$. В приведенном виде утверждение содержится в [190].

Глава 2

НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВА И НАДЯ

2.1. Идеальные сплайны Эйлера

Введем в рассмотрение функции, которые являются экстремальными во многих задачах анализа. Для $r = 0, 1, 2, \ldots$ положим

$$\varphi_r(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2\nu+1)t - r\pi/2\right)}{(2\nu+1)^{r+1}}. \tag{2.1.1}$$

Тогда $\varphi_r(t)$ – r-й периодический интеграл, в среднем равный нулю на периоде, от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sign}\sin t$. Отметим некоторые хорошо известные свойства функции $\varphi_r(t)$:

1) $\varphi_r'(t) = \varphi_{r-1}(t) \quad (r = 1, 2, \ldots)$;

2) график функции $\varphi_{2\nu}(t)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ центрально симметричен относительно точек $(m\pi, 0)$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$ и симметричен относительно прямых $t = m\pi + \pi/2$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$;

3) график функции $\varphi_{2\nu+1}(t)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ центрально симметричен относительно точек $(m\pi + \pi/2, 0)$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$ и симметричен относительно прямых $t = m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$;

4) функция $\varphi_{2\nu}(t)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ имеет нули лишь в точках $t = m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$ и строго монотонна на каждом из промежутков $[m\pi - \pi/2,\ m\pi + \pi/2]$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$;

5) функция $\varphi_{2\nu+1}(t)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ имеет нули лишь в точках $t = m\pi + \pi/2$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$ и строго монотонна на каждом из промежутков $[m\pi,\ (m+1)\pi]$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Легко понять, что при $r = 2, 4, 6, \ldots$

$$\|\varphi_r\|_\infty = |\varphi_r(\pi/2)| = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}},$$

а при $r = 1, 3, 5, \ldots$

$$\|\varphi_r\|_\infty = |\varphi_r(0)| = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Таким образом,

$$\|\varphi_r\|_\infty = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}} := K_r. \tag{2.1.2}$$

Функции φ_r называют идеальными сплайнами Эйлера, а константы K_r – константами Фавара. Нетрудно проверить, что

$$K_0 = 1,\ \ K_1 = \frac{\pi}{2},\ \ K_2 = \frac{\pi^2}{8},\ \ K_3 = \frac{\pi^3}{24},\ \ K_4 = \frac{5\pi^4}{384}$$

и

$$1 = K_0 < K_2 < K_4 < \ldots < 4/\pi < \ldots < K_3 < K_1 = \pi/2.$$

Наряду с константами Фавара далее важную роль будут играть также величины $\|\varphi_r\|_p$. В частности,

$$\|\varphi_r\|_1 = \mathbf{V}_0^{2\pi}(\varphi_{r+1}) = 4\|\varphi_{r+1}\|_\infty = 4K_{r+1},$$

$$\|\varphi_r\|_2^2 = \int\limits_0^{2\pi}\varphi_r(t)\varphi_r(t)dt = \left|\int\limits_0^{2\pi}\varphi_{2r}(t)\varphi_0(t)dt\right| = \|\varphi_{2r}\|_1 = 4K_{2r+1}.$$

Отметим еще одно свойство функций $\varphi_r(t)$, которое будем использовать в дальнейшем. Для $\lambda > 0$ положим

$$\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t).$$

Ясно, что $\varphi_{\lambda,r}$ имеет период $2\pi/\lambda$ и при $r \in \mathbf{N}$ $\varphi_{\lambda,r} \in W^r_\infty(\mathbf{R})$ и для $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \le r$,

$$\varphi^{(\nu)}_{n,r}(t) = \varphi_{n,r-\nu}(t).$$

Если же $\lambda = n \in \mathbf{N}$, то $\varphi_{n,r} \in W^r_\infty(\mathbf{T})$. При четном r функция $\varphi_{n,r}(t)$ подобна функции $(-1)^{r/2}\sin nt$: имеет простые нули в точках $k\pi/n$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$, ее график симметричен относительно точек $(k\pi/n, 0)$ и прямых $t = (2k+1)\pi/(2n)$. Для нечетных r функция $\varphi_{n,r}(t)$ подобна $(-1)^{(r+1)/2}\cos nt$: простые нули в точках $((2k+1)\pi/(2n))$, симметрия относительно точек $((2k+1)\pi/2n, 0)$ и прямых $t = k\pi/n$. Других нулей функция $\varphi_{n,r}(t)$ не имеет, при $r \ge 1$ она строго монотонна между соседними точками экстремума и сохраняет выпуклость на каждом промежутке между нулями.

Из критерия элемента наилучшего приближения в пространствах $L_p(\mathbf{T})$ (см. теоремы 10.1.2 и 10.1.3) легко следует, что при всех $n, r = 1, 2, \dots$ и $p \in [1, \infty]$

$$E_n(\varphi_{n,r})_p = \|\varphi_{n,r}\|_p = n^{-r}\,\|\varphi_r\|_p.$$

Отметим также равенство

$$E_0(\varphi_{\lambda,r})_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \lambda^{-r-1/p}\,\|\varphi_r\|_p.$$

Роль экстремальных функций во многих задачах играют функции

$$g_{n,r}(t) := \frac{1}{4n}\varphi_{n,r-1}(t), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Будем рассматривать также несимметричные идеальные сплайны Эйлера – $2\pi/\lambda$-периодические сплайны $\varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) порядка r с нулевым средним значением на периоде, у которых

$$\varphi^{(r)}_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta) = \varphi_{\lambda,0}(t;\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha, & 0 < t < \gamma, \\ -\beta, & \gamma < t < 2\pi/\lambda, \\ 0, & t = 0,\ \gamma, \end{cases}$$

где число $\gamma = \gamma(\alpha,\beta)$ выбрано так, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_0^{2\pi/\lambda} \varphi_{\lambda,0}(t;\alpha,\beta)dt = 0,$$

т.е.

$$\gamma = \frac{2\pi\beta}{\alpha\lambda + \beta\lambda}.$$

Таким образом, разбиение, которым однозначно определяется сплайн $\varphi_{\lambda,r}(\alpha, \beta; t)$, образуется точками $2k\pi/\lambda$ и $\gamma + 2k\pi/\lambda$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$), причем на периоде $[0, 2\pi/\lambda)$ функция $\varphi_{\lambda,r}(\alpha, \beta; t)$ меняет знак ровно в двух точках.

При $\alpha = \beta = 1$ имеем, очевидно, эйлеров идеальный сплайн: $\varphi_{\lambda,r}(t; 1, 1) = \varphi_{\lambda,r}(t)$.

2.2. Теорема сравнения Колмогорова

Теоремами сравнения называют утверждения, которые дают оценку той или иной характеристике функции $x(t)$ из некоторого класса через соответствующую характеристику некоторой фиксированной функции. Последнюю функцию можно считать эталонной или стандартной для данного класса; ее также называют функцией сравнения для данного класса.

Первую теорему такого типа доказал А.Н. Колмогоров [199–200]. Он показал, что идеальные эйлеровы сплайны являются функциями сравнения для класса $W^r_\infty(\mathbf{R})$.

Как сам результат, так и метод его доказательства сыграли большую роль в развитии всей тематики.

Положим

$$\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L_\infty(\mathbf{R})}.$$

Будем говорить, что функция $f_r(t)$ вида

$$f_r(t) = a\varphi_r(bt + c), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c \in \mathbf{R}, \quad r \in \mathbf{N}, \tag{2.2.1}$$

где φ_r – сплайн Эйлера, является функцией сравнения порядка r для функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ в точке t_0, если

$$\|x\|_\infty = \|f_r\|_\infty, \quad \|x^{(r)}\|_\infty = \|f_r^{(r)}\|_\infty, \quad x(t_0) = f_r(t_0). \tag{2.2.2}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$. Если функция $f_r(t)$ является функцией сравнения порядка r для функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ в точке t_0, то*

$$|x'(t_0)| \le |f_r'(t_0)|. \tag{2.2.3}$$

Приводим с незначительными изменениями доказательство этой теоремы, принадлежащее самому А.Н. Колмогорову.

Доказательство. При $r = 1$ утверждение теоремы тривиально.

Введем следующее понятие. Будем называть верхней функцией сравнения порядка r для функции $x \in L^r_{\infty,\infty}$ в точке t_0 функцию $\overline{f}_r$ вида (2.2.1), для которой

$$\|x\|_\infty < \|\overline{f}_r\|_\infty, \quad \|x^{(r)}\|_\infty = \|\overline{f}_r^{(r)}\|_\infty, \quad x(t_0) = \overline{f}_r(t_0). \qquad (2.2.4)$$

Легко убедиться, что для верхней функции сравнения $\overline{f}_r$ модуль производной $|\overline{f}_r'(t_0)|$ всегда больше, чем $|f_r'(t_0)|$ для соответствующей функции сравнения f_r. Ясно также, что верхнюю функцию сравнения $\overline{f}_r$ всегда можно подобрать так, чтобы в заданной окрестности точки t_0 сама функция $\overline{f}_r(t)$ отличалась сколь угодно мало от $f_r(t)$, а ее производная отличалась сколь угодно мало от производной $\overline{f}_r'(t)$. Поэтому при любом $r \in \mathbf{N}$ теорема 2.2.1 равносильна следующей лемме.

Лемма 2.2.1. *Если функция $\overline{f}_r$ является верхней функцией сравнения порядка r для функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ в точке t_0, то*

$$|x'(t_0)| < |\overline{f}_r'(t_0)|.$$

Продолжим доказательство теоремы 2.2.1 по индукции. Для этого потребуется следующая лемма.

Лемма 2.2.2. *Если теорема* 2.2.1 *верна при $r = m$, то для $x \in L^{m+1}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ выполнено неравенство*

$$\left\|x'\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_m\|_\infty}{\|\varphi_{m+1}\|_\infty^{1-1/(m+1)}} \|x\|_\infty^{1-1/(m+1)} \left\|x^{(m+1)}\right\|_\infty^{1/(m+1)}. \qquad (2.2.5)$$

Доказательство. Предположим, что теорема 2.2.1 верна для $r = m$, и докажем неравенство (2.2.5).

Фиксируем $x \in L^{m+1}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем точку t_0, для которой

$$|x'(t_0)| > \|x'\|_\infty - \varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что $x'(t_0) > 0$. В противном случае перейдем к функции $-x$. Построим для функции x' две функции сравнения $f_{m,1}$ и $f_{m,2}$, подчиненные условиям

$$f'_{m,1}(t_0) \geq 0, \quad f'_{m,2}(t_0) \leq 0.$$

Обозначим t_1 – ближайший слева от t_0 нуль функции $f'_{m,1}(t)$ и t_2 – ближайший справа от t_0 нуль функции $f'_{m,2}(t)$. Докажем, что на отрезке $[t_1, t_0]$ справедливо неравенство

$$x'(t) \geq f_{m,1}(t), \tag{2.2.6}$$

а на отрезке $[t_0, t_2]$ – неравенство

$$x'(t) \geq f_{m,2}(t). \tag{2.2.7}$$

Установим первое из этих неравенств. Для этого рассмотрим вместо самой функции сравнения $f_{m,1}(t)$ какую-либо верхнюю функцию сравнения $\overline{f}_{m,1}(t)$ порядка m для $x'(t)$ в точке t_0. Ближайший слева от t_0 нуль функции $\overline{f}_{m,1}(t)$ обозначим $\bar{t}_1$ и докажем, что в интервале $(\bar{t}_1, t_0)$ выполнено неравенство

$$x'(t) > \overline{f}_{m,1}(t). \tag{2.2.8}$$

В самом деле, так как $f_{m,1}(t)$ – верхняя функция сравнения для $x'(t)$ в точке t_0, то по справедливой в силу индуктивного предположения лемме 2.2.1 будет $x''(t_0) < \overline{f}'_{m,1}(t_0)$. Это неравенство сохранится и в левой окрестности точки t_0. Поэтому, если бы (2.2.8) нарушалось где-либо в интервале $(\bar{t}_1, t_0)$, то существовала бы первая слева от t_0 точка $\xi \in (\bar{t}_1, t_0)$, в которой выполнялись бы соотношения

$$x'(\xi) = \overline{f}_{m,1}(\xi), \tag{2.2.9}$$

$$x''(\xi) \geq \overline{f}'_{m,1}(\xi) > 0. \tag{2.2.10}$$

Равенство (2.2.9) показывает, что $\overline{f}'_{m,1}$ можно рассматривать как верхнюю функцию сравнения порядка m для $x'(t)$ в точке ξ. Следовательно, согласно лемме 2.2.1 (которая выполнена при $r = m$, так как предполагается выполненой эквивалентная ей теорема 2.2.1 для $r = m$)

$$|x''(\xi)| < |\overline{f}'_{m,1}(\xi)|, \tag{2.2.11}$$

что противоречит (2.2.10). Противоречие доказывает, что неравенство (2.2.8) не может нарушаться в интервале $(\overline{t}_1, t_0)$.

Если выбрать функцию $\overline{f}_{m,1}$ достаточно мало отличающейся от $f_{m,1}$ в интервале (t_1, t_0), то и точка $\overline{t}_1$ будет сколь угодно близка к t_1. Поэтому из (2.2.8) предельным переходом получается (2.2.6) на отрезке $[t_1, t_0]$. Аналогично доказывается (2.2.7).

Из неравенств (2.2.6) и (2.2.7) вытекает, что

$$x(t_2) - x(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} x'(t)dt > \int\limits_{t_1}^{t_0} f_{m,1}(t)dt + \int\limits_{t_0}^{t_2} f_{m,2}(t)dt. \tag{2.2.12}$$

Если выбрать ε достаточно малым, то $f_{m,2}(t)$ будет отличаться на $[t_0, t_2]$ сколь угодно мало от $f_{m,1}(t)$, а точка t_2 будет сколь угодно близка к ближайшему справа от t_0 нулю функции $f_{m,1}(t)$. Следовательно, правая часть (2.2.12) может быть сделана сколь угодно мало отличающейся от

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} f_{m,1}(t)dt. \tag{2.2.13}$$

Заметим, что функция $f_{m,1}(t) = a\varphi_m(bt + c)$ является производной от функции $f_{m+1}(t) = (a/b)\varphi_{m+1}(bt+c)$. Поэтому интеграл (2.2.13) равен $2\|f_{m+1}\|_\infty$. Так как, с другой стороны, $x(t_2) - x(t_1) \le 2\|x\|_\infty$, то из (2.2.12) получаем

$$\|x\|_\infty \ge \|f_{m+1}\|_\infty.$$

Из этого неравенства в соединении с равенствами

$$\|x'\|_\infty = \|f'_{m+1}\|_\infty, \quad \|x^{(m+1)}\|_\infty = \|f^{(m+1)}_{m+1}\|_\infty,$$

вытекающими из соотношений (2.2.2) для функции x' (так как $f_m = f'_{m+1}$ является функцией сравнения для x'), следует неравенство

$$\frac{\|x'\|_\infty}{\|x\|_\infty^{1-1/(m+1)}\|x^{(m+1)}\|_\infty^{1/(m+1)}} \le$$

$$\le \frac{\|f'_{m+1}\|_\infty}{\|f_{m+1}\|_\infty^{1-1/(m+1)}\|f_{m+1}^{(m+1)}\|_\infty^{1/(m+1)}}. \tag{2.2.14}$$

Осталось заметить, что

$$\frac{\|f'_{m+1}\|_\infty}{\|f_{m+1}\|_\infty^{1-1/(m+1)}\|f_{m+1}^{(m+1)}\|_\infty^{1/(m+1)}} = \frac{\|\varphi_m\|_\infty}{\|\varphi_{m+1}\|_\infty^{1-1/(m+1)}}. \tag{2.2.15}$$

Из (2.2.14) и (2.2.15) следует (2.2.5). Лемма 2.2.2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.2.1 по индукции. Предположим, что эта теорема уже доказана для $r = m$. Тогда и лемма 2.2.1 верна для $r = m$. Докажем теорему 2.2.1 для $r = m + 1$.

Предположим, что для некоторой функции $x(t)$ теорема 2.2.1, а значит, и лемма 2.2.1 неверна при $r = m + 1$, т.е. для некоторой ее верхней функции сравнения $\overline{f}_{m+1}$ порядка $m + 1$ в точке t_0 выполняется неравенство

$$|x'(t_0)| \ge |\overline{f}'_{m+1}(t_0)|.$$

Так как из определения (2.2.4) верхней функции сравнения имеем $\|\overline{f}_{m+1}\|_\infty > \|x\|_\infty$, то точка t_0 не может быть максимумом $\overline{f}_{m+1}(t)$ и в ней, следовательно, $\overline{f}_{m+1}(t_0) \ne 0$ и $x'(t_0) \ne 0$. Не уменьшая общности, можно допустить, что $x(t_0) > 0$ и $x'(t_0) > 0$. Остальные случаи можно привести к этому, заменяя в случае необходимости $x(t)$ на $-x(t)$ и t на $-t$. Можно также выбрать функцию сравнения так, чтобы было $\overline{f}'_{m+1}(t_0) > 0$. Пусть теперь t_1 – ближайший справа от t_0 максимум $\overline{f}_{m+1}(t)$. В силу (2.2.4) имеем

$$x(t_0) = \overline{f}_{m+1}(t_0), \quad x(t_1) \le \|x\|_\infty < \|\overline{f}_{m+1}\|_\infty = \overline{f}_{m+1}(t_1).$$

Следовательно, на отрезке $[t_0, t_1]$ разность $x(t) - \overline{f}_{m+1}(t)$ достигает максимума в точке ξ, отличной от t_1. В этой точке имеем

$$x'(\xi) = \overline{f}'_{m+1}(\xi), \quad x''(\xi) \le \overline{f}'_{m+1}(\xi). \tag{2.2.16}$$

Дифференцируя функцию $\overline{f}_{m+1}(t) = a\varphi_{m+1}(bt+c)$, получаем функцию $\overline{f}_m(t) := \overline{f}'_{m+1}(t) = ab\varphi_m(bt+c)$.

Заметим теперь, что из определения (2.2.4) верхней функции сравнения $\overline{f}_{m+1}$ имеем

$$\|x\|_\infty < \|\overline{f}_{m+1}\|_\infty, \tag{2.2.17}$$

$$\left\|(x')^{(m)}\right\|_\infty = \left\|x^{(m+1)}\right\|_\infty = \|\overline{f}_{m+1}^{(m+1)}\|_\infty. \tag{2.2.18}$$

По предположению индукции теорема 2.2.1 выполнена для $r = m$. Тогда согласно лемме 2.2.1 справедливо неравенство (2.2.5). Это неравенство вместе с (2.2.17) дает нам

$$\left\|x'\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_m\|_\infty}{\|\varphi_{m+1}\|_\infty^{1-1/(m+1)}} \|x\|_\infty^{1-1/(m+1)} \left\|x^{(m+1)}\right\|_\infty^{1/(m+1)} <$$

$$< \frac{\|\varphi_m\|_\infty}{\|\varphi_{m+1}\|_\infty^{1-1/(m+1)}} \left\|\overline{f}_{m+1}\right\|_\infty^{1-1/(m+1)} \left\|\overline{f}_{m+1}^{(m+1)}\right\|_\infty^{1/(m+1)} = \left\|\overline{f}_m\right\|_\infty. \tag{2.2.19}$$

Из (2.2.18), (2.2.19) и равенства $\overline{f}_m(\xi) = \overline{f}'_{m+1}(\xi) = x'(\xi)$ (см. (2.2.16)) заключаем, что $\overline{f}_m(t)$ есть верхняя функция сравнения порядка m для $x'(t)$ в точке ξ. Тогда согласно лемме 2.2.1, которая равносильна теореме 2.2.1 и по индуктивному предположению считается выполненной для $r = m$, имеем

$$|x''(\xi)| < |\overline{f}'_m(\xi)| = |\overline{f}''_{m+1}(\xi)|,$$

или, так как $\overline{f}''_{m+1}(\xi) \le 0$,

$$x''(\xi) > \overline{f}''_{m+1}(\xi),$$

что противоречит (2.2.16). Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. *Пусть* $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$. *Если для функции* $x \in W^r_\infty$ *число* λ *выбрано из условия* $\|x\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$, *то* $\|x'\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-1}\|_\infty$ *и, следовательно,* $\|x^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-k}\|_\infty$.

Следствие 2.2.2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$ *и для функции* $x \in W^r_\infty$ *число* λ *выбрано из условия* $\|x\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$ *и, кроме того,* $x(\xi) = \varphi_{\lambda,r}(\eta)$, *причем на некотором отрезке* $[\alpha, \beta]$, *содержащем точку* η, *функция* $\varphi_{\lambda,r}(t)$ *монотонна. Тогда:*

1) *если* $\varphi_{\lambda,r}(t)$ *возрастает на* $[\alpha, \beta]$, *то*

$$x(\xi + t) \le \varphi_{\lambda,r}(\eta + t) \quad (t \in [0, \beta - \eta]),$$

$$x(\xi - t) \ge \varphi_{\lambda,r}(\eta - t) \quad (t \in [0, \eta - \alpha]),$$

а если $\varphi_{\lambda,r}(t)$ *убывает на* $[\alpha, \beta]$, *то знаки в этих неравенствах меняются на противоположные;*

2) *если еще* $x(\xi_1) = \varphi_{\lambda,r}(\eta_1)$, *где* $\eta_1 \in [\alpha, \beta]$, *то*

$$|\xi - \xi_1| \ge |\eta - \eta_1|.$$

Доказательства следствий 2.2.1 и 2.2.2 (точнее, их несимметричных обобщений) приведены в § 2.8 (см. следствия 2.8.1 и 2.8.2).

2.3. Неравенство Колмогорова

В тематике, посвященной точным неравенствам для норм промежуточных производных, одним из наиболее ярких результатов является неравенство Колмогорова. Ниже приведено доказательство этого неравенства, принадлежащее самому Колмогорову [198–200].

Теорема 2.3.1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $G = \mathbf{R}$ *или* $\mathbf{T}$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_{\infty,\infty}(G)$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}. \tag{2.3.1}$$

Неравенство (2.3.1) *обращается в равенство для функций вида* $x(t) = a\varphi_r(bt + c)$, $a, c \in \mathbf{R}$, *и* $b \in \mathbf{R}$ *при* $G = \mathbf{R}$, *либо* $b \in \mathbf{N}$ *при* $G = \mathbf{T}$.

Доказательство. Пусть сначала $G = \mathbf{R}$. Тогда можно выбрать параметры a и b так, чтобы функция $f_r(t) = a\varphi_r(bt + c)$ являлась для $x(t)$ функцией сравнения; для этого надо удовлетворить условия (см. (2.2.2))

$$\|x\|_\infty = a\|\varphi_r\|_\infty, \quad \left\|x^{(r)}\right\|_\infty = ab^r.$$

Теперь при $k = 1$ неравенство (2.3.1) следует из теоремы сравнения 2.2.1 и леммы 2.2.2.

Предположим, что (2.3.1) уже доказано для всех $r \in \mathbf{N}$ и $k \le m$ $(1 \le m < r - 1)$, и докажем, что в этом случае оно выполнено и для $k = m + 1$. Для этого рассмотрим функцию $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$. Так как (2.3.1) выполнено для $k = m$, то, применяя (2.3.1) к функции $x' \in L^{r-1}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, имеем

$$\left\|(x')^{(m)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-1-m}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-m/(r-1)}} \left\|x'\right\|_\infty^{1-m/(r-1)} \left\|(x')^{(r-1)}\right\|_\infty^{m/(r-1)},$$

или, что то же самое,

$$\left\|x^{(m+1)}\right\|_\infty \le \frac{\left\|\varphi_{r-(m+1)}\right\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-m/(r-1)}} \left\|x'\right\|_\infty^{1-m/(r-1)} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{m/(r-1)}. \tag{2.3.2}$$

Кроме того, так как для случая $k = 1$ неравенство (2.3.1) доказано при любом r (лемма 2.2.2), имеем

$$\left\|x'\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-1}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-1/r}} \|x\|_\infty^{1-1/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1/r}. \tag{2.3.3}$$

Из (2.3.2) и (2.3.3) ввиду равенств

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{m}{r-1}\right) = 1 - \frac{m+1}{r}, \quad \frac{1}{r}\left(1 - \frac{m}{r-1}\right) + \frac{m}{r-1} = \frac{m+1}{r}$$

следует окончательно

$$\left\|x^{(m+1)}\right\|_\infty \le \frac{\left\|\varphi_{r-(m+1)}\right\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-(m+1)/r}} \|x\|_\infty^{1-(m+1)/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{(m+1)/r},$$

что и доказывает теорему в случае $G = \mathbf{R}$.

Ясно, что неравенство (2.3.1) остается в силе и для периодических функций. Более того, так как экстремаль в этом неравенстве является периодической функцией, то неравенство (2.3.1) остается точным и на классе $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$.

2.4. Существование функции с заданными нормами производных

В 1926 г. А.Н. Колмогоров сформулировал (см. [286]) следующую проблему ($\mathcal{K}$).

Пусть задана произвольная система целых чисел

$$0 = k_0 < k_1 < ... < k_m.$$

Требуется найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять система положительных чисел

$$M_{k_0},\ M_{k_1}, ..., M_{k_m},$$

для того чтобы нашлась функция $x \in L^{k_m}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, для которой при всех $i = 0, 1, ..., m$ выполнялись бы соотношения

$$\left\| x^{(k_i)} \right\|_\infty = M_{k_i}.$$

Еще Ж. Адамар [1] установил, что для того чтобы для тройки чисел $M_0,\ M_1,\ M_2$ проблема ($\mathcal{K}$) была разрешимой, необходимо и достаточно выполнение условия

$$M_1^2 \le (2M_0M_2)^{1/2}.$$

Г.Е. Шилов [357] решил эту проблему для троек чисел M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2} в случае, когда $k_2 \le 4$ и $k_1 = 2$, $k_2 = 5$.

Полное решение этой задачи для троек чисел принадлежит А.Н. Колмогорову [198–200].

Для $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ и $k = 0, 1, ..., r$ положим

$$M_k(x) := \|x^{(k)}\|_\infty.$$

Теорема 2.4.1. *Пусть $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$. Для того чтобы тройке положительных чисел M_0, M_k, M_r соответствовала функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, для которой*

$$M_0 = \|x\|_\infty, \quad M_k = \|x^{(k)}\|_\infty, \quad M_r = \|x^{(r)}\|_\infty, \tag{2.4.1}$$

необходимо и достаточно соблюдение условия

$$M_k \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r}. \tag{2.4.2}$$

Доказательство. Необходимость условия (2.4.2) сразу следует из неравенства (2.3.1).

Докажем достаточность условия (2.4.2). Заметим, что для любых положительных чисел M_0, M_k и M_r равенство $M_k = \gamma_{r,k} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r}$ однозначно определяет множитель

$$\gamma_{r,k} = \gamma_{r,k}(M_0, M_k, M_r) := \frac{M_k}{M_0^{1-k/r} M_r^{k/r}}.$$

Положим для любой функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$

$$\gamma_{r,k}(x) := \gamma_{r,k}\left(M_0(x), M_k(x), M_r(x)\right).$$

Будем говорить, что тройка положительных чисел $(M_0,\ M_k,\ M_r)$ “возможна”, если существует функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, для которой выполнено (2.4.1).

Лемма 2.4.1. *Если “возможна” тройка $(M_0,\ M_k,\ M_r)$, то “возможны” все тройки $\left(M_0',\ M_k',\ M_r'\right)$, для которых*

$$\gamma_{r,k}(M_0', M_k', M_r') \le \gamma_{r,k}(M_0, M_k, M_r).$$

Доказательство. По допущению леммы существует функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, для которой выполнено (2.4.1). Легко подсчитать, что при любых $a > 0,\ b > 0$ для функции $y(t) = ax(bt)$ справедливо равенство $\gamma_{r,k}(y) = \gamma_{r,k}(x)$. Константы $a > 0,\ b > 0$ можно подобрать

так, что получится $M_k(y) = M'_k$, $M_r(y) = M'_r$. Из этих равенств и соотношения

$$\gamma_{r,k}(M'_0, M'_k, M'_r) \le \gamma_{r,k}(M_0, M_k, M_r) = \gamma_{r,k}(x) = \gamma_{r,k}(y)$$

вытекает, что $M'_0 \ge M_0(y)$. Положим $z(t) := y(t) + d$, $d \in \mathbf{R}$. Очевидно,

$$M_k(z) = M_k(y) = M'_k, \quad M_r(z) = M_r(y) = M'_r. \tag{2.4.3}$$

Подбирая константу d, можно произвольно увеличить $M_0(z)$ по сравнению с $M_0(y)$, в частности, можно достигнуть того, чтобы

$$M_0(z) = M'_0. \tag{2.4.4}$$

Из (2.4.3) и (2.4.4) следует, что тройка $\left(M'_0,\ M'_k,\ M'_r\right)$ действительно "возможна". Лемма доказана.

В силу леммы 2.4.1 ясно, что достаточность условия (2.4.2) будет установлена, если при любых данных $k, r \in \mathbf{N},\ k < r$, будет найдена функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, для которой

$$\gamma_{r,k}(x) = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}.$$

Этому условию как раз и удовлетворяет эйлеров сплайн $\varphi_r(t)$ ввиду равенства $\varphi_r^{(k)}(t) = \varphi_{r-k}(t),\ k = 1, ..., r$. Теорема доказана.

В дальнейшем задача ($\mathcal{K}$) (и аналогичная ей задача для функций, заданных на полуоси) изучалась рядом авторов, в частности, для систем, состоящих более чем из трех чисел $M_{k_0},\ M_{k_1}, ..., M_{k_m}$. Однако в общей постановке она далека от полного решения. О некоторых результатах этого направления будет идти речь в § 9.1.

2.5. Доказательство Банга неравенства Колмогорова

В данном параграфе приведем другое доказательство [100] неравенства (2.3.1).

Для $r, k \in \mathbf{N}$, $k \le r$, и $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ положим $M_k = M_k(x) :=$ $:= \|x^{(k)}\|_\infty$. Неравенство Колмогорова (2.3.1) может быть записано

в виде

$$M_k \le \frac{K_{r-k}}{K_r^{1-\frac{k}{r}}} M_0^{1-\frac{k}{r}} M_r^{\frac{k}{r}},$$

где K_r – константы Фавара, а также в виде

$$\frac{M_k}{M_r K_{r-k}} \le \left(\frac{M_0}{M_r K_r}\right)^{\frac{r-k}{r}}.$$

Доказательство этого неравенства начнем со случая, когда $x(t)$ – периодическая функция с периодом $2\pi l$, где l – целое число.

Ясно, что достаточно доказать это неравенство для $k = 1$, иными словами, достаточно доказать неравенство

$$\frac{M_1}{M_r K_{r-1}} \le \left(\frac{M_0}{M_r K_r}\right)^{\frac{r-1}{r}}.$$

Будем рассуждать от противного. Допустим, что при $r > 1$ существует такая периодическая функция $x(t)$ с периодом $2\pi l$, для которой

$$\frac{M_1}{M_r K_{r-1}} > \left(\frac{M_0}{M_r K_r}\right)^{\frac{r-1}{r}}, \tag{2.5.1}$$

и покажем, что это неравенство приводит к противоречию. Неравенство (2.5.1) можно переписать в виде

$$\frac{K_r}{M_0} > \frac{1}{M_r}\left(\frac{M_r K_{r-1}}{M_1}\right)^{\frac{r}{r-1}}.$$

Пусть a – такое действительное число, что

$$\frac{K_r}{M_0} > |a| > \frac{1}{M_r}\left(\frac{M_r K_{r-1}}{M_1}\right)^{\frac{r}{r-1}}. \tag{2.5.2}$$

Из второй части этой системы неравенств следует неравенство

$$(|a|M_r)^{-\frac{1}{r}} > \frac{M_r K_{r-1}}{M_1}(|a|M_r)^{-1} = K_{r-1}(|a|M_1)^{-1}.$$

Пусть b – такое рациональное число, $b = p/q$ (p и q – целые взаимно простые), что

$$\frac{K_{r-1}}{|a|M_1} < |b| < \frac{1}{(|a|M_r)^{1/r}}. \tag{2.5.3}$$

Пусть теперь ξ – такая точка, в которой $|x'(\xi)| = M_1$. Выберем знаки a и b так, чтобы было $abx'(\xi) > 0$. Из неравенств (2.5.2) и (2.5.3) следуют неравенства

$$|a|M_0 < K_r, \tag{2.5.4}$$

$$|a||b|^r M_r < 1, \tag{2.5.5}$$

$$abx'(\xi) > K_{r-1}. \tag{2.5.6}$$

Заметим, что в каждом интервале длины 2π существует одна точка, в которой функция $\varphi_r(t)$ принимает значение $-K_r$, и одна точка, где она принимает значение K_r. Обозначим через t_1 и t_2 точки, в которых

$$\varphi_r(t_1) = -K_r, \;\; \varphi_r(t_2) = K_r \;\; (t_1 < t_2 < t_1 + 2\pi).$$

Из (2.5.4) следует существование точки d, $t_1 < d < t_2$, для которой $ax(\xi) = \varphi_r(d)$. Положим $c = \xi - bd$ и

$$y(t) = ax(bt + c).$$

Ясно, что функция $y(t)$ – периодическая с периодом $2\pi q/p$. Следовательно, $2qr\pi$ также будет ее периодом. С одной стороны, имеем

$$y\left(\frac{\xi - c}{b}\right) = ax(\xi) = \varphi_r(d) = \varphi_r\left(\frac{\xi - c}{b}\right) \quad \left(t_1 < \frac{\xi - c}{b} < t_2\right),$$

а с другой, с учетом (2.5.4), (2.5.5) и (2.5.6) получим

$$\begin{gathered} \|y\|_\infty = |a|M_0 < K_r = \|\varphi_r\|_\infty, \\ \|y^{(r)}\|_\infty = |a||b|^r M_r < 1 = \|\varphi_r^{(r)}\|_\infty, \\ y'\left(\frac{\xi - c}{b}\right) = abx'(\xi) > K_{r-1} = \|\varphi_r'\|_\infty. \end{gathered} \tag{2.5.7}$$

Следовательно, функция $A(t) = \varphi_r(t) - y(t)$ обладает такими свойствами:

$$A(t_1 + 2\pi\nu) < 0 \quad (\nu = 0, \pm 1, ...),$$

$$A(t_2 + 2\pi\nu) > 0 \quad (\nu = 0, \pm 1, ...),$$

$$A\left(\frac{\xi - c}{b}\right) = 0, \quad A'\left(\frac{\xi - c}{b}\right) < 0 \quad \left(t_1 < \frac{\xi - c}{b} < t_2\right),$$

$$A^{(r)}(t) > 0 \quad \text{при} \quad 2\nu\pi < t < (2\nu + 1)\pi,$$

$$A^{(r)}(t) < 0 \quad \text{при} \quad (2\nu + 1)\pi < t < 2(\nu + 1)\pi.$$

Отметим, что функция $A(t)$ – периодическая с периодом $2q\pi r$.

Итак, $A(t)$ обращается в нуль на $[t_1, t_1 + 2q\pi r]$ по крайней мере $2qr + 1$ раз, в то время как $A^{(r)}$ меняет знак на этом интервале не более $2qr$ раз, что невозможно.

Таким образом, теорема доказана для периодических функций.

Перейдя к общему случаю непериодической функции x, покажем, что из неравенств

$$\|x\|_\infty =: M_0 < \infty, \quad \|x^{(r)}\|_\infty =: M_r < \infty, \tag{2.5.8}$$

следует неравенство

$$\|x^{(k)}\|_\infty =: M_k < \infty \quad (1 \le k < r). \tag{2.5.9}$$

Очевидно, это достаточно доказать при $k = 1$. Положим

$$P(t) = c\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{3}{2}\right)\cdots\left(t - \frac{2r - 1}{2}\right),$$

где константа c выбрана из условий

$$c > 4M_0, \quad r!c > M_r.$$

Многочлен $P(t)$ принимает в точках $t = \nu$ $(0 \le \nu \le r)$ значения с последовательно противоположными знаками, причем $|P(\nu)| \ge c/4 > > M_0$ $(0 \le \nu \le r)$. Из этого следует, что каково бы ни было действительное число a функция $X_a(t) = P(t) - x(t + a)$ по крайней

мере один раз обращается в нуль на каждом промежутке $(j, j+1)$ $(0 \le j \le r-1)$.

Так как, с другой стороны,

$$P^{(r)}(t) - x^{(r)}(t+a) \ge cr! - M_r > 0,$$

то видим, что уравнение $X_a(t) = 0$ имеет точно r корней, а именно по одному корню в каждом промежутке $(j, j+1)$ $(0 \le j \le r-1)$. Кроме того, так как $P(r-1) < -M_0$, $P(r) > +M_0$, то каково бы ни было ξ существует такое $\eta = \eta_\xi \in (r-1, r)$, что $x(\xi) = P(\eta)$. Отсюда следует, что

$$\|x'\|_\infty \le \max_{r-1 \le t \le r} |P'(t)|. \tag{2.5.10}$$

В самом деле, если бы для некоторого значения ξ было

$$x'(\xi) > \max_{r-1 \le t \le r} |P'(t)|,$$

то, полагая $\xi = \eta + a$ ($\eta = \eta_\xi$ – величина, определенная выше), мы имели бы

$$x'(\eta + a) > \max_{r-1 \le t \le r} |P'(t)| \ge |P'(\eta)|,$$

$$x(\eta + a) = P(\eta) \quad (r-1 < \eta < r),$$

$$P(r-1) - x(r-1+a) < 0, \quad P(r) - x(r-a) > 0,$$

и функция $X_a(t)$ обратилась бы в нуль в промежутке $(r-1, r]$ по крайней мере три раза, что невозможно.

Заменяя $x(t)$ на $-x(t)$, видим, что

$$\sup_t [-x'(t)] \le \max_{r-1 \le t \le r} |P'(t)|.$$

Следовательно, $M_1 \le \max\limits_{r-1 \le t \le r} |P'(t)|$. Тем самым (2.5.10) доказано. Таким образом, доказано, что из (2.5.8) следует (2.5.9).

Не ограничивая общности, можем считать, что

$$M_k = |x^{(k)}(0)|. \tag{2.5.11}$$

Чтобы закончить доказательство теоремы, заметим сначала, что каково бы ни было $\delta > 0$ существует число $l \in \mathbf{N}$ и дифференцируемая r раз на $\mathbf{R}$ функция $v(t)$, такие, что

$$v(t) = 1 \quad \text{при} \quad |t| \le 1,$$

$$v(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| \ge \pi l,$$

$$|v(t)| \le 1 \quad (-\infty < t < \infty),$$

$$|v^{(k)}(t)| \le \delta \quad (-\infty < t < \infty; \ \ 1 \le k \le r).$$

Тогда на всей прямой имеем

$$|v(t)x(t)| \le M_0,$$

$$|[v(t)x(t)]^{(r)}| = \left|\sum_{i=0}^{r} C_r^i v^{(i)}(t) x^{(r-i)}(t)\right| \le M_r + \delta \sum_{i=1}^{r} C_r^i M_{r-i} = M_r + \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta),$$

где $\lim\limits_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0$. Если продолжить функцию $v(t)x(t)$ периодически с периодом $2\pi l$ (l определено выше), то, замечая, что $v(t)x(t) = x(t)$ при $|t| < 1$, и применяя теорему к этой периодической функции, будем иметь с учетом (2.5.11)

$$M_k = |x^{(k)}(0)| \le \frac{K_{r-k}}{K_r^{1-\frac{k}{r}}} M_0^{1-\frac{k}{r}} (M_r + \varepsilon)^{\frac{k}{r}}.$$

Так как $\delta > 0$ выбрано произвольно, то ε может быть сделано сколь угодно малым, и неравенство (2.3.1) доказано.

2.6. Неравенство Стейна

Неравенство А.Н. Колмогорова (2.3.1) полностью решает задачу точной оценки нормы промежуточной производной в пространстве $L_\infty(G)$, $G = \mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$. Оказывается, с помощью достаточно простых и изящных рассуждений, принадлежащих Е.М. Стейну [295],

из неравенства (2.3.1) можно получить его аналог в пространстве $L_p(G)$, $1 \le p < \infty$. При этом, вообще говоря, неравенство перестает быть точным; однако замечательным является то, что этот метод в случае $p = 1$ позволяет получить точные оценки.

Теорема 2.6.1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $p \in [1, \infty)$, $G = \mathbf{R}$ *или* $\mathbf{T}$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_{p,p}(G)$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_p \le \frac{K_{r-k}}{K_r^{1-k/r}} \|x\|_p^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_p^{k/r}, \tag{2.6.1}$$

где K_r *– константы Фавара. При* $p = 1$ *неравенство* (2.6.1) *точное.*

Доказательство. Пусть $G = \mathbf{R}$. Предположим сначала, что функция x удовлетворяет условию

$$x^{(i)} \in L_p(\mathbf{R}), \quad i = 0, 1, ..., r. \tag{2.6.2}$$

Будем использовать следующее хорошо известное утверждение.

Лемма 2.6.1. *Пусть* $y \in L^1_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ *и* $p \in [1, \infty)$. *Тогда* $[y(t+\varepsilon) - y(t)]/\varepsilon \to y'(t)$ *(при* $\varepsilon \to 0$*) в* L_p*-метрике.*

Для $x \in L^r_{p,p}(\mathbf{R})$ положим

$$h(t) := \operatorname{sgn}\left(x^{(k)}(t)\right) \frac{\left|x^{(k)}(t)\right|^{p-1}}{\left\|x^{(k)}(\cdot)\right\|_p^{p-1}},$$

если $1 < p < \infty$, и $h(t) := \operatorname{sgn}\left(x^{(k)}(t)\right)$, если $p = 1$. Ясно, что $\|h\|_{p'} = 1$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{(k)}(t) h(t) dt = \left\| x^{(k)} \right\|_p.$$

Пусть далее

$$X(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t+u) h(u) du. \tag{2.6.3}$$

Применяя последовательно лемму 2.6.1, заключаем, что для любого $i = 1, ..., r$ производные $X^{(i)}(t)$ существуют, ограничены и непрерывны, причем

$$X^{(i)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{(i)}(t+u)h(u)du. \tag{2.6.4}$$

Таким образом, $X \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$. При этом

$$X^{(k)}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{(k)}(u)h(u)du = \left\|x^{(k)}\right\|_p. \tag{2.6.5}$$

Применяя неравенство Колмогорова (2.3.1) к функции $X(t)$, получаем

$$|X^{(k)}(0)| \le \frac{K_{r-k}}{K_r^{1-k/r}} \|X\|_\infty^{1-k/r} \left\|X^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}. \tag{2.6.6}$$

Оценивая интегралы в правых частях (2.6.3) и (2.6.4) при помощи неравенства Гельдера, имеем

$$\|X\|_\infty \le \|x\|_p, \quad \left\|X^{(r)}\right\|_\infty \le \left\|x^{(r)}\right\|_p. \tag{2.6.7}$$

Из (2.6.5)–(2.6.7) следует неравенство (2.6.1) в случае, когда функция x удовлетворяет условию (2.6.2).

Для завершения доказательства неравенства (2.6.1) осталось убедиться в том, что для любой функции $x \in L^r_{p,p}(\mathbf{R})$ выполнено условие (2.6.2).

Пусть $v(t)$ – бесконечно дифференцируемая функция на прямой $\mathbf{R}$, удовлетворяющая условиям:

а) $v(t) = 0$, если $|t| \ge 1$;

б) $v(t) \ge 0$ для всех $t \in \mathbf{R}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t)dt = 1$.

Существование такой функции $v(t)$ хорошо известно. Положим $v_\varepsilon(t) := 1/\varepsilon v(t/\varepsilon)$. Нам понадобится следующее хорошо известное утверждение.

Лемма 2.6.2. *Если $y(t)$ – локально интегрируемая функция, то при $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(u) y(t+u) du \to y(t)$$

почти всюду.

Продолжая доказательство теоремы, фиксируем функцию $x \in L^r_{p,p}(\mathbf{R})$ и для любого $\varepsilon > 0$ полагаем

$$x_\varepsilon(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(u) x(t+u) du. \tag{2.6.8}$$

Так как $v_\varepsilon(t)$ имеет конечный носитель, то в (2.6.8) возможно дифференцирование под знаком интеграла. Применяя также интегрирование по частям, имеем

$$x_\varepsilon^{(i)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(u) x^{(i)}(t+u) du = (-1)^i \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon^{(i)}(u) x(t+u) du. \tag{2.6.9}$$

Оценивая последний интеграл в правой части (2.6.9) при помощи обобщенного неравенства Минковского, убеждаемся, что $x_\varepsilon^{(i)} \in L_p(\mathbf{R})$, $i = 1, ..., r$. Таким образом, функция x_ε удовлетворяет условию (2.6.2). Поэтому, применяя к x_ε уже доказанное для таких функций неравенство (2.6.1), получаем

$$\left\| x_\varepsilon^{(k)} \right\|_p \le \frac{K_{r-k}}{K_r^{1-k/r}} \left\| x_\varepsilon \right\|_p^{1-k/r} \left\| x_\varepsilon^{(r)} \right\|_p^{k/r}. \tag{2.6.10}$$

Снова применяя обобщенное неравенство Минковского к интегралу в (2.6.8) и первому интегралу в (2.6.9) (при $i = r$), имеем $\|x_\varepsilon\|_p \le \|x\|_p$ и $\left\| x_\varepsilon^{(r)} \right\|_p \le \left\| x^{(r)} \right\|_p$. Поэтому из (2.6.10) следует, что

$$\left\| x_\varepsilon^{(k)} \right\|_p \le \frac{K_{r-k}}{K_r^{1-k/r}} \left\| x \right\|_p^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_p^{k/r}. \tag{2.6.11}$$

Согласно лемме 2.6.2 $x_\varepsilon(t) \to x(t)$ почти всюду. Тогда, учитывая (2.6.11) и применяя теорему Фату, заключаем, что $x^{(k)} \in L_p(\mathbf{R})$, $k = 1, ..., r-1$. Таким образом, в условиях теоремы 2.6.1 справедливо включение (2.6.2), что завершает доказательство неравенства (2.6.1) при $G = \mathbf{R}$.

Аналогично доказывается неравенство (2.6.1) в пространствах $L_p(\mathbf{T})$ периодических функций.

Докажем точность неравенства (2.6.1) в пространстве $L_1(\mathbf{T})$. Для этого рассмотрим семейство функций $\left(g_{n,r}\right)_h$, $h > 0$ (см. параграф 2.1). Используя свойства функций Стеклова (см., например, [208, с. 98]), можем записать для достаточно малых $h > 0$ следующие равенства:

$$\left\|\left(g_{n,r}\right)_h^{(r)}\right\|_1 = \left\|\left(g_{n,r}^{(r-1)}\right)_h'\right\|_1 = \bigvee_0^{2\pi}\left(g_{n,r}^{(r-1)}\right)_h = \bigvee_0^{2\pi} g_{n,r}^{(r-1)} =$$

$$= \frac{1}{4n}\bigvee_0^{2\pi}\varphi_{n,r-1}^{(r-1)} = 1.$$

Кроме того, при $h \to 0$ имеем

$$\left\|\left(g_{n,r}\right)_h^{(k)}\right\|_1 \to \|g_{n,r-k}\|_1 = \bigvee_0^{2\pi} g_{n,r-k+1} = \frac{1}{4n}\bigvee_0^{2\pi}\varphi_{n,r-k} = \|\varphi_{n,r-k}\|_\infty$$

и

$$\left\|\left(g_{n,r}\right)_h\right\|_1 \to \|g_{n,r}\|_1 = \bigvee_0^{2\pi} g_{n,r+1} = \frac{1}{4n}\bigvee_0^{2\pi}\varphi_{n,r} = \|\varphi_{n,r}\|_\infty.$$

Таким образом, при $h \to 0$ получаем

$$\frac{\left\|\left(g_{n,r}\right)_h^{(k)}\right\|_1}{\left\|\left(g_{n,r}\right)_h^{(k)}\right\|_1^{1-k/r}\left\|\left(g_{n,r}\right)_h^{(r)}\right\|_1^{k/r}} \to \frac{\|\varphi_{n,r-k}\|_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty^{1-k/r}} =$$

$$= \frac{n^{-(r-k)}\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\left(n^{-r}\|\varphi_r\|_\infty\right)^{1-k/r}} = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} = \frac{K_{r-k}}{K_r^{1-k/r}}.$$

Отсюда следует точность неравенства (2.6.1) для периодических функций. Точность неравенства (2.6.1) в пространстве $L_1(\mathbf{R})$ будет следовать из теоремы 4.5.2.

Замечание. Нетрудно видеть, что при $p = 1$ для функций $x \in L_V^r(\mathbf{T})$ и для всех $k = 0, 1, ..., r-1$ неравенство (2.6.1) можно также записать в виде

$$\bigvee_0^{2\pi} x^{(k)} \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \left(\bigvee_0^{2\pi} x\right)^{1-k/r} \left(\bigvee_0^{2\pi} x^{(r)}\right)^{k/r}. \qquad (2.6.12)$$

2.7. Доказательство Лигуна неравенств Колмогорова и Стейна

Приведем еще одно доказательство неравенства (2.6.1) (см., например, [240]), которое в полной мере использует идею промежуточного приближения.

Для любого $h > 0$ зададим на отрезке $[-0{,}5\pi h; 0{,}5\pi h]$ функции $\psi_{h,r}$ $(r = 0, 1, 2, ...)$ следующим образом:

$$\psi_{h,0}(t) = -(\pi h)^{-1} \quad (|t| \le 0{,}5\pi h),$$

$$\psi_{h,1}(t) = \begin{cases} 0{,}5 - t(\pi h)^{-1}, & \text{если } t \in (0; 0{,}5\pi h], \\ \psi_{h,1}(-t) = -\psi_{h,1}(t), & \text{если } t \in [0{,}5\pi h; 0), \end{cases}$$

$$\psi_{h,r}(t) = \int_{\gamma_r}^{t} \psi_{h,r-1}(u)du \quad (r = 2, 3, ...),$$

где γ_r $(\gamma_r \in [-0{,}5\pi h; 0))$ выбрано так, чтобы обеспечить равенство

$$\int_{-0{,}5\pi h}^{0{,}5\pi h} \psi_{h,r}(t)dt = 0.$$

Положим для $\nu = 0, 1, 2, ...$

$$\Psi_{h,2\nu}(t) = \psi_{h,2\nu}(t) - \psi_{h,2\nu}(0{,}5\pi h)$$

и

$$\Psi_{h,2\nu+1}(t) = \psi_{h,2\nu+1}(t).$$

Тогда, если

$$\psi_{h,2\nu} := \psi_{h,2\nu}(0{,}5\pi h), \tag{2.7.1}$$

то

$$\psi_{h,2\nu} = h^{2\nu-1}(-1)^{\nu+1}|\psi_{1,2\nu}| \quad (\nu = 1, ..., [(r-1)/2]), \tag{2.7.2}$$

$$\int\limits_{-0{,}5\pi h}^{0{,}5\pi h} |\Psi_{h,r}(t)|dt = h^r \int\limits_{-0{,}5\pi}^{0{,}5\pi} |\Psi_{1,r}(t)|dt. \tag{2.7.3}$$

Кроме того, ясно, что

$$\Psi'_{h,r}(t) = \psi_{h,r-1}(t) \quad (r = 2, 3, ...), \tag{2.7.4}$$

$$\Psi_{h,r}(\pm 0, 5\pi h) = 0 \quad (r = 1, 2, 3, ...). \tag{2.7.5}$$

Лемма 2.7.1. *Пусть* $r = 1, 2, ...$ *и* $h > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{-0{,}5\pi h}^{0{,}5\pi h} |\Psi_{h,r}(u)|du + 2\sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |\psi_{h,2\nu}|h^{r+1-2\nu}K_{r+1-2\nu} = h^r K_r,$$

где K_r *– константа Фавара.*

Далее, в леммах 2.7.2 и 2.7.3 предполагаем, что заданные на всей оси функции $x(t)$ таковы, что существуют производные $x', x'', ..., x^{(r-1)}$; x^{r-1} абсолютно непрерывны на каждом конечном интервале и, следовательно, $x^{(r)}$ локально интегрируемы.

Лемма 2.7.2. *Пусть* $r = 1, 2, ...$ *и* $h > 0$. *Пусть еще*

$$x_h(t) = \frac{1}{\pi h}\int\limits_{-0{,}5\pi h}^{0{,}5\pi h} x(t+u)du$$

является функцией Стеклова с шагом πh от функции x и

$$U_{h,r}(x,t) = x(t) + \pi h \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} \psi_{h,2\nu} x_h^{(2\nu)}(t). \tag{2.7.6}$$

Тогда выполняется равенство

$$U_{h,r}(x,t) = \int\limits_{-0{,}5\pi h}^{0{,}5\pi h} x^{(r)}(t-u)\Psi_{h,r}(u)du. \tag{2.7.7}$$

Доказательство. Докажем сначала лемму 2.7.2. Если $r = 1$, то с помощью интегрирования по частям на каждом из промежутков $[-0{,}5\pi h; 0]$ и $[0; 0{,}5\pi h]$ получаем

$$\int\limits_{-0{,}5\pi h}^{0{,}5\pi h} x'(t-u)\Psi_h(u)du = \int\limits_{-0{,}5\pi h}^{0} x'(t-u)\psi_h(u)du +$$

$$+ \int\limits_{0}^{0{,}5\pi h} x'(t-u)\psi_h(u)du = x(t) - x_h(t) = U_{h,1}(x,t).$$

Далее действуем по индукции. Пусть утверждение леммы верно для $r = 1, ..., k-1$. Рассмотрим два случая.

1. k – четно, $k = 2n$. В силу (2.7.6)

$$U_{h,2n}(x,t) = U_{h,2n-1}(x,t).$$

Поэтому, учитывая предположение индукции, а затем интегрируя по частям и учитывая (2.7.5), имеем

$$U_{h,2n}(x,t) = \int\limits_{-0{,}5\pi h}^{0{,}5\pi h} x^{(2n-1)}(t-u)\Psi_{h,2n-1}(u)du =$$

$$= \int\limits_{-0,5\pi h}^{0,5\pi h} x^{(2n-1)}(t-u)d\Psi_{h,2n}(u) = \int\limits_{-0,5\pi h}^{0,5\pi h} x^{(2n)}(t-u)\Psi_{h,2n}(u)du.$$

2. k – нечетно, $k = 2n+1$. Исходя из (2.7.6) с учетом предположения индукции, записываем

$$U_{h,2n+1}(x,t) = U_{h,2n}(x,t) + \pi h \psi_{h,2n} x_h^{(2n)}(t) =$$

$$= \int\limits_{-0,5\pi h}^{0,5\pi h} x^{(2n)}(t-u)\Psi_{h,2n}(u)du + \Psi_{h,2n}\left(\frac{\pi h}{2}\right) \int\limits_{-0,5\pi h}^{0,5\pi h} x^{(2n)}(t-u)du =$$

$$= \int\limits_{-0,5\pi h}^{0,5\pi h} x^{(2n)}(t-u)\psi_{h,2n}(u)du = \int\limits_{-0,5\pi h}^{0,5\pi h} x^{(2n+1)}(t-u)\Psi_{h,2n+1}(u)du.$$

Лемма 2.7.2 доказана.

Ясно, что лемму 2.7.1 достаточно доказать для $h = 1$. Пусть r – нечетно, $r = 2n+1$. Тогда, полагая в лемме 2.7.2 $x(t) = \varphi_{2n+1}(t)$ и $t = 0$, учитывая, что

$$\varphi_{2n+1}^{(2\nu)}(0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \varphi_{2n+1-2\nu}(t)dt = \frac{2}{\pi}\varphi_{2n+2-2\nu}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\pi^{-1}(-1)^{n-\nu+1}K_{r+1-2\nu},$$

$$\varphi_{2n+1}(0) = (-1)^n K_{2n+1} = (-1)^n K_r$$

и

$$\mathrm{sgn}\Psi_{1,2n+1}(t) = (-1)^n \mathrm{sgn}\sin t = (-1)^n \varphi_r^{(r)}(t), \quad |t| \le \frac{\pi}{2},$$

а также используя равенства (2.7.2), получаем утверждение леммы 1 при нечетных r. Чтобы доказать ее для четных r, достаточно положить в лемме 2.7.2 $x(t) = \varphi(t - 0,5\pi)$ и $t = 0$.

Напомним, что неотрицательная функция $\Phi(x)$ является полунормой на линейном пространстве $L_p(G)$, $G = \mathbf{T}$ или $\mathbf{R}$, если для любых $x, y \in L_p(G)$ и $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\lambda x) = |\lambda|\Phi(x), \quad \Phi(x+y) \le \Phi(x) + \Phi(y).$$

Будем говорить, что полунорма инвариантна относительно сдвига, если для любого λ

$$\Phi(x(\cdot + \lambda)) = \Phi(x).$$

Лемма 2.7.3. *Пусть инвариантная относительно сдвига полунорма Φ такова, что для любых функций $y \in L[a,b]$ и $z \in L_p(G)$*

$$\Phi\left(\int\limits_a^b z(\cdot - u)y(u)du\right) \le \Phi(z)\int\limits_a^b |y(u)|du. \tag{2.7.8}$$

Тогда для $x \in L^r_{p,p}(G)$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{\Phi(x^{(r-k)})}{K_k\Phi(x^{(r)})}\right)^{\frac{1}{k}} \le \left(\frac{\Phi(x)}{K_r\Phi(x^{(r)})}\right)^{\frac{1}{r}}, \quad k = 1, ..., r-1.$$

Доказательство. Из определения (2.7.6) и свойств полунормы следует, что

$$\Phi(x') = \Phi\left(U_{h,r}(x') - \pi h \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} \psi_{h,2\nu} x_h^{(2\nu+1)}\right) \le$$

$$\le \Phi\left(U_{h,r}(x')\right) + \pi h \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |\psi_{h,2\nu}|\Phi\left(x_h^{(2\nu+1)}\right).$$

Но

$$\Phi\left(x_h^{(2\nu+1)}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\pi h}\left(x^{(2\nu)}\left(\cdot + \pi\frac{h}{2}\right) - x^{(2\nu)}\left(\cdot - \pi\frac{h}{2}\right)\right)\right) \le$$

$$\le \frac{2}{\pi h}\Phi\left(x^{(2\nu)}\right)$$

и согласно лемме 2.7.2 и условию (2.7.8)

$$\Phi\left(U_{h,r}(x')\right) \le \Phi\left(x^{(r+1)}\right) \int\limits_{-0,5\pi h}^{0,5\pi h} |\Psi_{h,r}(t)|dt.$$

Таким образом (см. (2.7.3)),

$$\Phi(x') \le$$

$$\le \Phi\left(x^{(r+1)}\right) h^r \int\limits_{-0,5\pi}^{0,5\pi} |\Psi_{1,r}(t)|dt + 2 \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |\psi_{1,2\nu}| h^{2\nu-1} \Phi\left(x^{(2\nu)}\right).$$

Полагая

$$c_k = (\Phi(x^{(r+1-k)})(K_k \Phi(x^{(r+1)}))^{-1})^{1/k},$$

переписываем неравенство в виде

$$K_r c_r^r \le h^r \int\limits_{-0,5\pi}^{0,5\pi} |\Psi_{1,r}(t)|dt + 2 \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |\psi_{1,2\nu}| h^{2\nu-1} c_{r+1-2\nu}^{r+1-2\nu} K_{r+1-2\nu}. \tag{2.7.9}$$

В частности,

$$c_1 \le \frac{h}{2} + \frac{1}{2h} c_2^2 \tag{2.7.10}$$

и

$$c_2^2 \le \frac{h^2}{3} + \frac{2}{3h} c_3^3. \tag{2.7.11}$$

Полагая $h = c_2$ в (2.7.10) и $h = c_3$ в (2.7.11), получаем $c_1 \le c_2 \le c_3$. Пусть теперь $c_1 \le c_2 \le ... \le c_r$. Тогда, полагая $h = c_r$ в (2.7.9) и учитывая лемму 2.7.1, имеем

$$K_r c_r^r \le c_r^r \int\limits_{-0,5\pi}^{0,5\pi} |\Psi_{1,r}(t)|dt +$$

$$+2\sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]}|\psi_{1,2\nu}|K_{r+1-2\nu}+2|\psi_{1,0}|\frac{c_{r+1}^{r+1}-c_r^{r+1}}{c_r}K_{r+1}=$$

$$=c_r^rK_r+\frac{2}{\pi}\frac{c_{r+1}^{r+1}-c_r^{r+1}}{c_r}K_{r+1},$$

т.е. $c_r\le c_{r+1}$, что и завершает доказательство леммы 2.7.3.

Теперь, если $x\in L_p(\mathbf{R})$, положим $\Phi(x)=\|x\|_p:=\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$, а если $x\in L_p(\mathbf{T})$, то полагаем $\Phi(x)=\|x\|_p:=\|x\|_{L_p(\mathbf{T})}$. Учитывая, что в силу обобщенного неравенства Минковского при $p\in[1,\infty]$

$$\left\|\int\limits_a^b x(\cdot-u)y(u)du\right\|_p\le\|x\|_p\int\limits_a^b|y(u)|du,$$

получаем следующее утверждение.

Теорема 2.7.1. *Пусть* $r=2,3,...,\ k=1,...,r-1$ *и* $p\in[1,\infty]$. *Тогда для любой функции* $x\in L_{p,p}^r(G)$, *где* $G=\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{T}$, *выполняется неравенство*

$$\left(\|x^{(r-k)}\|_p\cdot\left(K_k\|x^{(r)}\|_p\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{k}}\le\left(\|x\|_p\cdot\left(K_r\|x^{(r)}\|_p\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

При $p=\infty$ это неравенство Колмогорова, а при остальных p – неравенство Стейна.

2.8. Теорема сравнения в несимметричном случае

Неравенство А.Н. Колмогорова (2.3.1) равносильно справедливости следующих соотношений (при любом $\lambda>0$):

$$\sup_{x\in W_\infty^r}\frac{\left\|x^{(k)}\right\|_\infty^r}{\|x\|_\infty^{r-k}}=\frac{\left\|\varphi_{\lambda,r}^{(k)}\right\|_\infty^r}{\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty^{r-k}}=\frac{K_{r-k}^r}{K_r^{r-k}},\quad 1\le k\le r-1;$$

другими словами, для отношения $\left\|x^{(k)}\right\|_\infty^r/\|x\|_\infty^{r-k}$ вычисляется точная верхняя грань на классе W_∞^r.

Есть определенный круг задач анализа, в котором вместо "симметричного" класса W^r_∞ приходится рассматривать его "несимметричный" аналог в следующем смысле: для заданных чисел $\alpha, \beta > 0$ положим

$$\|x\|_{\infty;\alpha,\beta} := \|\alpha x_+ + \beta x_-\|_\infty,$$

где $x_+(t)$ и $x_-(t)$ – соответственно положительная и отрицательная части функции $x(t)$, а через $W^r_{\infty;\alpha,\beta}$ обозначим класс функций $x \in$ $\in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, таких, что

$$\|x^{(r)}\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1.$$

В следующем параграфе докажем "несимметричный" аналог неравенства (2.3.1). А сейчас проведем необходимую для этого подготовительную работу – докажем аналог теоремы сравнения Колмогорова для классов $W^r_{\infty;\alpha,\beta}$. При этом роль функций сравнения играют "несимметричные" эйлеровы сплайны $\varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ (см. § 2.1), которые, очевидно, принадлежат $W^r_{\infty;\alpha,\beta}$.

Теорема 2.8.1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $\alpha, \beta > 0$; $x \in W^r_{\infty;\alpha,\beta}(\mathbf{R})$ и число λ выбрано так, что для всех $t \in \mathbf{R}$*

$$\min_t \varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta) \le x(t) \le \max_t \varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta).$$

Если точки ξ и η удовлетворяют условиям

$$x(\xi) = \varphi_{\lambda,r}(\eta;\alpha,\beta),$$

причем

$$x'(\xi)\varphi'_{\lambda,r}(\eta;\alpha,\beta) \ge 0,$$

то

$$|x'(\xi)| \le |\varphi'_{\lambda,r}(\eta;\alpha,\beta)|.$$

Докажем сначала вспомогательные леммы.

Лемма 2.8.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы абсолютно непрерывные функции* $g(t)$ *и* $\varphi(t)$, *причем* $\varphi(t)$ *строго возрастает и выпукла вверх на* $[a, b]$. *Если:*

а) $g(a) = \varphi(a), \quad g(b) > \varphi(b)$;

б) $g(b) = \varphi(b), \quad g(a) < \varphi(a)$,

то на интервале (a, b) *существуют точки* ξ *и* η, *такие, что* $g(\xi) = \varphi(\eta)$ *и* $g'(\xi) > \varphi'(\eta - 0)$.

Доказательство. Докажем утверждение леммы в предположении "а". Считаем, что $g(t) > \varphi(t)$ на (a, b), ибо иначе последующие рассуждения можно применить к отрезку $[a_1, b]$, где a_1 – самый правый нуль разности $g(t) - \varphi(t)$ на (a, b).

Так как $g(t)$ непрерывна, то она принимает в некоторых точках интервала (a, b) значение, равное $\varphi(b)$. Пусть T – самая левая из таких точек, т.е. $g(T) = \varphi(b)$ и $g(t) < \varphi(b)$ $(a \le t < T)$. Функция $\varphi(t)$ строго возрастает, следовательно, $\varphi(T) < \varphi(b)$ и, значит,

$$\int_a^T \varphi'(t)dt < \int_a^T g'(t)dt.$$

Поэтому существует точка ξ, $a < \xi < T$, такая, что $\varphi'(\xi) < g'(\xi)$. Но так как

$$\varphi(\xi) < g(\xi) < g(T) = \varphi(b),$$

то в некоторой точке $\eta \in (a, b)$ будет $\varphi(\eta) = g(\xi)$. В силу строгой выпуклости вверх функции $\varphi(t)$ выполняется неравенство $\varphi'(\eta - \xi) \le \varphi'(\xi)$ и, следовательно,

$$g'(\xi) > \varphi'(\xi) \ge \varphi'(\eta - 0).$$

Утверждение леммы в предположении "а" доказано. В предположении "б" оно легко сводится к предыдущему переходом к подходящим сдвигам функций g и φ. Лемма доказана.

Замечание. Наряду с леммой 2.8.1 нам потребуются также ее варианты, которые получаются зеркальным отображением всей картины относительно вертикальных прямых $t = c$ $(c \ge b)$ или горизонтальных прямых $y = d$, где $d \le \varphi(a)$, а также суперпозицией

этих отображений. Любой из этих вариантов легко свести к уже рассмотренным.

Доказательство теоремы 2.8.1 будет проведено по индукции, но чтобы обеспечить необходимое "зацепление", докажем еще следующую лемму.

Лемма 2.8.2. *Пусть* $k \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta > 0$, $x \in W^k_{\infty;\alpha,\beta}(\mathbf{R})$ *и* $E_0(x)_\infty = E_0(\varphi_{\lambda,k}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty$. *Если теорема* 2.8.1 *верна для* $r = k-1$, *то* $\|x'_\pm\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,k-1}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty$.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть для определенности

$$\frac{\|x'_+\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,k-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+\|_\infty} \ge \frac{\|x'_-\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,k-1}(\cdot;\alpha,\beta)_-\|_\infty}. \tag{2.8.1}$$

Предположим, что

$$\|x'_+\|_\infty = x'_+(t_0) > \|\varphi_{\lambda,k-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+\|_\infty.$$

Обозначим t_1 и t_2 – ближайшие слева и справа от t_0 нули функции $\varphi_{\lambda,k-1}(t;\alpha,\beta)$, которая, следовательно, выпукла вверх на (t_1,t_2), строго возрастает на (t_1,t_0) и строго убывает на (t_0,t_2).

Найдется точка $\theta \in (t_1,t_2)$, в которой будет $x'(\theta) \le \varphi_{\lambda,k-1}(\theta;\alpha,\beta)$, ибо предположение $x'(t) > \varphi_{\lambda,k-1}(t;\alpha,\beta)$ $(t_1 < t < t_2)$ означало бы, что

$$\int_{t_1}^{t_2} x'(t)dt > \int_{t_1}^{t_2} \varphi_{\lambda,k-1}(t;\alpha,\beta)dt = \varphi_{\lambda,k}(t_2;\alpha,\beta) - \varphi_{\lambda,k}(t_1;\alpha,\beta) =$$

$$= 2E_0(\varphi_{\lambda,k}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty,$$

и, значит, $E_0(x)_\infty > E_0(\varphi_{\lambda,k}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty$ – в противоречие с условием леммы. Положим, $y(t) := \gamma x'(t)$, где число $\gamma \in (0,1)$ выбрано так, что $\|x'_+\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,k-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+\|_\infty$ и, следовательно, ввиду (2.8.1) $\|x'_-\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,k-1}(\cdot;\alpha,\beta)_-\|_\infty$. Тогда

$E_0(y)_\infty \le E_0(\varphi_{\lambda,k-1}(t_2;\alpha,\beta))_\infty$ и так как $\|y^{(k-1)}\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} = \|x^{(k)}\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$, то $y \in W^{k-1}_{\infty;\alpha,\beta}$.

Далее, так как

$$y(\theta) = \gamma x'(\theta) < \varphi_{\lambda,k-1}(\theta;\alpha,\beta), \quad y(t_0) = \varphi_{\lambda,k-1}(t_0;\alpha,\beta),$$

то применение леммы 2.8.1 (с учетом замечания к ней, если $t_0 < \theta < t_2$) приводит к противоречию с утверждением теоремы 2.8.1 для $r = k-1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.8.1. При $r = 1$ утверждение теоремы тривиально, ибо $\varphi'_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta) = \alpha$ (если $\varphi'_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta) > 0$) и $\varphi'_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta) = -\beta$ (если $\varphi'_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta) < 0$) везде за исключением точек своего экстремума.

Далее доказываем теорему по индукции. Предположим, что теорема 2.8.1 доказана при $r = 1, 2, ..., k-1$ и для функции x выполнены ее условия при $r = k$ $(k \ge 2)$. Тогда в силу леммы 2.8.1 $\|x'_\pm\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,k-1}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty$. Не теряя общности, считаем, что $\xi = \eta$, т.е. $x(\xi) = \varphi_{\lambda,k}(\xi;\alpha,\beta)$ и $\mathrm{sgn} x'(\xi) = \mathrm{sgn}\varphi_{\lambda,k-1}(\xi;\alpha,\beta) \ne 0$ (если $x'(\xi) = 0$, то доказывать нечего). Рассуждаем от противного: пусть $|x'(\xi)| > |\varphi'_{\lambda,k}(\xi;\alpha,\beta)|$. Для определенности будем предполагать, что $\varphi_{\lambda,k}(\xi;\alpha,\beta) < 0$ и $\varphi'_{\lambda,k}(\xi;\alpha,\beta) > 0$, т.е. функция $\varphi_{\lambda,k}(t;\alpha,\beta)$ возрастает в точке ξ и на промежутке (t_0,ξ), где t_0 – ближайшая слева ее точка минимума, она выпукла вниз. Так как

$$\min_t x(t) \ge \min_t \varphi_{\lambda,k}(t;\alpha,\beta) = \varphi_{\lambda,k}(t_0;\alpha,\beta),$$

то в некоторой точке $\delta \in (t_0,\xi)$ будет $x(\delta) = \varphi_{\lambda,k}(\delta;\alpha,\beta)$, т.е.

$$\int_\delta^\xi \Big[x'(t) - \varphi'_{\lambda,k}(t;\alpha,\beta)\Big]\,dt = 0,$$

и, следовательно, разность $x'(t) - \varphi'_{\lambda,k}(t;\alpha,\beta)$ должна обратиться в нуль в некоторой точке $\omega \in (\delta,\xi)$. Так как функция $\varphi'_{\lambda,k}(t;\alpha,\beta)$ выпукла вверх на (t_0,ξ) и по предположению $x'(\xi) > \varphi'_{\lambda,k}(\xi;\alpha,\beta)$,

то к функциям $x'(t)$ и $\varphi'_{\lambda,k}(t;\alpha,\beta)$ применима лемма 2.8.1, которая приводит к противоречию с утверждением теоремы для $r = k-1$. Теорема доказана.

Следствие 2.8.1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta > 0$. *Если* $x \in W^r_{\infty;\alpha,\beta}(\mathbf{R})$ *и* $E_0(x)_\infty = E_0(\varphi_{\lambda,r}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty$ *при некотором* $\lambda > 0$, *то*

$$\|x^{(k)}_\pm\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty \quad (k = 1, 2, ..., r-1). \tag{2.8.2}$$

Доказательство. Достаточно, очевидно, проверить (2.8.2) для любого r и $k = 1$. Пусть для определенности

$$\frac{\|x'_+\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+\|_\infty} \ge \frac{\|x'_-\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_-\|_\infty}.$$

Тогда, предполагая противное, будем иметь

$$\|x'_+\|_\infty = x'_+(\xi) > \|\varphi_{\lambda,r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+\|_\infty.$$

Выбрав точку η из условия $\varphi_{\lambda,r}(\eta;\alpha,\beta) = x(\xi)$, $\operatorname{sgn}\varphi'_{\lambda,r}(\eta;\alpha,\beta) > 0$, будем иметь $x'_+(\xi) > \varphi'_{\lambda,r}(\eta;\alpha,\beta)$ – в противоречие с теоремой 2.8.1.

Следствие 2.8.2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta > 0$, $x \in W^r_{\infty;\alpha,\beta}(\mathbf{R})$ *и* $E_0(x)_\infty = E_0(\varphi_{\lambda,r}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty$ *для некоторого* $\lambda > 0$; $x(\xi) = \varphi_{\lambda,r}(\eta;\alpha,\beta)$ *в некоторых точках* ξ, η, $\eta \in [a,b]$, *причем* $x'(\xi)\varphi'_{\lambda,r}(\eta;\alpha,\beta) \ge 0$, *и* $\varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ *монотонна на* $[a,b]$.

1. *Если* $\varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ *возрастает на* $[a,b]$, *то*

$$x(\xi+u) \le \varphi_{\lambda,r}(\eta+u;\alpha,\beta) \quad (0 \le u \le b-\eta), \tag{2.8.3}$$

$$x(\xi-u) \ge \varphi_{\lambda,r}(\eta-u;\alpha,\beta) \quad (0 \le u \le \eta-a). \tag{2.8.4}$$

В случае убывания $\varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ *на* $[a,b]$ *знаки неравенств в* (2.8.3) *и* (2.8.4) *меняются на противоположные.*

2. *Если* $x(\xi_1) = \varphi_{\lambda,r}(\eta_1;\alpha,\beta)$ $(\eta_1 \in [a,b])$, *причем* $x'(\xi_1)\times \varphi'_{\lambda,r}(\eta_1;\alpha,\beta) \ge 0$, *то*

$$|\xi_1 - \xi| \ge |\eta_1 - \eta|.$$

Доказательство. Можно считать, что $\xi = \eta$, а точки a и b – ближайшие к η нули производной $\varphi'_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ слева и справа. Предположим, что $\varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ возрастает на (a,b) и $\varphi_{\lambda,r}(\eta;\alpha,\beta) \geq 0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Тогда неравенство (2.8.3) вытекает из тех соображений, что если бы в некоторой точке ξ_1 ($\eta < \xi_1 > b$) было бы $x(\xi_1) > \varphi_{\lambda,r}(\xi_1;\alpha,\beta)$, то, используя лемму 2.8.1, сразу приходим к противоречию с теоремой сравнения.

Точно так же, опираясь на лемму 2.8.1, устанавливаем, что $x(t) \geq \varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ для $t \in (t_0,\eta)$, где t_0 – нуль функции $\varphi_{\lambda,r}(;\alpha,\beta)$ на (a,b).

Осталось доказать, что $x(t) \geq \varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ для $t \in (a,t_0)$, причем уже известно, что это неравенство справедливо в точке t_0. Предположив противное, окажемся в условиях одного из вариантов леммы 2.8.1, который снова приведет нас к противоречию.

Утверждение 2 сразу следует из утверждения 1.

2.9. Неравенство Колмогорова в несимметричном случае

Теорема 2.9.1. *Пусть $k,r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $G = \mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$. Тогда для любой функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(G)$ и для любых $\alpha,\beta > 0$ выполняется неравенство*

$$\|x^{(k)}_{\pm}\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}(\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{E_0(\varphi_r(\cdot\,;\alpha,\beta))^{1-k/r}_\infty} E_0(x)^{1-k/r}_\infty \|x^{(r)}\|^{k/r}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}. \tag{2.9.1}$$

Неравенство точное и обращается в равенство для функций вида $x(t) = a\varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta) + b$, $a,b \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$ при $G = \mathbf{R}$ и $\lambda \in \mathbf{N}$ при $G = \mathbf{T}$.

Доказательство. Фиксируем $\alpha,\beta > 0$ и $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$. Ввиду однородности неравенства (2.9.1) можем считать, что

$$\|x^{(r)}\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1. \tag{2.9.2}$$

Тогда $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}(\mathbf{R})$. Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$E_0(x)_\infty = E_0(\varphi_{\lambda,r}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty. \tag{2.9.3}$$

Тогда в силу следствия 2.8.1

$$\|x_{\pm}^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty. \tag{2.9.4}$$

Комбинируя (2.9.3) и (2.9.4), получаем

$$\frac{\|x_{\pm}^{(k)}\|_\infty}{E_0(x)_\infty^{1-k/r}} \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{E_0(\varphi_{\lambda,r}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty^{1-k/r}} =$$

$$= \frac{\lambda^{-(r-k)}\|\varphi_{r-k}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{[\lambda^{-r}E_0(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta))_\infty]^{1-k/r}} = \frac{\|\varphi_{r-k}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{E_0(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta))_\infty^{1-k/r}}.$$

Отсюда ввиду (2.9.2) следует (2.9.1).

Точность неравенства очевидна. Теорема доказана.

При $\alpha = \beta$ неравенство (2.9.1) превращается в неравенство Колмогорова (2.3.1).

2.10. Неравенство Надя

До сих пор в данной главе мы изучали точные неравенства вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le K\,\|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_s^\beta$$

при условии, что $q = p = s$ и $k \ne 0$. В гл. 4 будем исследовать условия на все параметры q, p, s, r и k, гарантирующие существование неравенств такого вида. А сейчас рассмотрим частный случай $k = 0$, $r = 1$. В такой ситуации для функций, определенных на прямой, Б.С. Надь [266] при всех допустимых значениях параметров q, p, s доказал точные неравенства и описал экстремальные функции.

Всюду ниже запись $\|x\|_p$ обозначает $\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$. Сначала исследуем более простой случай $q = \infty$.

Теорема 2.10.1. *Пусть $p \in (0,\infty)$, $s \in [1,\infty)$. Тогда для любой функции $x \in L^1_{p,s}(\mathbf{R})$ выполняется неравенство*

$$\|x\|_\infty \le \left(\frac{1+p/s'}{2}\right)^{1-\frac{1-1/s}{1+1/p-1/s}} \|x\|_p^{\frac{1-1/s}{1+1/p-1/s}} \|x'\|_s^{1-\frac{1-1/s}{1+1/p-1/s}}. \tag{2.10.1}$$

Неравенство (2.10.1) *является точным. В случае* $s = 1$ *знак равенства в* (2.10.1) *выполняется только для функций* $x(t)$, *таких, что при некотором* $t = t_0$ $|x(t)|$ *монотонно возрастает для* $t \le t_0$ *и монотонно убывает для* $t > t_0$. *При* $s > 1$ *знак равенства в* (2.10.1) *выполняется тогда и только тогда, когда* $x(t) = ax_{\infty,p,s}(|bt + c|)$, *где* a, b, c *суть произвольные константы (*$b \ne 0$*), а* $x_{\infty,p,s}$ *для* $t \in \mathbf{R}_+$ *определена следующим образом: в случае* $p < s$

$$x_{\infty,p,s}(t) = \begin{cases} (1-t)^{\frac{s}{s-p}}, & \text{если } t \in [0,1], \\ 0, & \text{если } t > 1; \end{cases}$$

в случае $p = s$

$$x_{\infty,p,s}(t) = e^{-t};$$

в случае $p > s$

$$x_{\infty,p,s}(t) = (1+t)^{\frac{s}{s-p}}.$$

Доказательство. Если $s = 1$, то неравенство (2.10.1) вырождается в неравенство

$$\|x\|_\infty \le \frac{1}{2}\|x'\|_1. \tag{2.10.2}$$

Так как для функции x из $L^1_{1,1}(\mathbf{R})$ найдутся последовательности аргументов $\alpha_k \to \infty$, $\beta_k \to -\infty$, такие, что

$$\lim_{k\to\infty} x(\alpha_k) = \lim_{k\to\infty} x(\beta_k) = 0,$$

то (2.10.2) очевидным образом выполнено.

Далее предположим, что $s > 1$. Для произвольного $q \ge 1$ положим $x^{<q>} := |x|^q \mathrm{sgn} x$; тогда $(|x|^{q+1})' = (q+1)x^{<q>}x'$. Используя (2.10.2), имеем

$$\|x\|^q_\infty = \||x|^q\|_\infty \le \frac{1}{2}\|(|x|^q)\|_1 =$$

$$= \frac{q}{2}\int\limits_{\mathbf{R}} |x(t)^{q-1}x'(t)|dt \le \frac{q}{2}\int\limits_{\mathbf{R}} |x(t)|^{q-1}|x'(t)|dt. \tag{2.10.3}$$

Положим в (2.10.3) $q = 1 + p/s'$ и применим неравенство Гельдера с показателями (s', s) к функции $x \in L^1_{p,s}(\mathbf{R})$:

$$\|x\|_\infty^{1+p/s'} \le \frac{1+p/s'}{2} \int\limits_{\mathbf{R}} |x(t)|^{p/s'} |x'(t)| dt \le$$

$$\le \frac{p+s'}{2s'} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} |x'(t)|^s dt \right)^{\frac{1}{s}}. \qquad (2.10.4)$$

Полученное неравенство эквивалентно неравенству (2.10.1).

Из (2.10.3) и (2.10.4) следует, что экстремальная функция $y(t)$ должна обращать в равенство (2.10.2), а также удовлетворять условиям:

$$\mathrm{sgn} y(t) \mathrm{sgn} y'(t) \ge 0, \qquad (2.10.5)$$

$$|y'(t)| = \rho |y(t)|^{\frac{p}{s}} \quad (\rho > 0). \qquad (2.10.6)$$

Допустим, что $\|y\|_\infty = y(0)$. Тогда из (2.10.5) следует, что $\mathrm{sgn}\, y'(t) = -\mathrm{sgn}\, t$, поэтому $(y^2(t))' = 2y(t)y'(t)$ неотрицательна при $t < 0$ и неположительна при $t > 0$. А значит, функция $y^2(t)$ при $t < 0$ монотонно растет, а при $t > 0$ монотонно убывает. Так как $y(0) > 0$, то это возможно лишь в случае, когда $y(t)$ также для $t < 0$ монотонно растет, а при $t > 0$ монотонно убывает и $y(t) \ge 0$. Тогда условие (2.10.6) эквивалентно следующему:

$$y'(t) = \rho y(t)^{\frac{p}{s}} \text{ для } t < 0,$$

$$-y'(t) = \rho y(t)^{\frac{p}{s}} \text{ для } t > 0.$$

Это дифференциальное уравнение при условии $y(0) = 1$ имеет единственное решение $y(t) = x_{\infty,p,s}(|\sigma t|)$, где $\sigma = \rho(1 - p/s)$ при $p \ne s$ и $\sigma = \rho$ при $p = s$. Осталось заметить, что неравенство (2.10.1) инвариантно относительно умножений на константы и растяжения оси аргументов. Теорема доказана.

Перейдем к случаю $q \ne \infty$. Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.10.1. *Пусть* $F \in L_1^1[0,1]$, $F(0) = 0$ *и* F *монотонно возрастает. Тогда для любой функции* x, *такой, что* $x \neq 0$ *и при некотором* $p < \infty$ $x \in L^1_{p,1}(\mathbf{R})$, *выполняется неравенство*

$$2F(1) \leq \int\limits_{\mathbf{R}} F'\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_\infty}\right)\frac{|x'(t)|}{\|x\|_\infty}dt. \tag{2.10.7}$$

Доказательство. Правая часть (2.10.7) есть вариация функции $F(y(t))$, где $y(t) = |x(t)|/\|x\|_\infty$ принимает значения из $[0,1]$. Из условия $y \in L_p(\mathbf{R})$, $p < \infty$, следует, что найдутся $\alpha_k \to \infty$ и $\beta_k \to -\infty$, такие, что

$$\lim_{\alpha_k \to \infty} y(\alpha_k) = \lim_{\beta_k \to -\infty} y(\beta_k) = 0.$$

Тогда для любого ξ при $k \to \infty$ имеем

$$\bigvee_0^1 (F(y)) \geq F(|y(\alpha_k) - y(\xi)|) + F(|y(\xi) - y(\beta_k|) \to 2F(y(\xi)),$$

и при этом

$$\sup_\xi F(y(\xi)) = F(\|y\|_\infty) = F(1).$$

Лемма доказана.

Из (2.10.7) следует, что если $x \in L^1_{p,s}(\mathbf{R})$, $s > 1$, то

$$2F(1) \leq \left\|\frac{x'}{\|x\|_\infty}\right\|_s \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \left|F'\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_\infty}\right)\right|^{s'} dt\right)^{1/s'}. \tag{2.10.8}$$

Теорема 2.10.2. *Пусть* $0 < p < q < \infty$, $s \in [1,\infty)$. *Тогда для функций из* $L^1_{p,s}(\mathbf{R})$ *выполняется точное неравенство*

$$\|x\|_q \leq K(q,p,s)\|x\|_p^{\frac{1+1/q-1/s}{1+1/p-1/s}}\|x'\|_s^{1-\frac{1+1/q-1/s}{1+1/p-1/s}}, \tag{2.10.9}$$

где при $s > 1$

$$K(q,p,s) = \left(\frac{\frac{p+s'}{q-p}}{\left(\frac{q+s'}{q-p}\right)^{\frac{q+s'}{p+s'}} \left(\frac{2}{q-p} B\left(1/s'+1; \frac{p/s'+1}{q-p}\right)\right)^{\frac{q-p}{p/s'+1}}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

и

$$K(q,p,1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{p}{q}}.$$

Доказательство. Пусть сначала $s = 1$; тогда

$$\|x\|_q^q = \int\limits_{\mathbf{R}} |x(t)|^{q-p}|x(t)|^p dt \le \|x\|_p^p \|x\|_\infty^{q-p} \le \|x\|_p^p \left(\frac{1}{2}\|x'\|_1\right)^{q-p},$$

$$\|x\|_q \le \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{p}{q}} \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x'\|_1^{1-\frac{p}{q}}.$$

В том, что константа $2^{-(1-p/q)}$ точная, можно убедиться, рассматривая последовательность функций

$$y_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| \le 1, \\ 1 - n(|t|-1), & \text{если } 1 < |t| \le 1 + \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } |t| \ge 1 + \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Пусть теперь $s > 1$. Для $u \in [0,1]$ положим

$$F'(u) = (u^p - u^q)^{1/s'}, \quad F(u) = \int\limits_0^u F'(y)dy.$$

Тогда функция F удовлетворяет условиям леммы и из (2.10.8) следует, что

$$(2F(1))^{s'} \le \left\| \frac{x'}{\|x\|_\infty} \right\|_s^{s'} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \left| \frac{x(t)}{\|x\|_\infty} \right|^p dt - \int\limits_{\mathbf{R}} \left| \frac{x(t)}{\|x\|_\infty} \right|^q dt \right) =$$

$$= \left\| \frac{x'}{\|x\|_\infty} \right\|_s^{s'} \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_p^p \left(1 - \frac{\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_q^q}{\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_p^p} \right). \tag{2.10.10}$$

Пусть

$$V := \frac{\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_q^q}{\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_p^p}.$$

Ясно, что $V \in (0,\, 1]$. Положим

$$M := \max_{0 \le t \le 1} \left[t^{\frac{p+s'}{q-p}} (1-t) \right].$$

Тогда

$$1 - V \le \frac{M}{V^{\frac{p+s'}{q-p}}}. \tag{2.10.11}$$

Используем это неравенство в (2.10.10):

$$(2F(1))^{s'} \le \left\| \frac{x'}{\|x\|_\infty} \right\|_s^{s'} \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_p^p M \left(\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_q^q \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_p^{-p} \right)^{-\frac{p+s'}{q-p}}.$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_q^{q\frac{p+s'}{q-p}} \le \left(\frac{1}{2F(1)} \right)^{s'} M \left\| \frac{x'}{\|x\|_\infty} \right\|_s^{s'} \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_p^{p+p\frac{p+s'}{q-p}},$$

$$\|x\|_q \le \left(\frac{M}{(2F(1))^{s'}} \right)^{\frac{q-p}{q(p+s')}} \|x\|_p^{\frac{p(q+s')}{q(p+s')}} \|x'\|_s^{\frac{s'(q-p)}{q(p+s')}}. \tag{2.10.12}$$

Заметим, что

$$\frac{p(q+s')}{q(p+s')} = \frac{1+1/q-1/s}{1+1/p-1/s}, \quad \frac{s'(q-p)}{q(p+s')} = 1 - \frac{1+1/q-1/s}{1+1/p-1/s}. \tag{2.10.13}$$

Вычислим $F(1)$:

$$F(1) = \int\limits_0^1 F'(u)du = \int\limits_0^1 (u^p - u^q)^{1/s'} du = \int\limits_0^1 (1 - u^{q-p})^{1/s'} u^{p/s'} du.$$

Сделаем замену $u^{q-p} = t$:

$$F(1) = \int\limits_0^1 (1-t)^{1/s'} t^{\frac{p}{s'(q-p)}} \frac{1}{q-p} t^{\frac{1}{q-p}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{q-p} \int\limits_0^1 (1-t)^{1/s'} t^{\frac{1}{q-p}\left(\frac{p}{s'}+1\right)-1} dt = \frac{1}{q-p} B\left(\frac{1}{s'}+1; \frac{p/s'+1}{q-p}\right). \tag{2.10.14}$$

Далее, легко видеть, что максимум M достигается в точке $t_0 = \frac{p+s'}{q+s'}$ и

$$M = \frac{\left(\dfrac{p+s'}{q-p}\right)^{\frac{p+s'}{q-p}}}{\left(\dfrac{q+s'}{q-p}\right)^{\frac{q+s'}{q-p}}}. \tag{2.10.15}$$

Из (2.10.12)–(2.10.15) следует (2.10.9) в случае $s > 1$.

Докажем теперь точность этого неравенства. Покажем, что равенство в (2.10.9) выполняется тогда и только тогда, когда функция $x(t)$ имеет вид $ax_{q,p,s}(|bt + c|)$, где a, b, c – произвольные константы ($b \neq 0$) и функция $x_{q,p,s}(t)$ для $t > 0$ определена следующим образом: $u = x_{q,p,s}(t)$ является обратной функцией для функции

$$t = \int\limits_u^1 \frac{dw}{[w^p(1 - w^{q-p})]^{\frac{1}{s}}}, \quad 0 \le u \le 1;$$

$x_{q,p,s}(t)$ является также монотонно убывающей функцией, которая в случае $p \geq s$ всюду положительна, а в случае $p < s$ в точке

$$t_0 = \int\limits_0^1 \frac{dw}{[w^p(1-w^{q-p})]^{\frac{1}{s}}}$$

равна нулю; в этом случае полагаем $x_{q,p,s}(t) = 0$ и для $t > t_0$.

Функция $y(t)$, обращающая (2.10.9) в равенство, должна:

1) обращать в равенство (2.10.8) (с соответствующей функцией F);

2) обращать в равенство (2.10.11); это значит, что $V = \dfrac{p+s'}{q+s'}$, т.е.

$$\frac{\left\| \frac{y}{\|y\|_\infty} \right\|_q^q}{\left\| \frac{y}{\|y\|_\infty} \right\|_p^p} = \frac{p+s'}{q+s'}. \tag{2.10.16}$$

Рассмотрим сначала функции y, удовлетворяющие условию $\|y\|_\infty = y(0) = 1$. Из доказательства (2.10.8) видно, что функция $y(t)$ такова, что:

а) $|y'|^s = \rho \cdot (F'(|y|))^{\frac{s}{s-1}}$ с некоторой положительной константой ρ;

б) там, где $F'(|y|) = 0$ (т.е. где $y \neq 0, \pm 1$), выполняются соотношения

$$|y'(t)| = y'(t)\ \mathrm{sgn}\ y(t), \quad t < 0,$$
$$|y'(t)| = y'(t)\ (-\mathrm{sgn}\ y(t)), \quad t > 0.$$

Из последнего следует, что там, где $F'(|y|) \neq 0$, функция $(y^2(t))'$ для $t < 0$ неотрицательна, а для $t > 0$ – неположительна. Если же $F'(|y|) = 0$, то из “а” следует, что $y' = 0$, т. е. $(y^2)' = 0$. Отсюда вытекает, что $y^2(t)$ для $t < 0$ монотонно растет, а для $t > 0$ монотонно убывает. Тогда $y(t)$ всюду неотрицательна, для $t < 0$ монотонно растет, а для $t > 0$ монотонно убывает. Для таких функций условие “а” принимает вид

$$y'(t) = \rho(F'(|y(t)|))^{\frac{1}{s-1}}, \quad t < 0, \tag{2.10.17}$$

$$-y'(t) = \rho(F'(|y(t)|))^{\frac{1}{s-1}}, \quad t > 0. \tag{2.10.18}$$

Покажем, что достаточно ограничиться только теми решениями этого дифференциального уравнения, для которых $y(0) = 1$ и $0 \le y(t) < 1$ для $t \ne 0$.

Пусть y – такое решение (2.10.17), для которого найдется интервал (σ, τ), где $y(t) = 1$ (очевидно, что $\sigma \le 0 \le \tau$). Обозначим ω_1 и $-\omega_2$ – наименьший положительный и наибольший отрицательный нули функции y.

Согласно определению функции F

$$F'(u) = (u^p - u^q)^{\frac{1}{s'}}.$$

Отсюда видно, что

$$F''(u) = \frac{1}{s'}(u^p - u^q)^{\frac{1}{s'}-1}(pu^{p-1} - qu^{q-1}) =$$

$$= \frac{1}{s'}\frac{pu^p - qu^q}{u(F'(u))^{\frac{1}{s-1}}}.$$

Используя это соотношение и предположение относительно y, имеем

$$\|y\|_q^q - \|y\|_p^p + \frac{1}{s'}\left(q\|y\|_q^q - p\|y\|_p^p\right) =$$

$$= \left(\int\limits_{\sigma}^{\tau} + \int\limits_{-\omega_2}^{\sigma} + \int\limits_{\tau}^{\omega_1}\right)\left\{y^q(t) - y^p(t) + \frac{1}{s'}\left(qy^q(t) - py^p(t)\right)\right\} dt =$$

$$= (q-p)(\tau - \sigma) -$$

$$- \left(\int\limits_{-\omega_2}^{\sigma} + \int\limits_{\tau}^{\omega_1}\right)\left[(F'(y(t)))^{\frac{s}{s-1}} + y(t)(F'(y(t)))^{\frac{1}{s-1}}F''(y(t))\right] dt. \tag{2.10.19}$$

Из (2.10.17) следует, что

$$\int\limits_{\tau}^{\omega_1}\left[(F'(y(t)))^{\frac{s}{s-1}} + y(t)(F'(y(t)))^{\frac{1}{s-1}}F''(y(t))\right] dt =$$

$$= \int\limits_1^0 \left[(F'(y(t)))^{\frac{s}{s-1}} + y(t)(F'(y(t)))^{\frac{1}{s-1}} F''(y(t)) \right] \frac{dt}{dy} dy =$$

$$= \int\limits_1^0 \left[(F'(y(t)))^{\frac{s}{s-1}} + y(t)(F'(y(t)))^{\frac{1}{s-1}} F''(y(t)) \right] \frac{dy}{\rho (F'(y(t)))^{\frac{1}{s-1}}} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \int\limits_0^1 \left[F'(y) + yF''(y) \right] dy = \frac{1}{\rho} [yF'(y)]|_0^1 = 0.$$

Аналогичным образом и интеграл $\int\limits_{-\omega_2}^{\sigma}$ равен нулю. Тогда из (2.10.19) вытекает, что

$$\|y\|_q^q \left(1 + \frac{q}{s'}\right) = \|y\|_p^p \left(1 + \frac{p}{s'}\right) + (q-p)(\tau - \sigma).$$

Теперь из сравнения с (2.10.16) следует, что $\tau = \sigma$.

Итак, при $t \neq 0$ всегда $y(t) < 1$. Но существует лишь единственное такое решение (2.10.17), а именно $y(t) = x_{q,p,s}(|\rho t|)$. Эта функция допустима, т.е. $y \in L^1_{p,s}(\mathbf{R})$.

Действительно, в случае $p < s$ это очевидно, так как тогда $x_{q,p,s}$ имеет компактный носитель. В случае же $p \geq s$ имеем

$$\frac{1}{2}\|y\|_p^p = \int\limits_0^\infty x_{q,p,s}^p(\rho t) dt = \frac{1}{\rho} \int\limits_0^\infty x_{q,p,s}^p(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\rho} \int\limits_1^0 u^p \frac{dt}{du} du = \frac{1}{\rho} \int\limits_1^0 u^p \left(-u^p (1 - u^{q-p})^{-\frac{1}{s}} \right) du =$$

$$= \frac{1}{\rho} \int\limits_0^1 u^{\frac{p}{s'}} \left(1 - u^{q-p}\right)^{-\frac{1}{s}} du < \infty,$$

так как $p/s' > 0$ и $-1/s > -1$.

Вместе с $x^p_{q,p,s}(|\rho t|)$ компактный носитель имеет $x^q_{q,p,s}(|\rho t|)$, а значит, и $x^p_{q,p,s}(|\rho t|) - x^q_{q,p,s}(|\rho t|)$. Но условие "а" для экстремали влечет то, что тогда и $(x'_{q,p,s}(|\rho t|))^s$ имеет конечный интеграл.

Если теперь отказаться от условия $y(0) = \|y\|_\infty = 1$, то знак равенства в (2.10.9) остается для любой функции вида $ax_{q,p,s}(b|\rho t|)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$.

2.11. Аналог неравенства Надя для периодических функций

Пусть теперь функции $x(t)$ – 2π-периодические, а запись $\|x\|_p$ обозначает $\|x\|_{L_p(\mathbf{T})}$. Рассмотрим вопрос об аналоге неравенств Надя (2.10.1) и (2.10.9) для таких функций.

Отметим, что при доказательстве (2.10.1) и (2.10.9) использовался тот факт, что для функции x из $L^1_{p,s}(\mathbf{R})$ найдутся последовательности α_k и β_k, такие, что $\alpha_k \to \infty$, $\beta_k \to -\infty$, и

$$\lim_{k\to\infty} x(\alpha_k) = \lim_{k\to\infty} x(\beta_k) = 0$$

(см. доказательство леммы 2.10.2 и соотношения (2.10.2)).

В периодическом случае функция x из $L^1_s(\mathbf{T})$ может не иметь нулей. Именно поэтому неравенства Надя вида (2.10.1) и (2.10.9) на всем классе $L^1_s(\mathbf{T})$ невозможны; в этом легко убедиться, рассмотрев для произвольной $x_0 \in L^1_s(\mathbf{T})$ последовательность функций $x_n(t) := x_0(t) + n$ при неограниченном росте n. Чтобы исключить эту ситуацию, можно поступить двояким образом: либо ограничиться подмножеством функций из $L^1_s(\mathbf{T})$, имеющих нули, либо рассматривать весь класс функций из $L^1_s(\mathbf{T})$, но вместо $\|x\|_q$ оценивать, например, $\|x - c_\infty(x)\|_q$, где $c_\infty(x)$ – константа наилучшего L_∞-приближения x. Рассмотрим оба варианта.

Пусть функция из $L^1_s(\mathbf{T})$ имеет нули. Легко видеть, что тогда доказательства неравенств (2.10.1) и (2.10.9) остаются в силе для периодических функций (с заменой $\mathbf{R}$ на $\mathbf{T}$).

Пусть оценивается $\|x - c_\infty(x)\|_q$. При доказательстве аналога неравенства (2.10.1) надо вместо неравенства (2.10.2) использовать

очевидное точное неравенство

$$E_0(x)_\infty \le \frac{1}{4}\|x'\|_\infty.$$

Аналогичное изменение требуется внести и в лемму 2.10.2, которая теперь сформулируется следующим образом.

Лемма 2.11.1. *Пусть* $F \in L_1^1[0,1]$, $F(0) = 0$ *и* F *монотонно возрастает. Тогда для любой функции* $x \in L_1^1(\mathbf{T})$, $x \ne 0$, *выполняется неравенство*

$$4F(1) \le \int\limits_{\mathbf{T}} F'\left(\frac{|x(t) - c_\infty(x)|}{E_0(x)_\infty}\right)\frac{|x'(t)|}{E_0(x)_\infty}dt. \tag{2.11.1}$$

После замены (2.10.7) на (2.11.1) дальнейшее доказательство (2.10.9) остается в силе (с очевидными изменениями).

Таким образом, для периодических функций верна следующая теорема.

Теорема 2.11.1. 1. *Пусть* $p \in (0,\infty)$, $s \in [1,\infty)$. *Тогда:*

а) если функция $x \in L_s^1(\mathbf{T})$ *имеет нули, то выполняется неравенство*

$$\|x\|_\infty \le \left(\frac{1+p/s'}{2}\right)^{1-\frac{1-1/s}{1+1/p-1/s}} \|x\|_p^{\frac{1-1/s}{1+1/p-1/s}} \|x'\|_s^{1-\frac{1-1/s}{1+1/p-1/s}}; \tag{2.11.2}$$

б) для любой функции $x \in L_s^1(\mathbf{T})$ *справедливо неравенство*

$$E_0(x)_\infty \le$$

$$\le \left(\frac{1+p/s'}{4}\right)^{1-\frac{1-1/s}{1+1/p-1/s}} \|x - c_\infty(x)\|_p^{\frac{1-1/s}{1+1/p-1/s}} \|x'\|_s^{1-\frac{1-1/s}{1+1/p-1/s}}. \tag{2.11.3}$$

2. *Пусть* $0 < p < q < \infty,\ s \in [1, \infty)$. *Тогда:*

а) если функция $x \in L^1_s(\mathbf{T})$ *имеет нули, то выполняется неравенство*

$$\|x\|_q \le K(q,p,s)\|x\|_p^{\frac{1+1/q-1/s}{1+1/p-1/s}}\|x'\|_s^{1-\frac{1+1/q-1/s}{1+1/p-1/s}}, \tag{2.11.4}$$

где константы $K(q,p,s)$ *определены в теореме* 2.10.3;

б) для любой функции $x \in L^1_s$ *справедливо неравенство*

$$\|x - c_\infty(x)\|_q \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1+1/q-1/s}{1+1/p-1/s}} K(q,p,s)\|x - c_\infty(x)\|_p^{\frac{1+1/q-1/s}{1+1/p-1/s}}\|x'\|_s^{1-\frac{1+1/q-1/s}{1+1/p-1/s}}. \tag{2.11.5}$$

Докажем точность полученных неравенств. При этом будем использовать четные неотрицательные функции $x_{q,p,s}(t),\ t \in \mathbf{R}$, построенные в теоремах 2.10.1 и 2.10.3.

При $p < s$ функции $x_{q,p,s}$ имеют конечные носители. Выберем $b > 0$ настолько большим, чтобы $\sup x_{q,p,s}(b|t|) \subset [-\pi, \pi]$. Пусть теперь $y_b(t) := x_{q,p,s}(b|t|)$ при $t \in [-\pi, \pi]$ и $y_b(t + 2\pi) = y_b(t)$. Очевидно, что функции y_b обращают (2.11.2) и (2.11.4) в равенства.

Несколько иначе строятся экстремали для (2.11.3) и (2.11.5). Возьмем b таким, чтобы $\sup x_{q,p,s}(b|t|) \subset (-\pi/2, \pi/2)$, и положим

$$z_b(t) = \begin{cases} x_{q,p,s}(b|t|), & \text{если } |t| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -x_{q,p,s}\left(b|t| - \dfrac{\pi}{2}\right), & \text{если } \dfrac{\pi}{2} < |t| \le \pi, \quad z_b(t + 2\pi) = z_b(t). \end{cases}$$

Так как $c_\infty(z_b) = 0$, то легко видеть, что функции z_b – экстремали в (2.11.3) и (2.11.5).

Пусть $p \ge s$. Если $s = 1$, то среди экстремалей в (2.10.1) и (2.10.9) также были функции с конечными носителями.

Пусть $s > 1$. В этом случае функции $x_{q,p,s}$ всюду строго положительны. Значит, сейчас предыдущие рассуждения не годятся, поэтому будем определять экстремальную последовательность функций.

Для $b > 0$ положим $y_b(t) := x_{q,p,s}(b|t|) - x_{q,p,s}(b\pi)$ при $|t| \le \pi$ и $y_b(t + 2\pi) = y_b(t)$.

Напомним, что функции $x_{q,p,s}(t)$ монотонно не возрастают при $t \to \infty$. Далее ограничимся случаем $q \ne \infty$ (при $q = \infty$ аналогичные вычисления даже проще):

$$\|y_b\|_p^p < \int\limits_{-\pi}^{\pi} |x_{q,p,s}(b|t|)|^p dt = b^{-1} \int\limits_{-\pi b}^{\pi b} |x_{q,p,s}(|t|)|^p dt,$$

$$\|y_b'\|_s^s = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |bx_{q,p,s}'(b|t|)|^s dt = b^{s-1} \int\limits_{-\pi b}^{\pi b} |x_{q,p,s}(|t|)|^s dt,$$

$$\|y_b\|_q \ge \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x_{q,p,s}(b|t|)|^q dt \right)^{1/q} - (2\pi)^{1/q} x_{q,p,s}(b\pi) =$$

$$= \left(b^{-1} \int\limits_{-\pi b}^{\pi b} |x_{q,p,s}(|t|)|^q dt \right)^{1/q} - (2\pi)^{1/q} x_{q,p,s}(b\pi).$$

Пусть $\alpha = \dfrac{1 + 1/q - 1/s}{1 + 1/p - 1/s}$. Тогда $-1/q + \alpha/p - (1 - 1/s)(1 - \alpha) = 0$, и поэтому

$$\frac{\|y_b\|_q}{\|y_b\|_p^\alpha \, \|y_b'\|_s^{1-\alpha}} >$$

$$> \frac{b^{-\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{-\pi b}^{\pi b} |x_{q,p,s}(|t|)|^q dt \right)^{1/q} - (2\pi)^{1/q} x_{q,p,s}(b\pi)}{\left(b^{-\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{-\pi b}^{\pi b} |x_{q,p,s}(|t|)|^p dt \right)^{1/p} \right)^{\alpha} \left(b^{1-\frac{1}{s}} \left(\int\limits_{-\pi b}^{\pi b} |x_{q,p,s}(|t|)|^s dt \right)^{1/s} \right)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{\left(\int\limits_{-\pi b}^{\pi b} |x_{q,p,s}(|t|)|^q dt\right)^{1/q} - (2\pi b)^{1/q} x_{q,p,s}(b\pi)}{\left(\int\limits_{-\pi b}^{\pi b} |x_{q,p,s}(|t|)|^p dt\right)^{\alpha/p} \left(\int\limits_{-\pi b}^{\pi b} |x_{q,p,s}(|t|)|^s dt\right)^{\frac{1-\alpha}{s}}}.$$

Так как $x_{q,p,s} \in L_q(\mathbf{R})$, то найдется последовательность $b_k \to \infty$ ($k \to \infty$), такая, что $b_k^{1/q} x_{q,p,s}(b_k\pi) \to 0$. Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших k

$$\frac{\|y_{b_k}\|_q}{\|y_{b_k}\|_p^\alpha \, \|y'_{b_k}\|_s^{1-\alpha}} > \frac{\|x_{q,p,s}\|_{L_q(\mathbf{R})}}{\|x_{q,p,s}\|_{L_p(\mathbf{R})}^\alpha \, \|x'_{q,p,s}\|_{L_s(\mathbf{R})}^{1-\alpha}} - \varepsilon = K(q,p,s) - \varepsilon,$$

и точность неравенства (2.11.4) доказана. Подобным образом доказывается и точность неравенств (2.11.3) и (2.11.5). Соответствующая экстремальная последовательность функций $z_b(t)$ определяется равенствами

$$z_b(t) = \begin{cases} x_{q,p,s}(b|t|) - x_{q,p,s}(b\frac{\pi}{2}), & \text{если } |t| \le \frac{\pi}{2}, \\ -x_{q,p,s}(b|t| - \frac{\pi}{2}) - x_{q,p,s}(b\frac{\pi}{2}), & \text{если } \frac{\pi}{2} < |t| \le \pi, \end{cases}$$

$$z_b(t + 2\pi) = z_b(t).$$

Комментарии к главе 2

К 1938 г. был известен только один случай полного решения задачи о точной константе в неравенствах для производных – неравенство Харди–Литлвуда–Полиа для L_2-норм производных функций, заданных на всей числовой оси или окружности (см. гл. 1). Для точной константы в неравенстве с равномерными нормами были известны только достаточно грубые оценки Горни [151–154] (появившиеся, кстати сказать, в 1938 году). Были также известны частные результаты Э. Ландау (см. гл. 1) и Г.Е. Шилова [357] – сокурсника А.Н. Колмогорова, который дал решение задачи о точной константе,

поставленной перед ним А.Н. Колмогоровым, при $r = 3$, 4 и любом $k < r$, а также при $r = 5$ и $k = 2$. Кроме того, Г.Е. Шилов сформулировал, как оказалось, верную гипотезу об экстремальных функциях в данной задаче (гипотеза состояла в том, что таковыми будут идеальные сплайны Эйлера), однако до конца он решить задачу не смог. В результате А.Н. Колмогоров сам увлекся этой задачей и дал ее полное решение.

Этот результат А.Н. Колмогорова и поныне остается одним из наиболее ярких в данной проблематике. И дело не только в том, что Колмогоров вывел замечательное неравенство. Для его доказательства он взял так называемую теорему сравнения производных, которая оказалась очень мощным средством исследования многих других экстремальных задач анализа и, в частности, теории приближений. Кроме того, Колмогоров дал (в случае $j = 2$) полное решение сформулированной им еще в 1926 г. задачи о необходимых и достаточных условиях, которым должна удовлетворять система положительных чисел $M_0, M_{k_1}, ..., M_{k_j}$ для того, чтобы нашлась заданная на всей числовой оси функция, имеющая эти числа верхними гранями модулей производных соответствующих порядков.

Основное содержание данной главы как раз и связано с неравенством Колмогорова (§ 2.3), его теоремой сравнения производных (§ 2.2) и задачей Колмогорова (§ 2.4). В § 2.5 и § 2.7 приведены два отличных от колмогоровского доказательства неравенства Колмогорова. Каждое из них является по-своему интересным. Первое, принадлежащее Т. Бангу [100] (изложение его можно найти также в [253] и [210, § 2.4]), было найдено им в 1941 г. и является довольно элементарным. Впоследствии это доказательство через много лет было переоткрыто А. Кавареттой [173]. Приведенное в § 2.7 доказательство Лигуна [236] (см. также [240]) позволяет доказать сразу и неравенство Колмогорова и неравенство Стейна (о неравенстве Стейна речь ниже). Кроме того, близкие к использованному в этом доказательстве методы позволили решить и ряд других экстремальных задач теории приближений.

Неравенство Колмогорова и его теорема сравнения производных обобщались в различных направлениях. О “несимметричных” обоб-

щениях, принадлежащих Л. Хермандеру [328], речь идет в § 2.8 и 2.9. Отметим, что эти "несимметричные" обобщения оказались полезными, в частности, для исследования задач наилучшего одностороннего приближения (см., например, [214]), а также задач приближения в пространствах с несимметричными нормами (см., например, [211]).

С неравенством Колмогорова тесно связано неравенство Е.М. Стейна (§ 2.6). Стейн [294] показал, что из неравенства Колмогорова для равномерных норм производных функций, заданных на числовой прямой, можно вывести неравенство для любой L_p-нормы (с той же константой, что и для равномерных норм). Неравенство Стейна при этом останется неулучшаемым в случае L_1-норм. Сам Стейн по поводу точности своего неравенства в случае L_1-норм ничего не пишет. Однако, насколько нам известно, на уровне математического фольклора это обстоятельство было известно многим математикам. Из публикаций по этому поводу отметим работу З. Дициана [163]. Метод, использованный Стейном, также оказался очень полезным. В частности, с его помощью можно совсем просто доказать неравенства Зигмунда (см. [171, т. 2, с. 21]) (см. § 8.1) и Лоренца (см. [244]) для тригонометрических полиномов. Также с его помощью были доказаны некоторые неравенства типа Бернштейна для сплайнов (см., например, [300, 90], по поводу обобщений и других приложений метода Стейна см. [211, 89, 91]).

В конце данной главы (§ 2.10) излагаем неравенство Б. Надя [266], а также (§ 2.11) его аналог для периодических функций. Появившийся в 1941 г. этот результат (относящийся к случаю $k = 0, r = 1$) является первым (и пока единственным) результатом, общим в том смысле, что при фиксированных k, r точное неравенство установлено для всех допустимых значений параметров q, p, s, определяющих нормы функции и ее производных.

Дополнительные результаты к главе 2

1. В.Н. Коновалов [203] дал решение следующей задачи:

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \to \sup; \quad \left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le 1, \quad \|x\|_{S_\varepsilon} \le \delta,$$

где $\|x\|_{S_\varepsilon} = \sup_{k\in\mathbf{Z}} |x(k\varepsilon)|$.

Пусть $L^r(S_\varepsilon, \mathbf{R})$ – множество функций $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$, таких, что $\|x\|_{S_\varepsilon} < \infty$.

В [203] для функций $x \in L^r(S_\varepsilon, \mathbf{R})$ доказано неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le C_r \inf_{\delta \ge \varepsilon} \left(\delta^{-k} \|x\|_{S_\varepsilon} + \delta^{r-k} \left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})}\right),$$

где C_r зависит только от r.

2. В ряде работ неравенства Колмогорова обобщаются на случай более общих по сравнению с d^k/dt^k дифференциальных операторов.

3. С.Б. Стечкин [296] (см. также [298, с. 224–229]) перенес неравенства Колмогорова на абстрактные функции. Точнее, пусть K есть линейное нормированное пространство функций $x(t)$, заданных на $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$ и принимающих значения в некотором (действительном или комплексном) банаховом пространстве X. Норму в K определим, положив

$$\|x\| = \sup_{t \in G} \|x(t)\|_X.$$

Ниже, если в некотором неравенстве фигурирует $x^{(r)}$, то предполагается, что для $x(t)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом r-го порядка в интегральной форме.

С.Б. Стечкиным доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть для любого* τ $\|x(t+\tau)\|_X = \|x(t)\|_X$, *если* $G = \mathbf{R}$, *или для любого* $h \ge 0$ $\|x(t+h)\|_X \le \|x(t)\|_X$, *если* $G = \mathbf{R}_+$. *Тогда*

$$\left\|x^{(k)}\right\| \le C_{r,k} \left\|x^{(k)}\right\|^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|^{k/r}, \quad 1 \le k \le r-1.$$

При этом можно положить

$$C_{r,k} = (k+1)\left(\frac{r-1}{k}\right)^{k \ln r} \le r^{r-k}.$$

Отметим, что для того чтобы получить из этой теоремы неравенство для производных функций, принимающих вещественные или

комплексные значения, следует в качестве X взять пространство функций, постоянных на G.

Использованный С.Б. Стечкиным метод доказательства основан на следующих фактах и соображениях.

Лемма 1. *Пусть* $A > 0$, $B > 0$,

$$C = r\left(\frac{A}{r-k}\right)^{1-k/r}\left(\frac{B}{k}\right)^{k/r}.$$

Тогда утверждения

$$\left\|x^{(k)}\right\| \le Ah^{-k}\|x\| + Bh^{r-k}\left\|x^{(r)}\right\| \quad \forall h > 0$$

и

$$\left\|x^{(k)}\right\| \le C\|x\|^{1-k/r}\left\|x^{(r)}\right\|^{k/r}$$

эквивалентны.

Пусть, далее, $h > 0$ и линейный оператор $S_h(x)$, отображающий K в K, обладает следующими свойствами:

$$\|S_h(x)\| \le Ah^{-k}\|x\|,$$

$$\left\|x^{(k)} - S_h(x)\right\| \le Bh^{r-k}\left\|x^{(r)}\right\|.$$

Тогда

$$\left\|x^{(k)}\right\| \le \|S_h(x)\| + \left\|x^{(k)} - S_h(x)\right\| \le Ah^{-k}\|x\| + Bh^{r-k}\left\|x^{(r)}\right\|.$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно надлежащим образом выбрать оператор $S_h(x)$.

Выбирая ($h > 0$)

$$S_h(x) =$$

$$= S_h(x,t) = h^{-r+1}\int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h x^{(r-1)}(t + t_1 + \ldots t_{r-1})dt_1 \ldots dt_{r-1},$$

С.Б. Стечкин устанавливает, что справедлива такая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $G = \mathbf{R}_+$ *и для любого* $h > 0$ $\|x(t+h)\|_X \leq$ $\leq \|x(t)\|_X$. *Тогда*

$$\left\|x^{(r-1)}\right\| \leq \left(\frac{2}{h}\right)^{r-1} \|x\| + (r-1)\frac{h}{2}\left\|x^{(r)}\right\| \quad (r = 2, 3, ...),$$

или, что эквивалентно ввиду леммы 1,

$$\left\|x^{(r-1)}\right\| \leq C\,\|x\|^{1/r}\left\|x^{(r)}\right\|^{1-1/r}.$$

Эта лемма остается справедливой и в том случае, когда $G = \mathbf{R}$ и для всех τ $\|x(t+\tau)\|_X = \|x(t)\|_X$.

Теперь для завершения доказательства теоремы остается провести индукцию.

Лемма 3. *Пусть* $M_k \geq 0$ *и*

$$M_{r-1} \leq C_r M_0^{1/r} M_r^{1-1/r} \quad (r = 2, 3, ...).$$

Тогда

$$M_k \leq C_{r,k} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r} \quad (k = 1, ..., r-1, \;\; r = 2, 3, ...),$$

где $C_{r,k}^{1/k} \leq \prod\limits_{p=k}^{r-1} C_{p+1}^{1/p}$.

4. В работе [220] для функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ получено следующее усиление неравенства Колмогорова:

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} |||x|||_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}, \quad k, r \in \mathbf{N}, \;\; k < r,$$

где

$$|||x|||_\infty := \sup\left\{E_0(x)_{L_\infty[a,b]} \;:\; x'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in (a,b), \;\; a, b \in \mathbf{R}\right\}.$$

Ясно, что $|||x|||_\infty \leq \|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}$. При этом нетрудно привести примеры функций $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ (и даже бесконечно дифференцируемых функций), для которых отношение $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}/|||x|||_\infty$ больше любого наперед заданного положительного числа.

В работе [220] также получено усиление теоремы сравнения Колмогорова.

Для $r \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$ положим $\phi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t + a_r)$, где константа a_r выбрана таким образом, чтобы сплайн $\phi_{\lambda,r}(t)$ возрастал на промежутке $[-\pi/2\lambda, \pi/2\lambda]$.

Теорема [220]. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $x \in W^r_\infty(\mathbf{R})$ и число λ выбрано из условия*

$$|||x|||_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty.$$

Пусть далее $[a,b]$ – промежуток монотонности функции x, такой, что $x'(t) \neq 0 \ \ \forall t \in (a,b);\ \ x'(a) = x'(b) = 0$.

Тогда если для точки $t \in [a,b]$ точка $y \in [-\pi/2\lambda, \pi/2\lambda]$ выбрана так, что

$$|x(b) - x(t)| = |\phi_{\lambda,r}(\pi/2\lambda) - \phi_{\lambda,r}(y)|$$

или же так, что

$$|x(t) - x(a)| = |\phi_{\lambda,r}(y) - \phi_{\lambda,r}(-\pi/2\lambda)|,$$

то

$$|x'(t)| \leq |\phi'_{\lambda,r}(y)|.$$

5. В работе [335] доказано, что для любой функции $x \in L^r_\infty[-1,1]$ и для любого $n \in \mathbf{N}$

$$\|x\|_{L_\infty[-1+\delta,1-\delta]} \leq \frac{|\sigma^{(k)}_{n,r}(0)|}{\|\sigma_{n,r}\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|^{1-k/r}_{L_\infty[-1,1]} \|x^{(r)}\|^{k/r}_{L_\infty[-1,1]}, \tag{Д.2.1}$$

где $\sigma_{n,r}$ – идеальный сплайн порядка r с n узлами (см. (3.3.2)), имеющий на отрезке $[-1,1]$ минимальную L_∞-норму среди всех идеальных сплайнов такого вида, а

$$\delta := \left(\frac{\|x\|_{L_\infty[-1,1]}}{\|\sigma_{n,r}\|_\infty \cdot \|x^{(r)}\|_{L_\infty[-1,1]}} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Используя оценку (Д.2.1), В.Чен [335] предельным переходом (при $n \to \infty$) получил новое доказательство неравенства Колмогорова.

6. В работе [216] для функций $x \in L^r_\infty[-1,1]$, $r \in \mathbf{N}$, и для любого $n \in \mathbf{N}$ получен следующий аналог неравенства (Д.2.1):

$$\|x^{(k)}_\pm\|_{L_\infty[-1+\delta_\pm,1-\delta_\pm]} \le$$

$$\le \frac{(\sigma^\pm_{n,r})^{(k)}_\pm(0, \|x^{(r)}_+\|_{L_\infty[-1,1]}, \|x^{(r)}_-\|_{L_\infty[-1,1]})}{E_0(\sigma^\pm_{n,r}(\cdot, \|x^{(r)}_+\|_{L_\infty[-1,1]}, \|x^{(r)}_-\|_{L_\infty[-1,1]}))^{1-k/r}_{L_\infty[-1,1]}} E_0(x)^{1-\frac{k}{r}}_{L_\infty[-1,1]} \tag{Д.2.2}$$

в случае, когда $r+k$ четно, где $\sigma^\pm_{n,r}$ – несимметричный идеальный сплайн, наименее уклоняющийся от нуля (см. теорему 3.3.1), а

$$\delta_\pm = \delta_\pm(x) :=$$

$$:= \left(\frac{E_0(x)_{L_\infty[-1,1]}}{E_0(\sigma^\pm_{n,r}(\cdot, \|x^{(r)}_+\|_{L_\infty[-1,1]}, \|x^{(r)}_-\|_{L_\infty[-1,1]}))_{L_\infty[-1,1]}} \right)^{1/r}.$$

В этой же работе с помощью оценки (Д.2.2) предельным переходом (при $n \to \infty$) получено новое доказательство неравенства Хермандера (2.9.1) в случае, когда $r+k$ четно.

7. Пусть $L_\infty(\mathbf{R}^2)$ – пространство функций, существенно ограниченных на всей плоскости $\mathbf{R}^2$ переменных (t,s), с нормой

$$\|x\|_\infty := \operatorname{vrai\,sup}\{|x(t,s)| : \ (t,s) \in \mathbf{R}^2\},$$

а $L_p(\mathbf{R}^2)$, $1 \le p < \infty$, – пространство функций, суммируемых на $\mathbf{R}^2$ в p-й степени, с нормой

$$\|x\|_p := \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t,s)|^p dt ds \right\}^{1/p}.$$

Если r_1 и r_2 – неотрицательные целые числа, то полагаем

$$x^{(r_1,r_2)}(t,s) := \frac{\partial^{r_1+r_2} x}{\partial t^{r_1} \partial s^{r_2}}(t,s)$$

(производные понимаются в смысле Соболева), и $L_p^{r_1,r_2}(\mathbf{R}^2)$, $1 \le p \le \infty$ обозначим пространство функций $x \in L_p(\mathbf{R}^2)$, таких, что $x^{(r_1,r_2)} \in L_p(\mathbf{R}^2)$. Кроме того, полагаем $W_p^{r_1,r_2}(\mathbf{R}^2) :=$ $:= \{x \in L_p^{r_1,r_2}(\mathbf{R}^2) : \ \|x^{(r_1,r_2)}(t,s)\|_\infty \le 1\}$.

Коноваловым в работе [202] доказано, что для функций $x \in L_\infty^{3,0}(\mathbf{R}^2) \cap L_\infty^{0,3}(\mathbf{R}^2)$ выполняется следующее неравенство:

$$\|x^{(1,1)}\|_\infty \le (3\|x\|_\infty \|x^{(3,0)}\|_\infty \|x^{(0,3)}\|_\infty)^{1/3}, \qquad (\text{Д}.2.3)$$

причем неравенство (Д.2.3) неулучшаемо и экстремальной функцией в нем является функция $\varphi_3(t+s)$, где φ_r – эйлеров совершенный сплайн порядка r, т.е. r-й периодический интеграл от функции $\varphi_0(t) := \operatorname{sgn} \sin t$.

Тимошин в работе [314] дал простое доказательство неравенства (Д.2.3), основанное на явно выписанной наилучшей формуле приближенного дифференцирования.

8. В работе [316] Тимошин доказал, что для функций $x \in L_\infty^{3,0}(\mathbf{R}^2) \cap L_\infty^{0,2}(\mathbf{R}^2)$ выполняется следующее неулучшаемое неравенство:

$$\|x^{(1,1)}\|_\infty \le 3^{2/3} 2^{1/2} \|x\|_\infty^{1/6} \|x^{(3,0)}\|_\infty^{1/3} \|x^{(0,2)}\|_\infty^{1/2}. \qquad (\text{Д}.2.4)$$

Интересно отметить, что экстремальная функция в неравенстве (Д.2.4) устроена довольно сложно и существенно отличается от экстремальной функции в неравенстве (Д.2.3) в связи с тем, что порядки производных по первой и второй переменной в правой части неравенства различны.

9. В.Ф. Бабенко в работе [42] доказал, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для любой функции* $x \in L_\infty^{2,1}(\mathbf{R}^2) \cap L_\infty^{1,2}(\mathbf{R}^2)$ *выполняется неулучшаемое неравенство*

$$\|x^{(1,1)}\|_\infty \le 3/2^{2/3} (\|x\|_\infty \|x^{(2,1)}\|_\infty \|x^{(1,2)}\|_\infty)^{1/3}. \qquad (\text{Д}.2.5)$$

Отметим, что и в этом случае экстремальная функция существенно отличается от экстремальной функции в неравенстве (Д.2.3).

Используя метод Стейна (см. § 2.6), из неравенства (Д.2.5) нетрудно вывести, что при любом $p \in [1, \infty)$ для любой функции $x \in L_p^{2,1}(\mathbf{R}^2) \cap L_p^{1,2}(\mathbf{R}^2)$ также выполняется неравенство

$$\|x^{(1,1)}\|_p \le 3/2^{2/3}(\|x\|_p \|x^{(2,1)}\|_p \|x^{(1,2)}\|_p)^{1/3}.$$

10. В [117] получены следующие утверждения, которые уточняют и дополняют результаты Коновалова (см. п. 1).

Если $\epsilon > 0$ и S_ϵ – некоторая равномерная сетка на $\mathbf{R}$ с шагом ϵ, то для $x \in L_\infty(\mathbf{R})$ положим

$$\|x\|_{S_\epsilon} = \sup_{t \in S_\epsilon} |x(t)|.$$

Пусть далее $\phi_{\lambda,r}(t) = \varphi_{\lambda,r}(t + (1 + (-1)^r)\pi/(4\lambda))$. Вместо $\phi_{1,r}(t)$ будем писать $\phi_r(t)$.

Теорема 1. *Если $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ и число $\lambda > 0$ выбрано из условия*

$$\lambda^{-r}\phi_r(\lambda\epsilon/2) = \frac{\|x\|_{S_\epsilon}}{\|x^{(r)}\|_\infty}, \tag{Д.2.6}$$

то для любого $k = 0, 1, ..., r-1$

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \lambda^{-(r-k)}\|\phi_{r-k}\|_\infty \|x^{(r)}\|_\infty, \tag{Д.2.7}$$

или, что эквивалентно,

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \frac{\|\phi_{r-k}\|_\infty}{\phi_r(\lambda\epsilon/2)^{1-k/r}} \|x\|_{S_\epsilon}{}^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_\infty{}^{k/r}. \tag{Д.2.8}$$

При этом для любого $m = 2, 3, ...$ во множестве функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, таких, что (Д.2.6) *имеет место с $\lambda = \pi/(m\epsilon)$, найдется функция $(x(t) = \phi_{\lambda,r}(t))$, обращающая* (Д.2.7) *и* (Д.2.8) *в равенства.*

Для $x \in (0, \pi/2)$ положим $\psi_r(t) = x^{-r}\phi_r(t)$.

Теорема 2. *Для любой функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ при всех $k = 0, 1, ..., r-1$ справедливо неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{r-k} \psi_r^{-1}\left(\left(\frac{2}{\epsilon}\right)^r \frac{\|x\|_{S_\epsilon}}{\|x^{(r)}\|_\infty}\right)^{-(r-k)} \|\phi_{r-k}\|_\infty \|x^{(r)}\|_\infty,$$

которое обращается в равенство для любой функции вида $x(t) = \phi_{\lambda,r}(t)$, *где* $\lambda = \pi/(m\epsilon)$.

Для $2\pi/\lambda$-периодической функции $\varphi_{\lambda,r}(\cdot,\alpha,\beta)$ и произвольного фиксированного $\epsilon \in [0,\pi/\lambda)$ обозначим $t_{\lambda,\max}$ и $t_{\lambda,\min}$ ее точки соответственно максимума и минимума, принадлежащие отрезку $[0,2\pi/\lambda)$. Далее, пусть $t'_{\lambda,\max} < t''_{\lambda,\max}$ (соответственно $t'_{\lambda,\min} < t''_{\lambda,\min}$) такие точки из окрестности $t_{\lambda,\max}$ (соответственно $t_{\lambda,\min}$), что $t''_{\lambda,\max} - t'_{\lambda,\max} = \epsilon$ и $\varphi_{\lambda,r}(t'_{\lambda,\max},\alpha,\beta) = \varphi_{\lambda,r}(t''_{\lambda,\max},\alpha,\beta)$ (соответственно $t''_{\lambda,\min} - t'_{\lambda,\min} = \epsilon$ и $\varphi_{\lambda,r}(t'_{\lambda,\min},\alpha,\beta) = \varphi_{\lambda,r}(t''_{\lambda,\min},\alpha,\beta)$). Положим

$$\varphi^*_{\lambda,r}(\epsilon,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\varphi_{\lambda,r}(t'_{\lambda,\max},\alpha,\beta) - \varphi_{\lambda,r}(t'_{\lambda,\min},\alpha,\beta)).$$

Теорема 3. *Если* $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ *и число* λ *выбрано из условия*

$$\varphi^*_{\lambda,r}(\epsilon, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty) = E_0(x)_{S_\epsilon}, \qquad (\text{Д}.2.9)$$

то

$$E_0(x)_\infty \le E_0(\varphi_{\lambda,r}(\cdot, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty))_\infty, \qquad (\text{Д}.2.10)$$

и для всех $k = 1,2,\dots,n-1$

$$\|x^{(k)}_\pm\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)\pm\|_\infty. \qquad (\text{Д}.2.11)$$

Если при данных значениях $E_0(x)_{S_\epsilon}$, $\|x^{(r)}_+\|_\infty$, $\|x^{(r)}_-\|_\infty$ *число* λ *таково, что* $|t'_{\lambda,\max} - t'_{\lambda,\min}| = l\epsilon$ *и* $2\pi/\lambda = m\epsilon$ *с некоторыми* $l,m \in \mathbf{N}$, *то неравенства* (Д.2.10) *и* (Д.2.11) *обращаются в равенства для функции* $g(t) = \varphi_{\lambda,r}(t, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)$, *для которой в силу* (Д.2.9) $E_0(g)_{S_\epsilon} = E_0(x)_{S_\epsilon} = \varphi^*_{\lambda,r}(\epsilon, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)$, *а в силу ее определения* $\|g^{(r)}_\pm\|_\infty = \|x^{(r)}_\pm\|_\infty$.

Положим для заданных $\alpha,\beta > 0$ и $t \in (0,\pi)$ $\psi_r(t,\alpha,\beta) = t^{-r}\varphi^*_r(t,\alpha,\beta)$.

Теорема 4. *Для любой функции* $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ *при* $k = 1,2,\dots,r-1$

$$\|x^{(k)}_\pm\|_\infty \le \epsilon^{r-k}\frac{\|\varphi_{r-k}(\cdot, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)\pm\|_\infty}{\psi_r^{-1}(\epsilon^{-r}E_0(x)_{S_\epsilon}, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)^{r-k}}. \qquad (\text{Д}.2.12)$$

Если при заданных значениях $E_0(x)_{S_\epsilon}$, $\|x_+^{(r)}\|_\infty$, $\|x_-^{(r)}\|_\infty$ *выбранное из условия* (Д.2.9) *число* λ *будет таким, что* $|t'_{\lambda,\max} - t'_{\lambda,\min}| = l\epsilon$ *и* $2\pi/\lambda = m\epsilon$ *с некоторыми* $l, m \in \mathbf{N}$, *то неравенство* (Д.2.12) *обратится в равенство для функции* $g(t) = \varphi_{\lambda,r}(t, \|x_+^{(r)}\|_\infty, \|x_-^{(r)}\|_\infty)$.

11. Во многих задачах анализа важную роль играют операторы Λ, не увеличивающие осцилляцию, т.е. такие, что для любой функции x из области определения число перемен знака у Λx не превосходит числа перемен знака у x. Среди этих операторов особое место занимают операторы типа свертки

$$(\Lambda x)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t-u)x(u)du.$$

При этом функция $\Lambda(\cdot)$ называется функцией плотности, если $\Lambda(\cdot) \in L_1(\mathbf{R})$ неотрицательна и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t)dt = 1$. Определения и свойства функций плотности, не увеличивающих осцилляцию, приведены в [256, 348]. Там же описаны все операторы типа свертки, не увеличивающие осцилляцию, и установлена их связь с целыми функциями класса Лагерра–Пойя и с вполне положительными функциями плотности. Ниже будем предполагать [256], что $\Lambda(\cdot)$ имеет ограниченную вариацию на любом конечном отрезке и удовлетворяет условию

$$\Lambda(t) = \frac{1}{2}(\Lambda(t+0) + \Lambda(t-0)) \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Теорема [267]. *Пусть* Λ_1 *и* Λ_2 *– операторы типа свертки, не увеличивающие осцилляцию. Тогда:*

1) *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *найдется число* $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, *такое, что*

$$\|\Lambda_2 \circ \Lambda_1 \varphi_{0,\lambda}\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = \varepsilon;$$

2) *для любой функкции* $x \in L_\infty(\mathbf{R})$, *такой, что*

$$\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le 1, \quad \|\Lambda_2 \circ \Lambda_1 x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$\|\Lambda_1 x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \|\Lambda_1 \varphi_{0,\lambda}\|_{L_\infty(\mathbf{R})}.$$

12. Для функции $\varphi_{1;\alpha,\beta}(t)$ будем использовать обозначение $\varphi_b(t;\alpha,\beta)$. Для $b > 0$ положим $\varphi_b(t;\alpha,\beta) = \varphi_1(bt;\alpha,\beta)$. Пусть $\mathcal{P}$ – алгебраический полином r-й степени, все корни которого вещественны, а Q – алгебраический полином k-й степени $(k < r)$, являющийся делителем полинома $\mathcal{P}$, так что $\mathcal{P}/Q$ – полином степени $r-k$. Будем также предполагать, что $\mathcal{P}(0) = Q(0) = 0$. Результат применения дифференциального оператора $\mathcal{P}\,(d/dt)$ к функции x будем записывать коротко так: $\mathcal{P}x$; $\mathcal{P}x_\pm$ будет обозначать $(\mathcal{P}x)_\pm$.

Обозначим $\varphi_{b,\mathcal{P}}(t;\alpha,\beta)$ – решения уравнения

$$\mathcal{P}x = \varphi_b(\cdot;\alpha,\beta),$$

имеющего период $2\pi/b$ и нулевое среднее значение на периоде.

Пусть

$$\Phi_{\mathcal{P}}(b;\alpha,\beta) = E(\varphi_{b,\mathcal{P}}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty = E(\varphi_{b,\mathcal{P}}(b^{-1}(\cdot);\alpha,\beta))_\infty,$$

где $E(x)_\infty$ – наилучшее равномерное приближение функций x константой;

$$\Phi^\pm_{\mathcal{P}}(b;\alpha,\beta) = \|\varphi_{b,\mathcal{P}}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty = \|\varphi_{b,\mathcal{P}}(b^{-1}(\cdot);\alpha,\beta)_\pm\|_\infty.$$

Вместо $\Phi_{\mathcal{P}}(b;1,1)$ (соответственно $\Phi^\pm_{\mathcal{P}}(b;1,1)$) будем писать $\Phi_{\mathcal{P}}(b)$ (соответственно $\Phi^\pm_{\mathcal{P}}(b)$).

При фиксированных α и β функции $\Phi_{\mathcal{P}}(b;\alpha,\beta)$ и $\Phi^\pm_{\mathcal{P}}(b;\alpha,\beta)$ непрерывны по b и строго убывают с ростом b от $+\infty$ до 0. Поэтому в $(0,\infty)$ определены обратные функции $\Psi_{\mathcal{P}}(y;\alpha,\beta)$ и $\Psi^\pm_{\mathcal{P}}(y;\alpha,\beta)$ соответственно, также строго убывающие с ростом y и непрерывные по y. Пусть еще $\Psi_{\mathcal{P}}(y) = \Psi_{\mathcal{P}}(y;1,1)$ и $\Psi^\pm_{\mathcal{P}}(y) = \Psi^\pm_{\mathcal{P}}(y;1,1)$. Положим $\Theta^\pm_{\mathcal{P},Q}(\cdot;\alpha,\beta) = \Phi^\pm_{\mathcal{P}/Q}(\cdot;\alpha,\beta) \circ \Psi_{\mathcal{P}}(\cdot;\alpha,\beta)$ и $\Theta_{\mathcal{P},Q}(t) = (\Psi_{\mathcal{P}/Q} \circ \Psi_{\mathcal{P}})(t)$.

Теорема (см., например, [267, 32]). *Пусть* $x \in L^r_\infty$ $(r = 2, 3, ...)$. *Тогда для любых* $\alpha \geq \|\mathcal{P}x_+\|_\infty$ *и* $\beta \geq \|\mathcal{P}x_-\|_\infty$

$$\Psi^{\pm}_{\mathcal{P}/Q}(\|Qx_\pm\|_\infty; \alpha, \beta) \geq \Psi_{\mathcal{P}}(E(x)_\infty; \alpha, \beta) \qquad (\text{Д}.2.13)$$

или, что эквивалентно,

$$\|Qx_\pm\|_\infty \leq \Theta^{\pm}_{\mathcal{P},Q}(E(x)_\infty; \alpha, \beta).$$

Полагая в (Д.2.13) $\alpha = \beta = \|\mathcal{P}x\|_\infty$ и учитывая, что

$$\Theta^{+}_{\mathcal{P},Q}(t; \alpha, \alpha) = \Theta^{-}_{\mathcal{P},Q}(t, \alpha, \alpha) = \alpha\Theta_{\mathcal{P},Q}\left(\frac{t}{\alpha}\right),$$

получаем такое следствие.

Следствие. *Для любой функции* $x \in L^r_\infty$

$$\|Qx\|_\infty \leq \Theta_{\mathcal{P},Q}\left(\frac{E(x)_\infty}{\|\mathcal{P}x\|_\infty}\right)\|\mathcal{P}x\|_\infty.$$

Это – обобщение неравенства Колмогорова (2.3.1) на случай рассматриваемых дифференциальных операторов.

Аналогично из (Д.2.13) получается обобщение неравенства Хермандера (2.9.1).

13. Пусть $s \in [0, 1]$ фиксировано. Пусть также $u \in [0, \pi]$ – решение уравнения

$$s = \frac{4\cos\frac{1}{2}u}{3 + \cos u}.$$

Тогда (Шенберг [352]), если комплекснозначная функция x такова, что

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad s \leq |x(t)| \leq 1 \quad \text{и} \quad \|x''\| \leq \frac{16\sin^2\frac{1}{2}u}{3 + \cos u},$$

выполняется следующая неулучшаемая оценка:

$$\|x'\| \leq \frac{8\sin\frac{1}{2}u}{3 + \cos u}.$$

14. Пусть S – замкнутое связное множество в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$, $(\mathcal{S}) = \{x(\cdot) : x(t) \in S \ \forall t,\ x(t) \neq \mathrm{const}\}$, где $x \in C^1(\mathbf{R},\ \mathbf{R}^d)$ и $x''(t)$ – кусочно непрерывна и имеет разрывы только первого рода. Рассмотрим функционал

$$F(x) = \frac{\|x'\|}{\sqrt{\|x''\|}},$$

где $\|\cdot\|$ – sup-норма. Задача Ландау для множества S состоит в том, чтобы найти константу Ландау этого множества, т.е. величину

$$L(S) = \sup_{x \in (\mathcal{S})} F(x).$$

Шенберг [354] показал, что для любого замкнутого, ограниченного и выпуклого множества S

$$L(S) = (\mathrm{diam} S)^{1/2}.$$

Если S – шаровой слой $b \leq (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^{1/2} \leq a,\ 0 < b < a$, то

$$L(S) = (a + (a^2 - b^2)^{1/2})^{1/2}.$$

15. Пусть $x(t)$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbf{I} = [0, 1]$ с кусочно-непрерывно дифференцируемой производной $x'(t)$, $\|\cdot\|_{\mathbf{I}}$ – sup-норма. Шарма и Цимбаларио [346] доказали следующие неулучшаемые неравенства. Если $\|x\|_{\mathbf{I}} \leq 1$, $\|x'' - \lambda^2 x\|_{\mathbf{I}} \leq A$ $(\lambda > 0)$, то

$$\|x' \pm \lambda x\|_{\mathbf{I}} \leq \lambda + \lambda \coth \frac{\lambda}{2} + \frac{A}{\lambda} \tanh \frac{\lambda}{2},$$

при условии $0 \leq A \leq \lambda^2 \coth^2 \dfrac{\lambda}{2}$, и

$$\|x' \pm \lambda x\|_{\mathbf{I}} \leq \lambda + 2\sqrt{A}$$

при условии $\lambda^2 \coth^2 \dfrac{\lambda}{2} < A$.

16. В работе [147] установлено (без точных констант) существование неравенства Колмогорова в случае дробных k и r.

Глава

3

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАВНОМЕРНЫХ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ НА ПОЛУОСИ

В данной главе исследуется та же задача, что и в предыдущей: поиск точных оценок для производных в равномерной метрике. Однако область определения функций теперь иная – полуось $\mathbf{R}_+$. Это сказывается на виде экстремальных функций: наличие границы $t = 0$ частично "лишает" экстремали свойств симметрии; их поведение различно в малой правой окрестности точки $t = 0$ и для больших значений аргументов.

Поэтому, естественно, случай полуоси является технически более сложным (по сравнению с задачами гл. 2). Однако идейная часть доказательств точных неравенств остается прежней.

Первые два параграфа посвящены случаю функций малой гладкости $r \leq 3$, причем в § 3.1 реализована идея сравнения с экстремалью, а в § 3.2 – идея промежуточного приближения. Далее, в § 3.3, 3.4 идею сравнения удается реализовать для произвольных r и $k < r$.

Напомним, что в случае $r = 2$ и $k = 1$ точное неравенство для производной было доказано Э. Ландау (см. § 1.2).

3.1. Неравенство Маторина

Пусть $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L_\infty(\mathbf{R}_+)}$. А.П. Маторин [255] доказал следующую теорему.

Теорема 3.1.1. *Пусть $k, r \in \mathbf{N},\ k < r$. Для произвольной функ-*

ции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ *выполняется неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \frac{T_r^{(k)}(1)}{\left[T_r^{(r)}(1)\right]^{k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}, \tag{3.1.1}$$

где $T_r(t) := \cos r \arccos t$ *– полином Чебышева 1-го рода.*

При $r = 2$ *и* $r = 3$ *неравенство* (3.1.1) *точное.*

Для констант

$$c_{r,k} := \frac{T_r^{(k)}(1)}{\left[T_r^{(r)}(1)\right]^{k/r}}$$

справедливы равенства: $c_{2,1} = 2$, $c_{3,1} = 3^{5/3}/2$, $c_{3,2} = 2 \cdot 3^{1/3}$.

Замечания.

1. При $r > 3$ неравенство (3.1.1) перестает быть точным (см. § 3.3).

2. Справедливо равенство

$$\frac{T_r^{(k)}(1)}{\left[T_r^{(r)}(1)\right]^{k/r}} = \frac{r^2(r^2-1^2)(r^2-2^2)...[r^2-(k-1)^2][(2r-1)!!]^{k/r}}{\{r^2(r^2-1^2)(r^2-2^2)...[r^2-(r-1)^2]\}^{k/r}(2k-1)!!}. \tag{3.1.2}$$

Для доказательства теоремы Маторина нам потребуются следующие свойства полиномов Чебышева:

1) на отрезке $[-1, 1]$ $T_r(t)$ имеет r нулей и $r + 1$ экстремумов, равных ± 1; $T_r^{(k)}(t)$ имеет $r - k$ нулей и $r - k + 1$ экстремумов; $T_r^{(r)}(t)$ – величина постоянная;

2) $T_r(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$(1 - t^2)T_r''(t) - tT_r'(t) + r^2 T_r(t) = 0;$$

дифференцируя это уравнение $k - 1$ раз, получаем

$$(1 - t^2)T_r^{(k+1)}(t) - (2k - 1)tT_r^{(k)}(t) + [r^2 - (k - 1)^2]T_r^{(k-1)}(t) = 0,$$

$$k = 1, 2, ..., r;$$

полагая в полученных соотношениях $t = 1$, находим

$$T_r^{(k)}(1) = \frac{r^2(r^2-1^2)(r^2-2^2)...[r^2-(k-1)^2]}{(2k-1)!!}, \quad k = 1, 2, ..., r, \tag{3.1.3}$$

откуда следует (3.1.2), и после элементарных преобразований имеем

$$T_r^{(r)}(1) = 2^{r-1} r! \; ; \tag{3.1.4}$$

3) $T_r^{(k)}(1),\ k = 1, 2, ..., r,$ – наибольшее значение модуля $T_r^{(k)}(t)$ на отрезке $[-1, 1]$; действительно, полагая $\theta = \arccos t$ в формуле $T_r(t) = \cos r \arccos t$, имеем

$$T_r(t) = \cos r\theta, \quad t = \cos\theta,$$

$$T_r'(t) = r\frac{\sin r\theta}{\sin\theta} = 2r[\cos(r-1)\theta + \cos(r-3)\theta + ...],$$

отсюда, дифференцируя, получаем

$$T_r^{(k)}(t) = \sum_{m=0}^{r-k} a_{km} \cos m\theta, \quad \text{где} \quad a_{km} \geq 0;$$

следовательно, при $t = 1$, т.е. при $\theta = 0$, $T_r^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, ...$, имеет значение, не меньшее любого значения $|T_r^{(k)}(t)|$ на всем отрезке $[-1, 1]$;

4) таким образом, на отрезке $[-1, 1]$ функция $T_r(t)$ является экстремальной для соотношения (3.1.1), т.е.

$$\|T_r^{(k)}\|_{L_\infty[-1,1]} = \frac{T_r^{(k)}(1)}{\left[T_r^{(r)}(1)\right]^{k/r}} \|T_r\|_{L_\infty[-1,1]}^{1-k/r} \|T_r^{(r)}\|_{L_\infty[-1,1]}^{k/r}; \tag{3.1.5}$$

5) функция

$$\phi_r(t) = aT_r(bt) = a\cos r \arccos bt,$$

где $a, b > 0$ – некоторые постоянные, как нетрудно подсчитать, также является экстремальной для соотношения (3.1.1) на отрезке $[-1/b, 1/b]$, т.е.

$$\|\phi_r^{(k)}\|_{L_\infty[-1/b,1/b]} =$$

$$= \frac{T_r^{(k)}(1)}{\left[T_r^{(r)}(1)\right]^{k/r}} \|\phi_r\|^{1-k/r}_{L_\infty[-1/b,1/b]} \|\phi_r^{(r)}\|^{k/r}_{L_\infty[-1/b,1/b]}, \qquad (3.1.6)$$

причем на указанном отрезке функция $\phi_r(t)$ имеет r нулей и $r+1$ экстремумов, равных $\pm a$, соответствующих значениям аргумента $t = 1/b \cos m\pi/r, \quad m = 1, 2, ..., r-1$; функция $\phi_r'(t) = abT_r'(bt)$ имеет $r-1$ нулей, функция $\phi_r''(t) = ab^2T_r''(bt) - \ r-2$ нулей и т.д.;

$$\phi_r\left(\frac{1}{b}\right) = a, \quad \phi_r(-t) = (-1)^r\phi_r(t), \quad \phi_r^{(k)}(-t) = (-1)^{r-k}\phi_r^{(k)}(t);$$

значения

$$\phi_r^{(k)}(1/b) = ab^k \frac{r^2(r^2-1^2)...[r^2-(k-1)^2]}{(2k-1)!!}$$

являются наибольшими значениями модулей $\phi_r^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, ..., r$, на отрезке $[-1/b, 1/b]$.

Доказательство теоремы 3.1.1. Возьмем для сравнения с фиксированной функцией $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ функцию $\phi_r(t) = aT_r(bt)$, у которой a и b подобраны так, что

$$\|\phi_r^{(k)}\|_\infty = \|x^{(k)}\|_\infty, \qquad (3.1.7)$$

и

$$\|\phi_r^{(r)}\|_\infty = \|x^{(r)}\|_\infty. \qquad (3.1.8)$$

Так как функции $x(t)$ и $\pm x(\pm t + c)$, где c – произвольная постоянная, и их соответствующие производные имеют одинаковые абсолютные максимумы, то без ограничения общности можем предположить, что функция $x(t)$ и ее производные определены на $[-1/b, \infty)$; далее, можно считать, что

$$\left|x^{(k)}\left(-\frac{1}{b}\right)\right| = \|x^{(k)}\|_\infty,$$

и наряду с равенством (3.1.7) запишем

$$\phi_r^{(k)}\left(-\frac{1}{b}\right) = x^{(k)}\left(-\frac{1}{b}\right). \tag{3.1.9}$$

Рассмотрим различные случаи взаимного расположения графиков функций $x'(t)$ и $\phi_r'(t)$ на отрезке $[-1/b, 1/b]$. Возьмем сначала случай, когда на отрезке

$$\left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\cos\frac{(r-1)\pi}{r}\right] \tag{3.1.10}$$

$$\phi_r'(t) \geq 0 \quad \text{и} \quad x'(t) \geq \phi_r'(t), \tag{3.1.11}$$

причем знак $>$ во втором неравенстве имеет место на некоторой части указанного отрезка.

Интегрируя левую и правую часть второго соотношения (3.1.11), можем записать

$$\int\limits_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}\cos\frac{r-1}{r}\pi} x'(t)dt > \int\limits_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}\cos\frac{r-1}{r}\pi} \phi_r'(t)dt,$$

$$x(t)\Big|_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}\cos\frac{r-1}{r}\pi} > \phi_r(t)\Big|_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}\cos\frac{r-1}{r}\pi},$$

$$\|x\|_\infty > \|\phi_r\|_\infty, \tag{3.1.12}$$

откуда в силу соотношений (3.1.6), (3.1.7) и (3.1.8) будет следовать (3.1.1). К тому же выводу придем, предположив, что на отрезке (3.1.10)

$$\phi_r'(t) \leq 0 \quad \text{и} \quad x'(t) \leq \phi_r'(t), \quad \text{т. е.} \quad |x'(t)| \geq |\phi_r'(t)|.$$

Пусть теперь на отрезке

$$\left[\frac{1}{b}\cos\frac{r-1}{r}\pi, \frac{1}{b}\cos\frac{r-2}{r}\pi\right]$$

$$\phi_r'(t) \le 0 \quad \text{и} \quad x'(t) \le \phi_r'(t).$$

В таком случае после интегрирования получаем

$$\int\limits_{\frac{1}{b}\cos\frac{r-1}{r}\pi}^{\frac{1}{b}\cos\frac{r-2}{r}\pi} x'(t)dt < \int\limits_{\frac{1}{b}\cos\frac{r-1}{r}\pi}^{\frac{1}{b}\cos\frac{r-2}{r}\pi} \phi_r'(t)dt,$$

$$x(t)\Bigg|_{\frac{1}{b}\cos\frac{r-1}{r}\pi}^{\frac{1}{b}\cos\frac{r-2}{r}\pi} < \phi_r(t)\Bigg|_{\frac{1}{b}\cos\frac{r-1}{r}\pi}^{\frac{1}{b}\cos\frac{r-2}{r}\pi}.$$

Отсюда снова следует (3.1.12). Таким же образом получаем (3.1.12), если хотя бы на одном отрезке

$$\left[\frac{1}{b}\cos\frac{m}{r}\pi, \frac{1}{b}\cos\frac{m-1}{r}\pi\right], \quad m = 1, 2, ..., r, \tag{3.1.13}$$

$$|x'(t)| \ge |\phi_r'(t)|. \tag{3.1.14}$$

Из (3.1.12), как и раньше, получаем (3.1.1).

Остается доказать, что на одном из отрезков (3.1.13) выполняется неравенство (3.1.14), т.е. что график функции $x'(t)$ обходит на отрезке $[-1/b, 1/b]$ полностью одну из полуволн графика функции $\phi_r'(t)$ со стороны выпуклости или одну из симметричных дуг на концах графика со стороны его вогнутости.

Действительно, так как график функции $\phi_r'(t)$ имеет на отрезке $[-1/b, 1/b]$ $r-2$ полуволны и две симметричных дуги на концах графика, то в противном случае график функции $x'(t)$ должен пересечь график функции $\phi_r'(t)$ не менее $r-1$ раз при $k > 1$ и не менее r раз при $k = 1$ (так как при $k = 1$ по условию (3.1.9) графики функций $x'(t)$ и $\phi_r'(t)$ имеют общую точку $x = -1/b$) и, следовательно, разность $x'(t) - \phi_r'(t)$ должна обратиться в нуль не менее $r-1$ раз при $k > 1$ и не менее r раз при $k = 1$.

Но тогда по теореме Ролля разность $x''(t) - \phi_r''(t)$ должна обратиться в нуль не менее $r-2$ раз при $k > 1$ и не менее $r-1$ раз при $k = 1$ и т.д., разность $x^{(k)}(t) - \phi_r^{(k)}(t)$ должна стать нулем в обоих

случаях не менее $r-(k-1)$ раз (ввиду условия (3.1.9)), наконец, разность $x^{(r)}(t)-\phi_r^{(r)}(t)$ должна обратиться в нуль по крайней мере один раз при некотором значении $t=\xi$ $(-1/b<\xi<1/b)$ и при переходе через это значение должна переменить знак, что противоречит условию (3.1.8). Неравенство (3.1.1) доказано.

Итак, мы сравнили поведение произвольной функции из нашего класса с графиком соответствующим образом подобранного полинома Чебышева, причем оказалось, что для доказательства неравенства (3.1.1) это сравнение достаточно было провести не для всех аргументов, а только для всех точек из некоторого "начального" отрезка полуоси.

На таком пути можно рассчитывать на точное решение задачи лишь тогда, когда функцию сравнения, заданную на конечном отрезке, удается продолжить на всю полуось с сохранением как ее нормы, так и норм ее производных порядка k и r. Но в случае малых гладкостей это как раз возможно.

Ввиду (3.1.5) примерами экстремальных функций для соотношения (3.1.1) могут служить:

1) для случая $r=2$ функция

$$Y(t)=\begin{cases} T_2(t-1) & \text{при } 0\le t\le 1,\\ -\cos 2(t-1) & \text{при } 1\le t<\infty;\end{cases}$$

2) для случая $r=3$ функция

$$Y(t)=\begin{cases} T_3(t-1) & \text{при } 0\le t\le 1+\cos\dfrac{\pi}{3},\\ -T_3(t-1-2\cos\dfrac{\pi}{3}) & \text{при } 1+\cos\dfrac{\pi}{3}\le t\le 1+3\cos\dfrac{\pi}{3},\\ T_3(t-1-4\cos\dfrac{\pi}{3}) & \text{при } 1+3\cos\dfrac{\pi}{3}\le t\le 1+5\cos\dfrac{\pi}{3}\\ \text{и т.д.,} & \end{cases}$$

имеющая разрывной только третью производную (постоянную по абсолютной величине). Теорема доказана.

3.2. Доказательство Стечкина неравенства Маторина для функций с ограниченной третьей старшей производной

Для функции $x \in L^3_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ и $h > 0$ положим

$$S^h_{1,3}x(t) = \frac{1}{6h}\{-8x(t) + 9x(t+h) - x(t+3h)\}, \tag{3.2.1}$$

$$S^h_{2,3}x(t) = \frac{1}{3h^2}\{2x(t) - 3x(t+h) + x(t+3h)\}. \tag{3.2.2}$$

Операторы $S^h_{1,3}$ и $S^h_{2,3}$ обладают следующими свойствами:

$$\|S^h_{1,3}\|_\infty = \frac{3}{h},$$

$$\|x' - S^h_{1,3}x\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{12h}\left\| 9\int_0^h (h-u)^2 x'''(t+u)du - \int_0^{3h}(3h-u)^2 x'''(t+u)du \right\|_\infty \le$$

$$\le \frac{h^2}{2}\|x'''\|_\infty;$$

$$\|S^h_{2,3}\| = \frac{2}{h^2},$$

$$\|x'' - S^h_{2,3}x\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{6h^2}\left\| 3\int_0^h (h-u)^2 x'''(t+u)du - \int_0^{3h}(3h-u)^2 x'''(t+u)du \right\|_\infty \le$$

$$\le \frac{4h}{3}\|x'''\|_\infty.$$

Учитывая эти оценки, имеем

$$\|x'\|_\infty \le \|x' - S^h_{1,3}x\|_\infty + \|S^h_{1,3}x\|_\infty \le$$

$$\le \frac{h^2}{2}\|x'''\|_\infty + \|S^h_{1,3}\|\|x\|_\infty \le \frac{h^2}{2}\|x'''\|_\infty + \frac{3}{h}\|x\|_\infty.$$

Таким образом,

$$\|x'\|_\infty \le \frac{h^2}{2}\|x'''\|_\infty + \frac{3}{h}\|x\|_\infty. \tag{3.2.3}$$

Аналогично имеем

$$\|x''\|_\infty \le \|x'' - S^h_{2,3}x\|_\infty + \|S^h_{2,3}x\|_\infty \le$$

$$\le \frac{4h}{3}\|x'''\|_\infty + \|S^h_{2,3}\|\|x\|_\infty \le \frac{4h}{3}\|x'''\|_\infty + \frac{2}{h^2}\|x\|_\infty.$$

Таким образом,

$$\|x''\|_\infty \le \frac{4h}{3}\|x'''\|_\infty + \frac{2}{h^2}\|x\|_\infty. \tag{3.2.4}$$

Минимизируя правые части неравенств (3.2.3) и (3.2.4) по $h > 0$, получаем утверждение:

для любой функции $x \in L^3_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ выполняются неравенства

$$\|x'\|_\infty \le \frac{3^{5/3}}{2}\|x\|_\infty^{2/3}\|x'''\|_\infty^{1/3},$$

$$\|x''\|_\infty \le 2\cdot 3^{1/3}\|x\|_\infty^{1/3}\|x'''\|_\infty^{2/3}.$$

Тем самым получено другое доказательство неравенства Маторина (3.1.1) при $r = 3$.

Получим теперь аналоги неравенства Морделла из § 1.3 для функций, имеющих заданные мажоранты самой функции и ее третьей производной.

Пусть $g(t)$ и $h(t)$ – неотрицательные невозрастающие функции, определенные на $\mathbf{R}_+$, и функция $x \in L^3_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ такова, что для всех $t \ge 0$

$$|x(t)| \le g(t) \quad \text{и} \quad |x'''(t)| \le h(t). \tag{3.2.5}$$

Операторы $S^h_{1,3}$ и $S^h_{2,3}$, определенные равенствами (3.2.1) и (3.2.2), обладают следующими свойствами:

$$|S^h_{1,3}x(t)| \le \frac{3}{h}g(t);$$

$$|x'(t) - S^h_{1,3}x(t)| \le$$

$$\le \frac{1}{12h}\left|9\int\limits_0^h (h-u)^2 x'''(t+u)du - \int\limits_0^{3h}(3h-u)^2 x'''(t+u)du\right| \le$$

$$\le \frac{h^2}{2}|x'''(t)| \le \frac{h^2}{2}h(t);$$

$$|S^h_{2,3}x(t)| \le \frac{2}{h^2}g(t);$$

$$|x''(t) - S^h_{2,3}x(t)| \le$$

$$\le \frac{1}{6h^2}\left|3\int\limits_0^h (h-u)^2 x'''(t+u)du - \int\limits_0^{3h}(3h-u)^2 x'''(t+u)du\right| \le$$

$$\le \frac{4h}{3}|x'''(t)| \le \frac{4h}{3}h(t).$$

Учитывая эти оценки, имеем

$$|x'(t)| \le |x'(t) - S^h_{1,3}x(t)| + |S^h_{1,3}x(t)| \le \frac{h^2}{2}h(t) + \frac{3}{h}g(t), \quad (3.2.6)$$

и аналогично

$$|x''(t)| \le \frac{2}{h^2}g(t) + \frac{4h}{3}h(t). \quad (3.2.7)$$

Минимизируя правые части неравенств (3.2.6) и (3.2.7) по $h > 0$, получаем такое утверждение.

Утверждение 3.2.1. *Пусть $g(t)$ и $h(t)$ – неотрицательные невозрастающие функции, определенные на $\mathbf{R}_+$, и функция $x \in L^3_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ такова, что для всех $t \ge 0$ выполнены условия* (3.2.5). *Тогда для всех $t \ge 0$ выполняются неравенства*

$$|x'(t)| \le \frac{3^{5/3}}{2}g(t)^{2/3}h(t)^{1/3},$$

$$|x''(t)| \le 2\cdot 3^{1/3}g(t)^{1/3}h(t)^{2/3}.$$

3.3. Неравенство Шенберга–Каваретты и идеальные сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля

Пусть $q, p, s \in [1, \infty]$, $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. Символом $K = K(G; q, p, s; r, k)$ будем обозначать точную константу в неравенстве типа Колмогорова

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_q(G)} \leq K \, \|x\|^{\alpha}_{L_p(G)} \left\| x^{(r)} \right\|^{1-\alpha}_{L_s(G)}$$

для функций $x \in L^r_{p,s}(G)$. В этих терминах неравенство А.П. Маторина (3.1.1) можно записать в виде

$$K(\mathbf{R}_+; \infty, \infty, \infty; r, k) \leq \frac{T_r^{(k)}(1)}{[T_r(1)]^{1-k/r}}, \tag{3.3.1}$$

где $T_r(t) = \cos r \arccos t$, $t \in [-1, 1]$, – полином Чебышева 1-го рода.

Как отмечалось в параграфе 3.1, неравенство (3.3.1) при $r = 2$ и $r = 3$ обращается в равенство. Однако при $r > 3$ это неравенство строгое.

Для $r \geq 4$ задача о точных константах $K(\mathbf{R}_+; \infty, \infty, \infty; r, k)$ была решена И. Шенбергом и А. Кавареттой [355, 356]. При этом константа $K(\mathbf{R}_+; \infty, \infty, \infty; r, k)$ в их неравенстве выражается в терминах идеального сплайна, наименее уклоняющегося от нуля, так же, как константа в неравенстве (3.3.1) выражается в терминах полинома, наименее уклоняющегося от нуля (см. (3.3.4)).

Обозначим $\sigma_{n,r}$ – определенный на $[0, 1]$ идеальный сплайн [209, гл. 2] порядка r с n узлами, имеющий на отрезке $[0, 1]$ минимальную L_∞-норму среди всех идеальных сплайнов вида

$$\sigma(t) = \frac{1}{r!} t^r + 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (t - \xi_i)^r_+ + \sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu t^\nu, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{3.3.2}$$

Как хорошо известно (см., например, [280]), такой сплайн $\sigma_{n,r}$ существует, единственен и имеет $n + r + 1$ точек альтернанса, причем концы отрезка $[0, 1]$ являются точками альтернанса. Отметим, что

при $n = 0$ $\sigma_{n,r}(t) = 2^{-r}T_r(2t-1)$, где $T_r(t) = \cos r \arccos t$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ число λ_n выберем из условия

$$\lambda_n^{-r}|\sigma_{n,r}(0)| = |\sigma_{0,r}(0)| \quad \left(\text{т.е. } \lambda_n^r = \left|\frac{\sigma_{n,r}(0)}{\sigma_{0,r}(0)}\right| \right)$$

и положим

$$s_{n,r}(t) = \lambda_n^{-r}\sigma_{n,r}(\lambda_n t).$$

Тогда в силу результата Шенберга–Каваретты [355, 356]

$$K(\mathbf{R}_+;\infty,\infty,\infty;r,k) = \lim_{n\to\infty}\frac{|s_{n,r}^{(k)}(0)|}{|s_{n,r}(0)|^{1-k/r}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\sigma_{n,r}^{(k)}(0)|}{|\sigma_{n,r}(0)|^{1-k/r}}.$$

Кроме того, в работах [355, 356] доказано, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} s_{n,r}(t) =: s_r(t), \quad t \in \mathbf{R}_+ \tag{3.3.3}$$

(сходимость в (3.3.3) равномерная на каждом отрезке $[0,a] \subset \mathbf{R}_+$), и предельная функция $s_r(t)$ является идеальным сплайном порядка r на $\mathbf{R}_+$ с бесконечным числом узлов. Результат Шенберга–Каваретты для функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ теперь можно сформулировать в виде следующего соотношения:

$$K(\mathbf{R}_+;\infty,\infty,\infty;r,k) = \frac{|s_r^{(k)}(0)|}{|s_r(0)|^{1-k/r}}. \tag{3.3.4}$$

И. Шенберг и А. Каваретта предложили назвать $s_r(t)$ односторонним эйлеровым сплайном.

В настоящем параграфе будет решена задача о “несимметричном” идеальном сплайне, наименее уклоняющемся от нуля, и на этой основе в следующем параграфе будет получено несимметричное обобщение результата (3.3.4) Шенберга–Каваретты (теорема 3.4.3) в том же смысле, в каком неравенство Хермандера (2.9.1) является обобщением неравенства Колмогорова (2.3.1).

Для любых $r \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$ и положительных α, β обозначим $S^+_{n,r}(\alpha,\beta)$ – множество определенных на $[0,1]$ сплайнов вида

$$\sigma(t) = \alpha\frac{1}{r!}t^r + (\alpha+\beta)\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(t-\xi_i)_+^r + \sum_{\nu=0}^{r-1}a_\nu t^\nu, \tag{3.3.5}$$

а $S^-_{n,r}(\alpha,\beta)$ – множество сплайнов вида

$$\sigma(t) = -\beta\frac{1}{r!}t^r + (\alpha+\beta)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(t-\xi_i)^r_+ + \sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu t^\nu, \quad (3.3.6)$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n \le 1$ (при $n = 0$ полагаем $\sum\limits_{i=1}^{n} = 0$). Отметим, что для $\sigma \in S^\pm_{n,r}(\alpha,\beta)$ производная $\sigma^{(r)}$ принимает два значения: α и $-\beta$, причем в интервале $(0,\xi_1)$ $\sigma^{(r)}(t) = \alpha$, если $\sigma \in S^+_{n,r}(\alpha,\beta)$, и $\sigma^{(r)}(t) = -\beta$, если $\sigma \in S^-_{n,r}(\alpha,\beta)$. При $\alpha = \beta = 1$ класс сплайнов $S^+_{n,r}(\alpha,\beta)$ совпадает с совокупностью идеальных сплайнов вида (3.3.2).

Справедлива такая теорема.

Теорема 3.3.1. *Во множестве $S^\pm_{n,r}(\alpha,\beta)$, $r \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ найдется сплайн $\sigma^\pm_{n,r}(\cdot) = \sigma^\pm_{n,r}(\cdot;\alpha,\beta)$ с n различными узлами, обладающий свойствами:*

1) *существуют $n+r+1$ точек*

$$0 = x_1^\pm < x_2^\pm < ... < x_{n+r+1}^\pm = 1,$$

таких, что

$$\sigma^\pm_{n,r}(x_i^\pm) = \pm(-1)^{i+r+1}\|\sigma^\pm_{n,r}\|_\infty, \quad i = 1,...,n+r+1, \quad (3.3.7)$$

(точки $x_i^\pm$ называют точками альтернанса);

2) *для любого $k = 0,1,...,r$*

$$\operatorname{sgn}(\sigma^+_{n,r})^{(k)}(0) = (-1)^{r-k}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma^-_{n,r})^{(k)}(0) = (-1)^{r-k+1}. \quad (3.3.8)$$

Сплайн, удовлетворяющий соотношениям (3.3.7), *единственен во множестве $S^\pm_{n,r}(\alpha,\beta)$, причем для любого $\sigma^\pm \in S^\pm_{n,r}(\alpha,\beta)$, $\sigma^\pm \ne \sigma^\pm_{n,r}$,*

$$\|\sigma^\pm\|_\infty > \|\sigma^\pm_{n,r}\|_\infty. \quad (3.3.9)$$

Доказательство. При $n = 0$ утверждение теоремы 3.3.1 представляет собой известную теорему Чебышева об альтернансе (теорема 10.1.1), а сплайн $\sigma^{\pm}_{0,r}(\cdot)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с полиномом Чебышева 1-го рода. Поэтому будем считать, что $n \geq 1$.

В пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ рассмотрим сферу S^n радиуса 1, т.е. множество векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$, удовлетворяющих соотношению $\sum\limits_{i=1}^{n+1} |\xi_i| = 1$. Каждому такому вектору $\xi \in S^n$ поставим в соответствие разбиение отрезка [0,1] точками 0, $|\xi_1|$, $|\xi_1| + |\xi_2|$, ..., $\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|, 1$. Положим $I_k = \left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} |\xi_i|, \sum\limits_{i=0}^{k} |\xi_i| \right)$, где $\xi_0 := 0$, $k = 1, ..., n+1$. Каждому из полученных разбиений B_ξ сопоставим функцию

$$G_\xi(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^1 (t-u)_+^{r-1} g_\xi(u) du, \qquad t \in [0,1],$$

где

$$g_\xi(t) = \begin{cases} \alpha \operatorname{sgn} \xi_{2i-1}, & t \in I_{2i-1}, \\ \beta \operatorname{sgn} \xi_{2i}, & t \in I_{2i}, \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., [(n+1)/2].$$

Ясно, что $G_\xi(t)$ является сплайном порядка r с узлами в точках разбиения B_ξ, причем $G_\xi^{(r)} = g_\xi$ принимает значения $\pm\alpha$, $\pm\beta$. Пусть $P^\xi_{n+r-1}(t) = \sum\limits_{i=0}^{n+r-1} a_i(\xi) t^i$ – полином, имеющий наименьшее равномерное уклонение на отрезке $[0,1]$ от функции $G_\xi(t)$ среди всех полиномов степени, не выше $n+r-1$.

Рассмотрим отображение $\phi : S^n \to \mathbf{R}^n$, действующее по формуле

$$\phi(\xi) = (a_r(\xi), a_{r+1}(\xi), ..., a_{n+r-1}(\xi)).$$

Из построения отображения ϕ и свойств полиномов наилучшего равномерного приближения следует, что отображение ϕ непрерывно и нечетно. Поэтому из теоремы Борсука (см., например, [208, с. 255])

вытекает существование $\hat{\xi} \in S^n$, такого, что $\phi(\hat{\xi}) = 0$. Это означает, что полином $P^{\hat{\xi}}_{n+r-1}$ наилучшего равномерного приближения функции $G_{\hat{\xi}}$ имеет степень, не выше $r-1$. Поэтому для разности $\Delta := G_{\hat{\xi}} - P^{\hat{\xi}}_{n+r-1}$ имеем $\Delta^{(r)} = g_{\hat{\xi}}$. Следовательно, функция $\Delta(t)$ является сплайном порядка r, причем $\Delta^{(r)}(t)$ принимает лишь значения $\pm\alpha$, $\pm\beta$. Более того, в силу теоремы Чебышева об альтернансе (см. теорему 10.1.1) сплайн $\Delta(t)$ имеет $n+r+1$ точек альтернанса на $[0,1]$, а значит, он имеет там $n+r$ перемен знака. Поэтому в силу теоремы Ролля $\Delta^{(r)} = g_{\hat{\xi}}$ имеет n перемен знака. Таким образом, у вектора $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_{n+1})$ все компоненты $\hat{\xi}_i$ отличны от нуля. Следовательно, сплайн Δ имеет n узлов, причем $\Delta^{(r)}(t)$ меняет знак в точках $\sum\limits_{i=1}^{k} |\xi_i|$, $k = 1, ..., n$. А так как по построению $\Delta^{(r)}(t) = g_{\hat{\xi}}(t) = \alpha$ для $t \in (0, \hat{\xi}_1)$ (переходя, если нужно, к вектору $-\hat{\xi}$, можем считать $\hat{\xi}_1 > 0$), то $\Delta^{(r)}(t)$ принимает лишь два значения α, $-\beta$. Итак, $\Delta \in S^+_{n,r}(\alpha, \beta)$ и имеет $n+r+1$ точек альтернанса. Обозначим сплайн Δ символом $\sigma^+_{n,r}(\cdot; \alpha, \beta)$. Аналогично доказывается существование в классе $S^-_{n,r}(\alpha, \beta)$ сплайна $\sigma^-_{n,r}(\cdot; \alpha, \beta)$, имеющего $n+r+1$ точек альтернанса.

Покажем, что концы отрезка являются точками альтернанса сплайна $\sigma^{\pm}_{n,r} = \sigma^{\pm}_{n,r}(\cdot; \alpha, \beta)$. Действительно, в противном случае производная $(\sigma^{\pm}_{n,r})'$ имела бы по крайней мере $n+r$ нулей. Тогда в силу теоремы Ролля производная $(\sigma^{\pm}_{n,r})^{(r)}$ имела бы $n+1$ перемену знака, что невозможно.

Докажем соотношения (3.3.7) и (3.3.8). Так как сплайн $\sigma^{\pm}_{n,r}(\cdot; \alpha, \beta)$ имеет $n+r+1$ точек альтернанса, то соотношение (3.3.7) будет следовать из соотношений (3.3.8) (при $k = 0$). Для доказательства соотношений (3.3.8) заметим, что для любого $i = 1, ..., r$

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{\pm}_{n,r})^{(i-1)}(0) = -\operatorname{sgn}(\sigma^{\pm}_{n,r})^{(i)}(0). \qquad (3.3.10)$$

Действительно, из того, что сплайн $\sigma^{\pm}_{n,r}$ имеет $n+r+1$ точек альтернанса, следует в силу теоремы Ролля, что $(\sigma^{\pm}_{n,r})^{(i-1)}$ имеет

$n+r-i+1$ нулей внутри $(0,1)$. С другой стороны, $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i-1)}$ не может иметь больше, чем $n+r-i+1$ нулей в $[0,1]$. В противном случае $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(r)}$ имел бы $n+1$ перемену знака, что невозможно. Пусть $t_1 \in (0,1)$ – самый левый из нулей $(\sigma^{\pm})^{(i-1)}$. Если бы мы предположили, что (3.3.10) не выполняется, т.е. что $\operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i-1)}(0) = \operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i)}(0)$, то в силу теоремы Ферма производная $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i)}$ имела бы нуль в интервале $(0,t_1)$. Поэтому число нулей $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i)}$ в $(0,1)$ было бы не меньше, чем $n+r-i+1$, что невозможно.

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в том, что, если некоторый сплайн из $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$ удовлетворяет соотношениям (3.3.7), его норма строго меньше нормы любого другого сплайна из $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$.

Предположим противное. Пусть некоторый сплайн из множества $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$ (сохраним за ним обозначение $\sigma_{n,r}^{\pm}$) удовлетворяет соотношениям (3.3.7) и пусть во множестве $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$ найдется сплайн $\sigma^{\pm} \neq \sigma_{n,r}^{\pm}$, такой, что

$$\|\sigma^{\pm}\|_{\infty} \leq \|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_{\infty}. \tag{3.3.11}$$

Обозначим $t_k^{\pm}$ (соответственно $u_k^{\pm}$) – узлы сплайна $\sigma_{n,r}^{\pm}$ (соответственно $\sigma^{\pm}$). Покажем, что из предположения (3.3.11) следуют неравенства

$$u_k^{\pm} < t_k^{\pm}, \quad k = 1,2,...,n. \tag{3.3.12}$$

Для этого заметим, что разность $\delta := \sigma_{n,r}^{\pm} - \sigma$ имеет в $(0,1)$ $n+r$ нулей с учетом их кратностей (это следует из предположения (3.3.11) и того, что сплайн $\sigma_{n,r}^{\pm}$ имеет в $[0,1]$ $n+r+1$ точек альтернанса). Поэтому в силу теоремы Ролля производная $\delta^{(r)}$ имеет в $(0,1)$ n перемен знака.

С другой стороны, $\delta^{(r)}$ не может иметь перемен знака внутри интервалов $(t_k^{\pm}, t_{k+1}^{\pm})$, $k=0,1,...,n$, ($t_0^{\pm} := 0$, $t_{n+1}^{\pm} := 1$). Следовательно, производная $\delta^{(r)}$ имеет в интервале $(0,1)$ ровно n перемен знака, причем она не тождественна нулю ни в одном из интервалов $(t_k^{\pm}, t_{k+1}^{\pm})$.

Вернемся к доказательству неравенства (3.3.12). Проведем это доказательство индукцией по k. Пусть вначале $k = 1$. Предположим, что $u_1^{\pm} \geq t_1^{\pm}$. Тогда производная $\delta^{(r)}$ тождественна нулю в интервале $(0, t_1^{\pm})$, что, как было отмечено выше, невозможно.

Предположим, что неравенство (3.3.12) справедливо для всех $k = 1, 2, ..., m-1$; $m \leq n$, и покажем, что тогда оно справедливо для $k = m$. Действительно, предположим противное: $u_m^{\pm} \geq t_m^{\pm}$. Из этого неравенства и индуктивного предположения ($u_k^{\pm} < t_k^{\pm}$, $k = 1, ..., m-1$) вытекает, что производная $\delta^{(r)}$ тождественна нулю в интервале $(t_{m-1}^{\pm}, t_m^{\pm})$, что, как известно, невозможно.

Итак, мы убедились в том, что из предположения (3.3.11) следуют неравенства (3.3.12). Но тогда в интервале $(t_{n-1}^{\pm}, t_n^{\pm})$ производная $\delta^{(r)}$ тождественна нулю, что невозможно.

Таким образом, предположение (3.3.11) приводит к противоречию. Тем самым неравенство (3.3.9) доказано. Теорема доказана.

3.4. Неравенства типа Хермандера на полуоси

Так же, как сплайн $\sigma_{n,r}$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства $C[0,1]$ среди всех идеальных сплайнов вида (3.3.2), играл роль функции сравнения в работах И. Шенберга и А. Каваретты [355, 356], сплайны $\sigma_{n,r}^{\pm}(\,.\,;\ \alpha,\ \beta)$ из теоремы 3.3.1 будут выполнять роль функций сравнения при доказательстве аналога неравенства Хермандера на полуоси.

Для любого $n \in \mathbf{Z}_+$ выберем $\lambda_n^{\pm}$ из условия

$$(\lambda_n^{\pm})^{-r} \left|\sigma_{n,r}^{\pm}(0;\alpha,\beta)\right| = \left|\sigma_{0,r}^{\pm}(0;\alpha,\beta)\right|,$$

т.е.

$$(\lambda_n^{\pm})^{r} = \left|\frac{\sigma_{n,r}^{\pm}(0;\alpha,\beta)}{\sigma_{0,r}^{\pm}(0;\alpha,\beta)}\right|, \tag{3.4.1}$$

и положим

$$s_{n,r}^{\pm}(t;\alpha,\beta) = (\lambda_n^{\pm})^{-r}\sigma_{n,r}^{\pm}(\lambda_n^{\pm}t;\alpha,\beta), \quad t \in (0, (\lambda_n^{\pm})^{-1}). \tag{3.4.2}$$

Справедлива такая теорема.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $n \in \mathbf{Z}_+$, r, $k \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le r-1$. *Для любой функции* $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ *выполняются неравенства*

$$\left\| \left((-1)^{r-k} x^{(k)} \right)_\pm \right\|_\infty \le$$

$$\le \frac{\left((-1)^{r-k} s^\pm_{n,r} \right)^{(k)}_\pm \left(0; \left\| x^{(r)}_+ \right\|_\infty, \left\| x^{(r)}_- \right\|_\infty \right)}{\left((-1)^{r-k} s^\pm_{n,r} \right)_\pm \left(0; \left\| x^{(r)}_+ \right\|_\infty, \left\| x^{(r)}_- \right\|_\infty \right)^{1-k/r}} E_0(x)^{1-k/r}_\infty. \tag{3.4.3}$$

Доказательство. Фиксируем $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ и положим

$$\alpha = \|x^{(r)}_+\|_\infty, \quad \beta = \|x^{(r)}_-\|_\infty. \tag{3.4.4}$$

Без ограничения общности можем считать, что $\|x^{(k)}\|_\infty = |x^{(k)}(0)|$ (действительно, в случае $\|x^{(k)}\|_\infty = |x^{(k)}(t_0)|$ перейдем к функции $\hat{x}(t) = x(t+t_0)$).

Далее заметим, что величина дроби, стоящей в правой части (3.4.3), не зависит от числа $\lambda^\pm_n$, участвующего в определении $s^\pm_{n,r}(.;\alpha,\beta)$ (см. (3.4.2)), а величина $|s^\pm_{n,r}(0;\alpha,\beta)|$ непрерывно зависит от $\lambda^\pm_n$ и принимает любое значение из интервала $(0,\infty)$, когда $\lambda^\pm_n$ пробегает этот интервал. Поэтому временно, в ходе доказательства теоремы 3.4.1, нам будет удобно считать, что $\lambda^\pm_n$ выбрано не из условия (3.4.1), а из условия

$$E_0(x)_\infty = |s^\pm_{n,r}(0;\alpha,\beta)|. \tag{3.4.5}$$

Таким образом, для доказательства неравенств (3.4.3) достаточно установить справедливость неравенств

$$x^{(k)}_+(0) \le (s^-_{n,r})^{(k)}_+(0;\ \alpha,\beta), \tag{3.4.6}$$

$$x^{(k)}_-(0) \le (s^+_{n,r})^{(k)}_-(0;\ \alpha,\beta), \tag{3.4.7}$$

если $r-k$ нечетно, и неравенств

$$x_+^{(k)}(0) \le (s_{n,r}^+)_+^{(k)}(0;\ \ \alpha,\beta), \tag{3.4.8}$$

$$x_-^{(k)}(0) \le (s_{n,r}^-)_-^{(k)}(0;\ \ \alpha,\beta), \tag{3.4.9}$$

если $r-k$ четно.

Докажем неравенства (3.4.6)–(3.4.9) индукцией по k. Пусть вначале $k=1$. Предположим, что выполняется неравенство, противоположное одному из неравенств (3.4.6)–(3.4.9), например неравенству (3.4.6). Тогда существует $\varepsilon \in (0,1)$, такое, что

$$\varepsilon x_+^{'}(0) > (s_{n,r}^-)_+^{'}(0;\ \ \alpha,\beta). \tag{3.4.10}$$

Рассмотрим разность $\delta := s_{n,r}^- - \varepsilon(x - c_0(x))$, где $c_0(x)$ – константа наилучшего равномерного приближения функции x. В силу условия (3.4.5)

$$\|\varepsilon(x - c_0(x))\|_\infty < \|s_{n,r}^-\|_\infty, \tag{3.4.11}$$

а из теоремы 3.3.1 следует наличие у сплайна $s_{n,r}^\pm$ $n+r+1$ точек альтернанса. Поэтому разность δ имеет внутри интервала $(0,(\lambda_n^\pm)^{-1})$ $n+r$ нулей. С другой стороны, эта разность не может иметь более $n+r$ нулей, ибо в противном случае с помощью теоремы Ролля заключаем, что $\delta^{(r)} = (s_{n,r}^-)^{(r)} - \varepsilon x^{(r)}$ имеет $n+1$ перемену знака, что ввиду равенств (3.4.4) невозможно. Обозначим t_1 – первый нуль разности δ в интервале $(0,(\lambda_n^\pm)^{-1})$. Согласно соотношениям (3.3.8) $s_{n,r}^-(0) < 0$, $(s_{n,r}^-)'(0) > 0$. Принимая во внимание неравенство (3.4.11), заключаем, что $\delta(0) < 0$, а учитывая соотношение (3.4.10), имеем также $\delta'(0) < 0$. Из неравенств $\delta(0) < 0$ и $\delta'(0) < 0$ следует, что в некоторой точке интервала $(0,t_1)$ δ' обращается в нуль. Кроме того, так как δ имеет в интервале $[t_1,(\lambda_n^\pm)^{-1})$ $n+r$ нулей, то в силу теоремы Ролля δ' имеет в интервале $(t_1,(\lambda_n^\pm)^{-1})$ $n+r-1$ нулей. Таким образом, δ' имеет в $(0,(\lambda_n^\pm)^{-1})$ $n+r$ нулей. Тогда $\delta^{(r)}$ меняет согласно теореме Ролля $n+1$ знак, что невозможно, как было отмечено выше. Для $k=1$ теорема доказана.

Продолжим доказательство теоремы по индукции. Докажем неравенства (3.4.6)–(3.4.9) для k-й производной $x^{(k)}$ в предположе-

нии, что они выполняются для $x^{(i)}$, $i < k$. Как и в случае $k = 1$, будем рассуждать от противного. Если выполняется неравенство, противоположное одному из неравенств (3.4.6)–(3.4.9), например неравенству (3.4.6) (соответствующему случаю нечетного $r - k$), то существует $\varepsilon \in (0, 1)$, такое, что

$$\varepsilon x_+^{(k)}(0) > (s_{n,r}^-)_+^{(k)}(0;\ \ \alpha, \beta). \tag{3.4.12}$$

Так как рассматривается случай нечетного $r - k$, то ввиду соотношений (3.3.8) имеем

$$(s_{n,r}^-)^{(k)}(0; \alpha, \beta) > 0, \qquad (s_{n,r}^-)^{(k-1)}(0; \alpha, \beta) < 0.$$

Поэтому из индуктивного предположения вытекает неравенство

$$\varepsilon x_-^{(k-1)}(0) < (s_{n,r}^-)_-^{(k-1)}(0;\ \ \alpha, \beta), \tag{3.4.13}$$

если $x^{(k-1)}(0) < 0$ (в противном случае неравенство (3.4.13) очевидно). Обозначим t_1^{k-1} – первый нуль разности $\delta^{(k-1)} = (s_{n,r}^-)^{(k-1)} - -\varepsilon x^{(k-1)}$ в интервале $(0, (\lambda_n^{\pm})^{-1})$ (как и в случае $k = 1$ устанавливается, что $\delta^{(k-1)}$ имеет в этом интервале ровно $n+r-k+1$ нулей). В силу неравенств (3.4.11) и (3.4.12) $\delta^{(k-1)}(0) < 0,\ \delta^{(k)}(0) > 0$. Поэтому производная $\delta^{(k)}$ обращается в нуль в некоторой точке интервала $(0, t_1^{k-1})$. Учитывая также, что в интервале $(t_1^{k-1}, (\lambda_n^{\pm})^{-1})$ эта производная имеет $n+r-k$ нулей, заключаем, что внутри $(0, (\lambda_n^{\pm})^{-1})$ $\delta^{(k)}$ имеет $n+r-k+1$ нулей. Далее с помощью теоремы Ролля приходим к выводу, что $\delta^{(r)}$ имеет $n+1$ перемен знака, что невозможно. Теорема доказана.

Теорема 3.4.2. *При любых фиксированных $r \in \mathbf{N}$ и $\alpha, \beta > 0$ существует определенный на $[0, \infty)$ сплайн $s_r^{\pm}$ $(.;\ \alpha,\ \beta)$ порядка r с бесконечным числом узлов $y_k^{\pm}$, $k = 1, 2, ...,$*

$$0 = y_0^{\pm} < y_1^{\pm} < y_2^{\pm} < ... < y_k^{\pm} < ..., \quad y_k^{\pm} \to \infty \ \ (k \to \infty),$$

обладающий свойствами:

1) *на каждом интервале* $[y_k^{\pm}, y_{k+1}^{\pm})$, $k \in \mathbf{Z}_+$,

$$(s_r^{\pm})^{(r)}\ (t;\alpha,\beta) \equiv \alpha \quad \text{или} \quad (s_r^{\pm})^{(r)}\ (t;\alpha,\ \beta) \equiv -\beta;$$

2) *для любого* $c > 0$ *последовательность* $\{s_{n,r}^{\pm}\ (.;\ \alpha,\ \beta)\}_{n=1}^{\infty}$ (*элементы которой при всех достаточно больших* n *определены на* $[0,c]$) *сходится к* $s_r^{\pm}\ (.;\ \alpha,\ \beta)$ *вместе со всеми производными до порядка* $r-1$ *включительно равномерно на* $[0,c]$.

Доказательство. Обозначим $t_{n,k}$, $k = 1, ..., n$, – узлы сплайна $s_{n,r}^{\pm} = s_{n,r}^{\pm}\ (.;\ \alpha,\ \beta)$. Покажем, что для любого $k \in \mathbf{N}$

$$t_{n+1,k}^{\pm} < t_{n,k}^{\pm}, \quad n = k, k+1, ... \tag{3.4.14}$$

Для доказательства (3.4.14) нам потребуется изучить некоторые свойства разности $\Delta := s_{n,r}^{\pm} - s_{n+1,r}^{\pm}$. Заметим, во-первых, что она определена в интервале $\delta_n^{\pm} := (0, (\lambda_n^{\pm})^{-1})$. Чтобы в этом убедиться, покажем, что для любого $n \in \mathbf{Z}_+$ выполняется неравенство $\lambda_{n+1}^{\pm} < \lambda_n^{\pm}$. Действительно, из (3.3.9) следует, что $\|\sigma_{n+1,r}^{\pm}\|_\infty < < \|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_\infty$. Тогда в силу (3.3.7) $|\sigma_{n+1,r}^{\pm}(0)| < |\sigma_{n,r}^{\pm}(0)|$. Теперь неравенство $\lambda_{n+1}^{\pm} < \lambda_n^{\pm}$ следует из определения (3.4.1).

Отметим далее, что производная $\Delta^{(r)}$ имеет в $\delta_n^{\pm}$ не менее n перемен знака. Действительно, принимая во внимание равенство

$$\|s_{n+1,r}^{\pm}\|_\infty = \|s_{n,r}^{\pm}\|_\infty, \quad n \in \mathbf{Z}_+ \tag{3.4.15}$$

(вытекающее из (3.3.7), (3.4.1) и (3.4.2)) и то, что сплайн $s_{n,r}^{\pm}$ имеет $n+r+1$ точек альтернанса (в силу теоремы 3.3.1 и определения (3.4.2)), заключаем, что разность Δ имеет в интервале $\delta_n^{\pm}$ $n+r$ нулей с учетом их кратностей. Тогда в силу теоремы Ролля производная $\Delta^{(r)}$ в $\delta_n^{\pm}$ меняет знак n раз.

С другой стороны, $\Delta^{(r)}$ не может иметь перемен знака внутри интервалов $(t_{n,k}^{\pm}, t_{n,k+1}^{\pm})$, $k = 0, 1, ..., n$, ($t_{n,0}^{\pm} := 0$, $t_{n,n+1}^{\pm} := (\lambda_n^{\pm})^{-1}$). Следовательно, $\Delta^{(r)}$ в интервале $\delta_n^{\pm}$ ровно n раз меняет знак, причем она не тождественна нулю ни в одном из интервалов $(t_{n,k}^{\pm}, t_{n,k+1}^{\pm})$.

Вернемся к доказательству неравенства (3.4.14). Проведем это доказательство индукцией по k. Пусть вначале $k = 1$. Предположим, что $t^{\pm}_{n+1,1} \geq t^{\pm}_{n,1}$. Тогда производная $\Delta^{(r)}$ тождественна нулю в интервале $(0, t^{\pm}_{n,1})$, что, как было отмечено выше, невозможно.

Предположим, что неравенство (3.4.14) справедливо для всех $k = 1, 2, ..., m-1$, $m \leq n$, и покажем, что тогда оно справедливо и для $k = m$. Действительно, предположим противное: $t^{\pm}_{n+1,m} \geq t^{\pm}_{n,m}$. Из этого неравенства и индуктивного предположения ($t^{\pm}_{n+1,k} < t^{\pm}_{n,k}$, $k = 1, ..., m-1$) вытекает, что производная $\Delta^{(r)}$ тождественна нулю в интервале $(t^{\pm}_{n,m-1}, t^{\pm}_{n,m})$, что, как мы знаем, невозможно.

Тем самым неравенство (3.4.14) доказано. Из этого неравенства следует существование пределов у каждой из последовательностей $\{t^{\pm}_{n,k}\}_{n=k}^{\infty}$, $k = 1, 2, ...$ Пусть $0 = y^{\pm}_0 < y^{\pm}_1 < y^{\pm}_2 < ... < y^{\pm}_i < ...$ – все различные пределы этих последовательностей, упорядоченные в порядке возрастания. Для любого $i \in \mathbf{N}$ и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует номер $n = n(i, \varepsilon)$, такой, что для любого $n \geq n(i, \varepsilon)$ $(s^{\pm}_{n,r})^{(r)}(t) = \alpha$ при всех $t \in I^{\pm}_i(\varepsilon) := (y^{\pm}_{i-1} + \varepsilon, y^{\pm}_i - \varepsilon)$ или $(s^{\pm}_{n,r})^{(r)}(t) = -\beta$ при всех $t \in I^{\pm}_i(\varepsilon)$. Другими словами, начиная с некоторого номера $n = n(i, \varepsilon)$ сужение сплайнов $s^{\pm}_{n,r}$ на интервал $I^{\pm}_i(\varepsilon)$ является многочленом степени r со старшей производной, равной α или $-\beta$. Ввиду произвольности ε отсюда следует, что в каждом из интервалов $I^{\pm}_i := (y^{\pm}_{i-1}, y^{\pm}_i)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} s^{\pm}_{n,r}\ (t;\ \alpha,\ \beta) =:\ \ s^{\pm}_r(t;\ \alpha,\ \beta), \tag{3.4.16}$$

причем $(s^{\pm}_r)^{(r)}(t; \alpha, \beta) = \alpha$ для всех $t \in I^{\pm}_i$ или $(s^{\pm}_r)^{(r)}(t; \alpha, \beta) = -\beta$ для всех $t \in I^{\pm}_i$.

Фиксируем $c > 0$. Так как $|\sigma^{\pm}_{n,r}\ (0;\ \alpha,\ \beta)| \to 0$ при $n \to \infty$, то в силу (3.4.1) $\lambda^{\pm}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, начиная с некоторого номера, последовательность сплайнов $\{s^{\pm}_{n,r}\}_{n=1}^{\infty}$ определена на $[0, c]$. Далее, из равенства (3.4.15) следует ее равномерная ограниченность, а из неравенств

$$-\beta \leq (s^{\pm}_{n,r})^{(r)}(t; \alpha, \beta) \leq \alpha, \quad t \in [0, c], \tag{3.4.17}$$

вытекает ее равностепенная непрерывность, а также равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность на этом отрезке последовательностей k-х производных $\{(s_{n,r}^{\pm})^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, ..., r-1$. Поэтому сходимость в (3.4.16) будет равномерной на $[0, c]$ вместе со всеми производными до порядка $r-1$ включительно.

Покажем, что $y_k^{\pm} \to \infty$ при $k \to \infty$. Действительно, предположим противное. Тогда существует $c > 0$, такое, что сплайн $s_r^{\pm}$ на $[c, \infty)$ совпадает с некоторым многочленом степени r и, следовательно, неограничен, что противоречит равенствам (3.4.15) и (3.4.16).

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать включение

$$s_r^{\pm} \in L_{\infty,\infty}^r(\mathbf{R}_+). \tag{3.4.18}$$

Чтобы убедиться в справедливости (3.4.18), заметим, что для любых $t_1, t_2 \in \mathbf{R}_+$ существует $c > 0$, такое, что $t_1, t_2 \in [0, c]$, и при всех достаточно больших n

$$|(s_{n,r}^{\pm})^{(r-1)}(t_1; \alpha, \beta) - (s_{n,r}^{\pm})^{(r-1)}(t_2; \alpha, \beta)| \le K|t_1 - t_2|, \tag{3.4.19}$$

где $K = \max\{\alpha, \beta\}$. Это следует из (3.4.17). Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$|(s_r^{\pm})^{(r-1)}(t_1; \alpha, \beta) - (s_r^{\pm})^{(r-1)}(t_2; \alpha, \beta)| \le K|t_1 - t_2|.$$

Отсюда следует включение (3.4.18). Теорема доказана.

Устремляя в неравенстве (3.4.3) n к бесконечности и учитывая теорему 3.4.2, получаем следующий аналог неравенства Хермандера (2.9.1) на полуоси.

Теорема 3.4.3. *Для любых r, $k \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le r-1$ и для любой функции $x \in L_{\infty,\infty}^r(\mathbf{R}_+)$ справедливы неравенства*

$$\left\| \left((-1)^{r-k} x^{(k)} \right)_{\pm} \right\|_{\infty} \le$$

$$\le \frac{\left((-1)^{r-k} s_r^{\pm} \right)_{\pm}^{(k)} \left(0; \left\| x_+^{(r)} \right\|_{\infty}, \left\| x_-^{(r)} \right\|_{\infty} \right)}{\left((-1)^{r-k} s_r^{\pm} \right)_{\pm} \left(0; \left\| x_+^{(r)} \right\|_{\infty}, \left\| x_-^{(r)} \right\|_{\infty} \right)^{1-k/r}} E_0(x)_{\infty}^{1-k/r}. \tag{3.4.20}$$

Неравенства (3.4.20) *являются точными. При этом неравенство для* $((-1)^{r-k}x^{(k)})_+$ *обращается в равенство, если* $x(t) = \mu s_r^+(\lambda t;\alpha,\beta)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, *а неравенство для* $((-1)^{r-k}x^{(k)})_-$ *обращается в равенство, если* $x(t) = \mu s_r^-(\lambda t;\alpha,\beta)$, $\lambda > 0, \mu > 0$.

При $\alpha = \beta = 1$ из (3.4.20) получаем неравенство

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \frac{|s_r^{(k)}(0)|}{|s_r(0)|^{1-k/r}}\|x\|_\infty^{1-k/r}\|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}. \tag{3.4.21}$$

Таким образом, теорема 3.4.3 содержит, в частности, результат Шенберга–Каваретты (3.3.4).

3.5. Оценки Стечкина констант в неравенствах на полуоси

Положим для краткости $C_{rk} := K(\mathbf{R}_+;\infty,\infty,\infty;r,k)$ (см. § 3.3). В настоящем параграфе даны двусторонние оценки для констант C_{rk} и приведен точный порядок роста $\ln C_{rk}$ для всех r и всех $k < r$ при $l := \min\{k, r-k\} = o(r)$.

Будем использовать следующие неравенства для $r!$:

$$r^r e^{-r} < \sqrt{2\pi}r^{r+1/2}e^{-r} < r! \le er^{r+1/2}e^{-r},\ r = 1,2,... \tag{3.5.1}$$

Оценки снизу для $r!$ немедленно вытекают из формулы Стирлинга, а для получения оценки сверху положим

$$a_r = r^{r+1/2}e^{1-r}(r!)^{-1}.$$

Тогда $a_1 = 1$ и

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{1}{e}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{r+1/2} > 1.$$

Отсюда $a_r \ge 1$, т.е. $r! \le er^{r+1/2}e^{-r},\ r = 1,2,...$

В следующей лемме приведена оценка снизу для C_{rk}.

Лемма 3.5.1. *Оценка снизу для C_{rk} имеет вид*

$$C_{rk} \geq R_{rk} := \frac{k!}{(2k)!}\left\{\frac{(2r)!}{r!}\right\}^{k/r}, \ 1 \leq k < r; \ r = 2, 3, ... \qquad (3.5.2)$$

Доказательство. Пусть $I = (-\infty, 1)$. Положим

$$x(t) = 0 \ (t \leq 0), \ x(t) = t^r T_m(t) \ \ (0 \leq t < 1),$$

где $T_m(t) = \cos \arccos t$ – многочлен Чебышева степени $m > r$. Ясно, что $x^{(r-1)}(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Оценим сверху $\|x^{(r)}\|_{L_\infty(I)}$. Из (3.1.3) имеем

$$\|T_m^{(k)}\|_{L_\infty[0,1]} = T_m^{(k)}(1) \leq \frac{(m+k)!k!2^k}{(m-k)!(2k)!}, \quad 0 \leq k \leq m.$$

Отсюда по формуле Лейбница

$$\|x^{(r)}\|_{L_\infty[0,1]} \leq \sum_{k=0}^{r} C_r^k \| \left(x^{(r)}\right)^{(r-k)} \|_{L_\infty[0,1]} \|T_m^{(k)}\|_{L_\infty[0,1]} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{r} \frac{(m+k)!(r!)^2 2^k}{(m-k)!(r-k)!k!(2k)!} = \sum_{k=0}^{r} B_k,$$

где

$$B_k := \frac{(m+k)!(r!)^2 2^k}{(m-k)!(r-k)!k!(2k)!}.$$

Но при $k = 0, 1, ..., r-1$ и $m \geq 2r^3 + r$

$$\frac{B_{k+1}}{B_k} = \frac{(m+k+1)(m-k)(r-k)}{(k+1)^2(2k+1)} \geq \frac{m(m-r)}{2r^3} \geq m \quad (r \geq 2),$$

откуда

$$\|x^{(r)}\|_{L_\infty(I)} \leq \sum_{k=0}^{r} m^{-k} B_k < \frac{m}{m-1} \frac{(m+r)!r!2^r}{(m-r)!(2r)!} \quad (m \geq 2r^3 + r). \qquad (3.5.3)$$

Оценим теперь снизу $\|x^{(r)}\|_{L_\infty(I)}$. Так как $(t^r)^{(s)} > 0$ и $T_m^{(s)}(t) > 0$ ($t = 1$, $0 \le s \le r$), то, используя (3.1.3), имеем

$$\|x^{(r)}\|_{L_\infty(I)} \ge x^{(k)}(1) \ge T_m^{(k)}(1) = \frac{m(m+k-1)!k!2^k}{(m-k)!(2k)!}. \quad (3.5.4)$$

Переходим к оценке C_{rk}. В силу определения C_{rk} имеем

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(I)} \le C_{rk}\|x\|_{L_\infty(I)}^{1-k/r}\|x^{(r)}\|_{L_\infty(I)}^{k/r}, \quad (3.5.5)$$

откуда согласно (3.5.3) и (3.5.4) получим

$$\frac{m(m+k-1)!k!2^k}{(m-k)!(2k)!} \le C_{rk}\left\{\frac{m}{m-1}\frac{(m+r)!r!2^r}{(m-r)!(2r)!}\right\}^{k/r},$$

т.е.

$$C_{rk} \ge \frac{m(m+k-1)!}{(m-k)!}\left\{\frac{(m-1)(m-r)!}{m(m+r)!}\right\}^{k/r}\frac{k!}{(2k)!}\left\{\frac{(2r)!}{r!}\right\}^{k/r}.$$

Полагая $m \to \infty$, выводим отсюда, что

$$C_{rk} \ge \frac{k!}{(2k)!}\left\{\frac{(2r)!}{r!}\right\}^{k/r},$$

и лемма доказана.

Лемма 3.5.2. *Оценка C_{rk} имеет вид*

$$C_{rk} \ge \frac{[(2r)!]^{1-k/r}}{(r-k)!} \quad (1 \le k < r;\ r = 2, 3, ...). \quad (3.5.6)$$

Доказательство. Пусть $I = (-\infty, 2^{1/r})$. Рассмотрим функцию

$$x(t) = 1 \ \ (t \le 0), \ \ x(t) = t^r - 1 \ \ (0 \le t < 2^{1/r}).$$

Имеем

$$\|x\|_{L_\infty(I)} = 1, \quad \|x^{(k)}\|_{L_\infty(I)} = 2^{1-k/r}r!/(r-k)! \quad (1 \le k \le r).$$

Отсюда, как при доказательстве леммы 3.5.1, с помощью (3.5.5) получаем

$$\frac{2^{1-k/r}r!}{(r-k)!} \le C_{rk}(r!)^{k/r},$$

т.е.

$$C_{rk} \ge (2r!)^{1-k/r}/(r-k)!,$$

и лемма доказана.

Используя неравенства (3.5.1), (3.5.2) и (3.5.4), доказываем существование $a > 0$, такого, что

$$C_{rk} \ge a\left(\frac{r}{k}\right)^k \quad (1 \le k \le r/2) \tag{3.5.7}$$

и

$$C_{rk} \ge \frac{1}{e\sqrt{r-k}}\left(\frac{r}{r-k}\right)^{r-k} \quad (r/2 \le k < r). \tag{3.5.8}$$

Получим теперь оценки сверху для C_{rk}. Будем исходить из оценки Маторина (3.1.1)

$$C_{rk} \le P_{rk} := T_r^{(k)}(1)\left\{T_r^{(r)}(1)\right\}^{-k/r} \quad (1 \le k < r; \;\; r = 2, 3, ...). \tag{3.5.9}$$

Используя (3.1.3), имеем

$$T_r^{(k)}(1) = \|T_r^{(k)}\|_{L_\infty[0,1]} = \frac{r(r+k-1)!k!2^k}{(r-k)!(2k)!} \quad (1 \le k \le r).$$

Займемся упрощением оценки Маторина. Ясно, что

$$P_{rk} = \frac{r}{r+k}2^{k/r}\frac{(r+k)!k!}{(r-k)!(2k)!(r!)^{k/r}}. \tag{3.5.10}$$

Но $2^x \le 1 + x \;\; (0 \le x \le 1)$. Поэтому

$$P_{rk} \le \frac{(r+k)!k!}{(r-k)!(2k)!(r!)^{k/r}}. \tag{3.5.11}$$

Далее, пользуясь неравенствами (3.5.1) и учитывая существование $A > 0$, такого, что

$$r^{\frac{1}{2}-\frac{k}{2r}}(r-k)^{-\frac{1}{2}} \le A \ \ (1 \le k < r),$$

выводим

$$P_{rk} \le A\frac{(r+k)^{r+k}}{(r-k)^{r-k}r^k k^k 2^{2^k}}.$$

Положим $k/r = \gamma$. Тогда

$$P_{rk} \le A\left\{\psi_1(\gamma)\frac{r}{4k}\right\}^k, \tag{3.5.12}$$

где

$$\psi_1(\gamma) = (1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}-1}(1-\gamma)^{-\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)}.$$

Заметим, что

$$\frac{\psi_1'(\gamma)}{\psi_1(\gamma)} = -\gamma^{-2}\left(\ln\frac{1+\gamma}{1-\gamma} - 2\gamma\right) < 0.$$

Поэтому $\psi_1(\gamma)$ строго убывает и $\psi_1(\gamma) < \psi_1(0) = e^2$. Следовательно,

$$P_{rk} \le A\left\{\frac{e^2 r}{4k}\right\}^k \quad (1 \le k \le r/2). \tag{3.5.13}$$

Аналогично, полагая $\delta = (r-k)/r$, выводим, что

$$P_{rk} \le A\left\{\psi_2(\delta)\frac{r}{r-k}\right\}^{r-k},$$

где

$$\psi_2(\delta) = 2\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{2}{\delta}-1}(1-\delta)^{-\left(\frac{1}{\delta}-1\right)},$$

причем ψ_2 строго убывает и $\psi_2(\delta) < \psi_2(0) = 2$. Отсюда

$$P_{rk} \le A\left(\frac{2r}{r-k}\right)^{r-k} \quad (r/2 \le k < r). \tag{3.5.14}$$

Объединяя неравенства (3.5.7), (3.5.10), (3.5.13), (3.5.14) и применяя оценку Маторина (3.5.3), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 3.5.1. *Для любого $r \geq 2$ выполняются неравенства*

$$a\left(\frac{r}{k}\right)^k \leq C_{rk} \leq A\left(\frac{e^2 r}{4k}\right)^k \quad (1 \leq k \leq r/2), \tag{3.5.15}$$

$$\frac{a}{\sqrt{r-k}}\left(\frac{r}{r-k}\right)^{r-k} \leq C_{rk} \leq A\left(\frac{2r}{r-k}\right)^{r-k} \quad (r/2 \leq k < r), \tag{3.5.16}$$

где A и a – абсолютные положительные константы.

Несколько огрубляя эти оценки, можем написать, что

$$\frac{a}{\sqrt{l}}\left(\frac{r}{l}\right)^l \leq C_{rk} \leq A\left(\frac{2r}{l}\right)^l \quad (r = 2, 3, ...), \tag{3.5.17}$$

где $l = \min\{k, r-k\}$. Отсюда

$$\ln C_{rk} = l \ln \frac{r}{l} + O(l). \tag{3.5.18}$$

Если $l = o(r)$, то здесь член $l \ln(r/l)$ является главным и получаем для $\ln C_{rk}$ асимптотическую формулу. В частности, если $l = O(1)$, то

$$\ln C_{rk} = l \ln \frac{r}{l} + O(1),$$

т.е. для любого фиксированного $l = 1, 2, ...$

$$C_{rk} \asymp r^l \ \ (r \geq 2l). \tag{3.5.19}$$

Например, если $k = 1$, то из (3.1.1) и (3.1.3) имеем

$$C_{r1} \leq r^2 \left(r! 2^{r-1}\right)^{-1/r} < \frac{e}{2} r,$$

а в силу (3.5.2)

$$C_{r1} \geq \frac{1}{2}\left\{\frac{(2r)!}{r!}\right\}^{1/r} = \frac{2}{e}r\{1-o(1)\}.$$

Таким образом,

$$\frac{2}{e}r\{1-o(1)\} \leq C_{r1} \leq \frac{e}{2}r. \tag{3.5.20}$$

Если же $k = r-1$, то, используя (3.1.1), (3.1.3) и (3.5.6), имеем

$$\frac{r}{e} < (2r!)^{1/r} \leq C_{r,r-1} \leq (r!2^{r-1})^{1/r} < 2(r!)^{1/r} = \frac{2}{e}r\{1+o(1)\}. \tag{3.5.21}$$

Определим теперь точный порядок роста $\ln C_{rk}$ для всех $r \geq 2$ и всех $k < r$.

Утверждение 3.5.2. *Справедлива формула*

$$\ln C_{rk} \asymp l \ln \frac{r}{l} \quad (r \geq 2;\ \ 1 \leq k < r). \tag{3.5.22}$$

Доказательство. Формула (3.5.22) означает, что существуют абсолютные положительные константы b и B, такие, что

$$bl \ln \frac{r}{l} \leq \ln C_{rk} \leq Bl \ln \frac{r}{l} \quad (r \geq 2;\ 1 \leq k < r). \tag{3.5.23}$$

Для оценки $\ln C_{rk}$ сверху замечаем, что согласно (3.5.18)

$$\ln C_{rk} \leq l \ln \frac{r}{l} + Al \leq l \ln \frac{r}{l} + \frac{A}{\ln 2} l \ln \frac{r}{l} \leq Bl \ln \frac{r}{l}.$$

Переходим к оценке $\ln C_{rk}$ снизу. В силу первого неравенства (3.5.17)

$$\ln C_{rk} \geq l \ln \frac{r}{l} - \frac{1}{2}\ln l - \ln \frac{1}{a}. \tag{3.5.24}$$

Но

$$l \ln \frac{r}{l} \geq \ln r \quad (1 \leq l \leq r/2),$$

откуда

$$\frac{1}{2}\ln l + \ln \frac{1}{a} \leq \frac{2}{3}\ln n \leq \frac{2}{3} l \ln \frac{r}{l},$$

если $r > r_0$. Отсюда и из (3.5.24)

$$\ln C_{rk} \geq \frac{1}{3} l \ln \frac{r}{l} \quad (r > r_0). \tag{3.5.25}$$

Пусть теперь $2 \leq r \leq r_0$. Из неравенства Колмогорова (2.3.1) следует, что $C_{rk} > 1$. Поэтому

$$\ln C_{rk} \geq a_1 l \ln \frac{r}{l} \quad (2 \leq r \leq r_0). \tag{3.5.26}$$

Сопоставляя (3.5.25) и (3.5.26), выводим, что

$$\ln C_{rk} \geq bl \ln \frac{r}{l} \quad (r \geq 2; \;\; 1 \leq k < r),$$

где $b = \min\{1/3, a_1\}$, и утверждение 3.5.2 полностью доказано.

Наконец, положим

$$C_r = \max_{k=1,\ldots,r-1} C_{rk}.$$

Утверждение 3.5.3. *Справедливы неравенства*

$$a(\sqrt{2})^r \leq C_r \leq A2^r \;\; (r \geq 2),$$

где a и A – абсолютные положительные константы.

Доказательство. В самом деле, полагая в первом неравенстве (3.5.15) $k = [r/2]$, убеждаемся, что

$$C_{rk} \geq a2^{[r/2]} \geq a2^{r/2-1} = a(\sqrt{2})^r.$$

С другой стороны, в силу второго неравенства (3.5.17)

$$C_{rk} \leq A \max_{l=1,\ldots,[r/2]} (2r/l)^l \leq \max_{1 \leq t \leq r/2} (2r/t)^t = A2^r,$$

и утверждение доказано.

Полученные результаты дают представление о поведении констант C_{rk}.

3.6. Неравенство Оловянишникова для кратно-монотонных функций

Результат Шенберга–Каваретты (3.3.4) (см. также (3.4.21)) дает окончательный ответ на вопрос о точной константе в неравенстве типа Колмогорова на полупрямой, но выглядит несколько тяжеловесно. Вместе с тем В.М. Оловянишников [275] дал простое решение этого вопроса для функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$, которые вместе со всеми своими производными до $(r-1)$-го порядка включительно не меняют знака.

Для простоты изложения будем считать функцию $x(t)$ заданной на отрицательной полуоси. Символом $L^{r,0}_\infty(\mathbf{R}_-)$ обозначим класс кратно-монотонных функций, т.е. таких функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_-)$, у которых все производные до $(r-1)$-го порядка включительно неотрицательны (или все они неположительны).

Положим, для краткости $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L_\infty(\mathbf{R}_-)}$.

Теорема 3.6.1. *Пусть $r, k \in \mathbf{N},\ k < r$. Тогда для любой функции $x \in L^{r,0}_\infty(\mathbf{R}_-)$ выполнено неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le Q_{rk}\|x\|_\infty^{1-k/r}\|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}, \tag{3.6.1}$$

где

$$Q_{rk} = \frac{(r!)^{1-k/r}}{(r-k)!}.$$

Неравенство (3.6.1) *обращается в равенство для функций вида*

$$\phi_r(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in (-\infty, -l), \\ \dfrac{a(l+t)^r}{r!}, & \text{если } t \in [-l, 0], \quad a > 0, \quad l > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (3.6.1) при $k = 1$. Не нарушая общности, предположим, что функция $x \in L^{r,0}_\infty(\mathbf{R}_-)$ и ее производные до $(r-1)$-го порядка включительно неотрицательны. Тогда $\|x'\|_\infty = x'(0)$.

Подберем константы a и l таким образом, чтобы

$$\|x'\|_\infty = \|\phi_r'\|_\infty, \quad \|x^{(r)}\|_\infty = \|\phi_r^{(r)}\|_\infty. \tag{3.6.2}$$

Тогда не только при $t \le -l$, но и при $-l \le t \le 0$ имеем

$$x'(t) \ge \phi'(t). \tag{3.6.3}$$

Это следует из того, что в противном случае нарушается второе условие (3.6.2).

В самом деле, допустим, что (3.6.3) неверно, и учтем, что $\phi_r(t) = 0$ для $t \le -l$. Тогда найдутся точки a_1, a_2 и a_3 ($-l \le a_1 < < a_2 < a_3 \le 0$), такие, что $x'(a_1) = \phi_r'(a_1)$, $x'(a_2) < \phi_r'(a_2)$ и $x'(a_3) = \phi_r'(a_3)$; следовательно, найдется точка a ($a_2 < a < a_3$), такая, что $x''(a) > \phi_r''(a)$, и точка a' ($a_1 < a' < a_2$), такая, что $x''(a') < \phi_r''(a')$.

Последние неравенства приводят к тому, что найдутся точки b_1, b_2 и b_3 ($-l \le b_1 < b_2 < b_3 < a$), такие, что $x''(b_1) = \phi_r''(b_1)$, $x''(b_2) < \phi_r''(b_2)$ и $x''(b_3) = \phi_r''(b_3)$; следовательно, найдется точка b ($b_2 < b < b_3$), такая, что $x'''(b) > \phi_r'''(b)$, и точка b' ($b_1 < b' < b_2$), такая, что $x'''(b') < \phi_r'''(b')$. Продолжая это рассуждение, придем к тому, что найдутся точки u_1 и u_2 ($-l < u_1 < u_2 < 0$), такие, что $x^{(r-1)}(u_1) < \phi_r^{(r-1)}(u_1)$ и $x^{(r-1)}(u_2) > \phi_r^{(r-1)}(u_2)$. Но тогда

$$\|x^{(r)}\|_\infty (u_2 - u_1) \ge \int\limits_{u_1}^{u_2} x^{(r)}(t)dt = x^{(r-1)}(u_2) - x^{(r-1)}(u_1) >$$

$$> \phi_r^{(r-1)}(u_2) - \phi_r^{(r-1)}(u_1) = \int\limits_{u_1}^{u_2} \phi_r^{(r)}(t)dt = \|\phi_r^{(r)}\|_\infty (u_2 - u_1),$$

а это противоречит второму из условий (3.6.2). Так как

$$\int\limits_{-l}^{0} \phi_r'(t)dt = \|\phi_r\|_\infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{-l}^{0} x'(t)dt \le \|x\|_\infty,$$

то на основании (3.6.3) имеем $\|x\|_\infty \ge \|\phi_r\|_\infty$. Приняв во внимание (3.6.2), получим (3.6.1).

Неравенство (3.6.1) при любом k легко доказать по индукции, если учесть, что

$$Q_{r-1,m}Q_{r,1}^{1-m/(r-1)} = Q_{r,m+1} \quad (m = 1, 2, ..., r-2).$$

В самом деле, если неравенство (3.6.1) справедливо для всех r и для $k = m$ $(1 \le m \le r-2)$, то оно справедливо и для $k = m+1$. Это следует из того, что, сопоставляя неравенство

$$\left\|(x')^{(m)}\right\|_\infty \le Q_{r-1,m} \left\|x'\right\|_\infty^{1-m/(r-1)} \left\|(x')^{(r-1)}\right\|_\infty^{m/(r-1)},$$

или, что то же самое, неравенство

$$\left\|x^{(m+1)}\right\|_\infty \le Q_{r-1,m} \left\|x'\right\|_\infty^{1-m/(r-1)} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{m/(r-1)},$$

с неравенством

$$\left\|x'\right\|_\infty \le Q_{r,1} \left\|x\right\|_\infty^{1-1/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1/r},$$

имеем

$$\left\|x^{(m+1)}\right\|_\infty \le Q_{r-1,m}Q_{r,1}^{1-m/(r-1)} \left\|x\right\|_\infty^{1-(m+1)/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{(m+1)/r},$$

или

$$\left\|x^{(m+1)}\right\|_\infty \le Q_{r,m+1} \left\|x\right\|_\infty^{1-(m+1)/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{(m+1)/r}.$$

Теорема доказана.

Комментарии к главе 3

В 1938–39 гг. А. Горни [151–154] для функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$, $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, установил соотношение

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le 4e^{2k} \left(\frac{r}{k}\right)^k \|x\|_\infty^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r},$$

где $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L_\infty(\mathbf{R}_+)}$. Однако константы Горни не точные.

Задача о точной константе для равномерных норм производных функций, заданных на полуоси, труднее поддается исследованию, чем эта задача для функций, заданных на всей оси – сказывается возмущающее влияние граничной точки.

Поэтому с момента получения Горни оценок для таких констант до следующего существенного результата прошло довольно много времени. Следующий существенный шаг был сделан Маториным в 1955 г. Маторин [255] дал новую оценку сверху для точных констант, которая при $r = 3$ оказалась точной (напомним, что к тому времени точные константы на полуоси были известны только для $r = 2$). Кроме того, на наш взгляд, метод, использованный Маториным, оказал существенное влияние на дальнейшее развитие исследований в этом направлении.

Результаты Маторина излагаются в § 3.1.

В § 3.2 приведено доказательство С.Б. Стечкина [296, 298] точных неравенств на полуоси для $r = 3$ и $k = 1, 2$. Это доказательство интересно тем, что Стечкин представил разностные операторы, наилучшим образом приближающие операторы d/dt и d^2/dt^2 на классе $W^3_\infty([0, \infty))$.

Полное решение задачи о точной константе в неравенствах для равномерных норм производных на полуоси дали Шенберг и Каваретта [355, 356]. Формулировки их результата приведены в § 3.3. Точная константа, найденная Шенбергом и Кавареттой, носит неявный характер и выписывается в терминах заданного на полуоси идеального сплайна с бесконечным числом узлов, который является пределом последовательности идеальных сплайнов, наименее уклоняющихся от нуля на расширяющейся системе конечных отрезков (число узлов сплайнов при этом увеличивается). Будучи не слишком обозримым, этот результат, тем не менее, может, на наш взгляд, составить основу для алгоритмов, которые позволят с любой заданной точностью вычислять численные значения точных констант для любых заданных r и k. Вместе с тем полученные С.Б. Стечкиным [298] и приведенные в § 3.5 оценки таких констант, конечно, не потеряли своего значения.

В § 3.4 приводим “несимметричное” (в духе Л. Хермандера)

обобщение неравенства Шенберга и Каваретты (см. [79]). Нам известна также публикация [173] по этому поводу, однако в ней этот результат только анонсирован. Данный результат приводим с подробным доказательством, которое, на наш взгляд, в полной мере иллюстрирует развитие метода, использованного Маториным.

Отметим, что приведенная в данном параграфе схема доказательства неравенств (3.4.20) (теоремы 3.4.1–3.4.3) для функций класса $L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ такая же, как и в работах [355, 356]. Однако наш метод доказательства теорем 3.4.1–3.4.3 отличается от метода доказательства соответствующих теорем из этих работ.

В § 3.5 приведены оценки С.Б. Стечкина констант C_{rk} [298]. Было бы желательно найти для $\ln C_{rk}$ асимптотические формулы, справедливые для $l \asymp r$ при $r \to \infty$, и тем более найти порядок роста C_{rk} при $l \to \infty$.

В § 3.6 приведен результат Оловянишникова [275], который показал, что, сужая класс функций (ограничиваясь рассмотрением только заданных на полуоси кратно-монотонных функций), можно весьма просто получить неравенство для производных на полуоси, причем с простой и элегантной точной константой. По поводу недавнего развития результатов Оловянишникова в разных направлениях см. работы [322, 44–46].

Дополнительные результаты к главе 3

1. В следующих двух утверждениях содержатся обобщения неравенства Оловянишникова из § 3.6.

Определим семейство функций $\varphi_r(t)$ следующим образом:

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \le -l; \\ \dfrac{(l+t)^r}{r!}, & -l \le t \le 0. \end{cases} \tag{Д.3.1}$$

Теорема 1 [44, 47]. *Для всех* $1 \le p, q \le \infty$ *и любой функции* $x \in L^{r,+}_{p,\infty} = L^{r,+}_{p,\infty}(\mathbf{R}_-)$ *выполняется следующее неравенство:*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le C_{rk} \|x\|_p^{\alpha} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{Д.3.2}$$

где

$$C_{rk} = \frac{\left\|\varphi_r^{(k)}\right\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} = \frac{(r!)^\alpha (rq+1)^{\frac{\alpha}{p}}}{(r-k)!((r-k)q+1)^{\frac{1}{q}}},$$

$$\alpha = \frac{r-k+1/q}{r+1/p}.$$

Неравенство (Д.3.2) *обращается в равенство для любой функции вида* (Д.3.1).

Теорема 2 [44, 47]. *Для любых* $1 \le p, q \le \infty$ *и любой функции* $x \in L_{p,1}^{r,+}(\mathbf{R}_-)$ *выполняется следующее неулучшаемое неравенство:*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\left\|\varphi_{r-1}^{(k)}(1,\cdot)\right\|_q}{\|\varphi_{r-1}(1,\cdot)\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_1^{1-\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{r-1-k+1/q}{r-1+1/p}.$$

2. Следующее утверждение дает обобщение неравенства Оловянишникова на случай кратно-монотонных функций многих переменных.

Пусть $\mathbf{R}_-^d = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d : x_1 \le 0, \cdots, x_d \le 0\}$, $\{e_i\}_1^d$ – элементы стандартного базиса $\mathbf{R}^d$. Будем говорить, что функция $x : \mathbf{R}_-^d \to \mathbf{R}$ принадлежит классу $L_\infty^{(re_i)}(\mathbf{R}_-^d)$, если для любых фиксированных значений t_j, $j \ne i$, ее производная $(r-1)$-го порядка по i-й переменной локально абсолютно непрерывна, а производная порядка r существенно ограничена. Обозначим $L_\infty^{(re_i),+}(\mathbf{R}_-^d)$ – класс функций x из $L_\infty^{(re_i)}$, положительных на всей области определения и монотонных по i-й переменной (при фиксированных значениях остальных $d-1$ переменных) вместе с производными по этой переменной до порядка $r-1$ включительно.

Теорема [45]. *Пусть* φ_r *– функции вида* (1), $\overline{k} \in \mathbf{N}^d$, $r \in \mathbf{N}$, $|k| := \sum\limits_{i=1}^d k_i < r$. *Для любой функции* x *из* $\mathbf{R}_-^d$, *такой, что*

$x^{(\bar{k})} \in \bigcap\limits_{i=1}^{d} L_{\infty}^{((r-k_i)e_i),+}(\mathbf{R}_{-}^{d})$, *и такой, что* $x(u_1, \cdots, u_d) \to 0$, *когда по крайней мере для одного* i *будет* $u_i \to \infty$, *выполняется следующее неравенство:*

$$\left\|x^{(\bar{k})}\right\|_{\infty} \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{\infty}}{\|\varphi_r\|_{\infty}^{\frac{r-k}{r}}} \|x\|_{\infty}^{\frac{r-k}{r}} \prod_{i=1}^{d} \left\|x^{(\bar{k}+(r-|k|e_i)}\right\|_{\infty}^{\frac{k_i}{r}}. \qquad (\text{Д}.3.3)$$

Неравенство (Д.3.3) *является точным.*

3. Пусть теперь $AM(\mathbf{R}_{-})$ – класс абсолютно монотонных функций, заданных на $\mathbf{R}_{-}$.

Теорема [46, 47]. *Для* $x \in AM(\mathbf{R}_{-})$, *при всех* p, q, s *и* $k < r$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{p} \leq C \|x\|_{q}^{1-\alpha} \left\|x^{(r)}\right\|_{s}^{\alpha}, \qquad (\text{Д}.3.4)$$

где

$$\alpha = \frac{k + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}}{r - \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{s}} \quad \text{и} \quad C = \frac{q^{\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{s^{\frac{1}{s}}}{q^{\frac{1}{q}}}\right)^{\alpha}.$$

Неравенство (Д.3.3) *точное.*

4. Будем говорить, что функция $F(z)$ принадлежит классу S, если:

а) $F(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости;

б) $\mathrm{Im}F(z) \geq 0$, когда $\mathrm{Im}z > 0$;

в) $F(z)$ голоморфна и неотрицательна на $(-\infty, 0)$.

Теорема [44, 47]. *Для* $x \in S$ *при всех* $k < r$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{q} \leq \frac{k!}{(r!)^{\frac{k+\frac{1}{q}}{r}} (q(k+1)+1)^{\frac{1}{q}}} \|x\|_{\infty}^{1-\frac{k+\frac{1}{q}}{r}} \left\|x^{(r)}\right\|_{\infty}^{\frac{k+\frac{1}{q}}{r}} \qquad (\text{Д}.3.5)$$

и

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{q} \leq \frac{k!(r+2)^{\frac{k+\frac{1}{q}}{r+1}}}{(r!)^{\frac{k+\frac{1}{q}}{r+1}} (q(k+1)+1)^{\frac{1}{q}}} \|x\|_{\infty}^{1-\frac{k+\frac{1}{q}}{r+1}} \left\|x^{(r)}\right\|_{1}^{\frac{k+\frac{1}{q}}{r+1}}. \qquad (\text{Д}.3.6)$$

Неравенства (Д.3.5) *и* (Д.3.6) *неулучшаемы.*

5. Будем говорить, что набор $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r)$ мажорируется набором $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ и писать $\beta \prec \alpha$, если для некоторых перестановок этих наборов выполнены неравенства $\sum\limits_{j=1}^{k} \beta_j \leq \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j$ для всех $k \in \{1, ..., r\}$, причем в случае $k = r$ выполнено равенство. Непрерывную функцию $x : [0, \infty] \to \mathbf{R}$ называют регулярно монотонной, если: а) $(-1)^k x^{(k)}(t) \geq 0,\ t > 0,\ k = 0, 1, 2, ...$

В работе [323] доказано, что если $\beta \prec \alpha$, то $\prod\limits_{j=1}^{r} (-1)^{\beta_j} x^{(\beta_j)} \leq$ $\leq \prod\limits_{j=1}^{r} (-1)^{\alpha_j} x^{(\alpha_j)}$. Приведены некоторые приложения этого результата в случае $\alpha = (2, 0)$, $\beta = (1, 1)$ и $\alpha = (n, ..., n, 0, ..., 0)$, $\beta = (k, k, ..., k)$. Доказано также, что если функция $x : [0, \infty] \to \mathbf{R}$ абсолютно монотонна, т.е. для нее выполнены условия: б) $x^{(k)}(t) \geq 0$, $t > 0$, $k = 0, 1, 2, ...$, то справедливы неравенства $\prod\limits_{j=1}^{r} x^{(\beta_j)} \leq \prod\limits_{j=1}^{r} x^{(\alpha_j)}$.

Для регулярно монотонных функций $x : [0, \infty] \to \mathbf{R}$ при любых $r, k \in \mathbf{N}$ и любом $T \in (0, \infty]$ в [323] доказаны также неулучшаемые неравенства

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_\infty[0,T]} \leq \|x\|_{L_\infty[0,T]}^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_{L_\infty[0,T]}^{k/r},$$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_p[a,b]} \leq \|x\|_{L_p[a,b]}^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_{L_p[a,b]}^{k/r}$$

для любого $p \in [1, \infty]$ и любых $a, b \in (0, \infty)$.

Полученные результаты обобщены на случай функций, для которых в а) или б) выполняется лишь конечное число неравенств.

В частности, если x удовлетворяет неравенствам $x^{(j)}(t) \geq 0$, $t > 0$, $j = 0, 1, ..., k + 1$, и $x^{(j)}(0) = 0$ для $j = 0, 1, ..., r - 1$, то

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_\infty[0,T]} \leq \frac{(r-k)!}{(r!)^{1-k/r}} \|x\|_{L_\infty[0,T]}^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_{L_\infty[0,T]}^{k/r}.$$

6. Для функции x, определенной на полуоси, положим

$$m(x) := \inf\{x(t) : t \in \mathbf{R}_+\}, \quad M(x) := \sup\{x(t) : t \in \mathbf{R}_+\}.$$

В [114] доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $x \in L^3_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$, *причем* x *неотрицательна на полуоси. Если* $m(x') \le 0$ *и* $x''(0) \le 0$, *то* $M(x''') \ge 0$ *и*

$$-m(x')^3 \le \frac{9}{8}\|x\|^2_{L_\infty(\mathbf{R}_+)} M(x'''). \tag{Д.3.7}$$

Если же $M(x') > 0$, $x''(0) \ge 0$, *то* $-m(x''') \ge 0$ *и*

$$M(x')^3 \le \frac{9}{8}\|x\|^2_{L_\infty(\mathbf{R}_+)}(-m(x''')). \tag{Д.3.8}$$

В [114] (Д.3.7) и (Д.3.8) доказаны также при несколько иных ограничениях.

Глава 4

ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕРАВЕНСТВ

4.1. Необходимые условия и их геометрическая интерпретация

Пусть G – ось $\mathbf{R}$, полуось $\mathbf{R}_+$ или тор $\mathbf{T}$, и пусть задан набор чисел

$$q, p, s \in [1, \infty]; \quad k, r \in \mathbf{Z}_+, \quad k < r; \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \tag{4.1.1}$$

Будем исследовать следующую задачу: при каких условиях, накладываемых на набор чисел (4.1.1), для любой функции $x \in L^r_{p,s}(G)$ выполняется неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{Lq(G)} \leq K \, \|x\|^{\alpha}_{Lp(G)} \, \|x^{(r)}\|^{\beta}_{Ls(G)} \tag{4.1.2}$$

с константой $K = K_{k,r}(q, p, s; G; \alpha, \beta)$, не зависящей от x.

В настоящем параграфе получены необходимые условия, накладываемые на наборы чисел (4.1.1), и дана их геометрическая интерпретация.

Отметим, прежде всего, что если неравенство (4.1.2) справедливо для любой функции $x \in L^r_{p,s}(G)$, то для функций вида $ax(t), \ a > 0$, должно быть

$$a\|x^{(k)}\|_{Lq(G)} \leq Ka^{\alpha}\|x\|^{\alpha}_{Lp(G)} a^{\beta}\|x^{(r)}\|^{\beta}_{Ls(G)}.$$

Отсюда при $a \to +\infty$ получим $1 \leq \alpha + \beta$, а при $a \downarrow 0$ имеем $1 \geq \alpha + \beta$. Таким образом, по необходимости

$$\alpha + \beta = 1.$$

Теорема 4.1.1. *Пусть* $G = \mathbf{R}$ *или* $G = \mathbf{R}_+$; $1 \le p, q, s \le \infty$; $k, r \in \mathbf{Z}_+$, $k < r$. *Если для любой функции* $x \in L^r_{p,s}(G)$ *выполняется неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} \le K\|x\|^{\alpha}_{L_p(G)}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(G)} \tag{4.1.3}$$

с константой K, *не зависящей от* x, *то необходимо, чтобы параметры* k, r, p, q, s *удовлетворяли условию*

$$\frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p} \le \frac{r-k}{r}, \tag{4.1.4}$$

а показатель α *имел вид*

$$\alpha = \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}. \tag{4.1.5}$$

Доказательство. Положим для краткости $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p(G)}$.

Докажем сначала (4.1.5). Пусть для любой функции $x \in L^r_{p,s}(G)$ справедливо неравенство (4.1.3). Тогда оно выполняется и для любой функции вида $y_\lambda(t) = x(\lambda t)$, $\lambda > 0$. Но

$$\|y^{(k)}_\lambda\|_q = \lambda^{k-\frac{1}{q}}\|x^{(k)}\|_q,\ \|y_\lambda\|_p = \lambda^{-\frac{1}{p}}\|x\|_p,\ \|y^{(r)}_\lambda\|_s = \lambda^{r-\frac{1}{s}}\|x^{(r)}\|_s.$$

Следовательно, для любого $\lambda > 0$ должно выполняться неравенство

$$\lambda^{k-\frac{1}{q}}\|x^{(k)}\|_q \le K\lambda^{-\frac{\alpha}{p}}\|x\|^{\alpha}_p\lambda^{(1-\alpha)(r-\frac{1}{s})}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_s. \tag{4.1.6}$$

Выбирая функцию x так, чтобы $\|x^{(r)}\|_s \ne 0$, получаем, что последнее неравенство будет справедливо для всех достаточно больших λ только, если

$$k - \frac{1}{q} \le -\frac{\alpha}{p} + (1-\alpha)(r-1/s),$$

или

$$\alpha(r-1/s+1/p) \le r-k-1/s+1/q,$$

или

$$\alpha \le \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}.$$

Для того чтобы неравенство (4.1.6) было верным также и для всех λ, достаточно близких к нулю, необходимо, чтобы

$$k - \frac{1}{q} \geq -\frac{\alpha}{p} + (1-\alpha)(r - 1/s),$$

т. е. чтобы

$$\alpha \geq \frac{r - k - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p}.$$

Таким образом, если неравенство (4.1.3) справедливо для всех $x \in L^r_{p,s}(G)$, то необходимо выполнение (4.1.5).

Чтобы доказать (4.1.4), возьмем бесконечно дифференцируемую финитную функцию x и построим новую функцию $x_n(t) = \sum\limits_{l=1}^{n} x(t + lk)$, где числа $n, k \in \mathbf{N}$ выбраны так, чтобы носители функций $x(t + lk)$, $l = 1, ..., n$, попарно не пересекались. Тогда имеем

$$\|x_n\|_p = n^{\frac{1}{p}}\|x\|_p, \quad \|x_n^{(k)}\|_q = n^{\frac{1}{q}}\|x^{(k)}\|_q, \quad \|x_n^{(r)}\|_s = n^{\frac{1}{s}}\|x^{(r)}\|_s.$$

Следовательно, если справедливо (4.1.3), то

$$n^{\frac{1}{q}}\|x^{(k)}\|_q \leq K n^{\frac{\alpha}{p}}\|x\|_p^{\alpha} n^{\frac{1-\alpha}{s}}\|x^{(r)}\|_s^{1-\alpha}.$$

Так как это неравенство выполняется при любом $n \in \mathbf{N}$, то необходимо, чтобы

$$\frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{s} = \frac{1}{p}\frac{r - k - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p} + \frac{1}{s}\frac{k - 1/q + 1/p}{r - 1/s + 1/p},$$

или

$$\frac{1}{q}\left(r - \frac{1}{s} + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}\left(r - k - \frac{1}{s} + \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{s}\left(k - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right),$$

или

$$r\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \leq k\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{p}\right),$$

что можно переписать также в виде

$$\frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p} \le \frac{r-k}{r}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь необходимые условия в случае периодических функций.

Теорема 4.1.2. *Пусть* $1 \le p, q, s \le \infty,\ k, r \in \mathbf{Z}_+,\ k < r$. *Если для любой функции* $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})$ *выполняется неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{T})} \le K\|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})} \tag{4.1.7}$$

с константой K, *не зависящей от* x, *то необходимо, чтобы показатель* α *удовлетворял условию*

$$\alpha \le \alpha_{cr} := \min\left\{\frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p},\quad 1-\frac{k}{r}\right\}. \tag{4.1.8}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ – функция из $L^r_{p,s}(\mathbf{R})$, отличная от нуля лишь в малой окрестности точки $t_0 = 0$. Для $\lambda > 1$ и $t \in [-\pi, \pi]$ определим функцию x равенством $x(t) := y(\lambda t)$ и далее продолжим ее 2π-периодически на всю ось. Как и при доказательстве теоремы 4.1.1, приходим к выводу, что для функции x справедливо неравенство (4.1.6) и из него, устремляя λ к бесконечности, получаем

$$\alpha \le \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}. \tag{4.1.9}$$

Рассмотрим теперь функцию $x(t) = \sin nt$. Применяя к ней (4.1.7), получаем

$$n^k\|\sin(\cdot)\|_{L_q(\mathbf{T})} \le K\ \|\sin(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})}\ n^{r(1-\alpha)}\|\sin(\cdot)\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})}.$$

При больших n это возможно лишь, если $k \le r(1-\alpha)$, т.е.

$$\alpha \le 1 - \frac{k}{r}. \tag{4.1.10}$$

Из (4.1.9) и (4.1.10) следует (4.1.8). Теорема доказана.

Замечание. Для периодических функций наряду с неравенствами (4.1.7) естественно рассматривать неравенства вида

$$E_0(x^{(k)})_{L_q(\mathbf{T})} \le K_1 E_0(x)^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})} \tag{4.1.11}$$

с константой K_1, не зависящей от x, где $E_0(x)_{L_p(\mathbf{T})}$ – наилучшее приближение функции x константами в пространстве $L_p(\mathbf{T})$. Именно такие неравенства имеют приложения в теории аппроксимации, например, при решении задач приближения класса классом (см. гл. 7).

Ясно, что если для любой функции $x \in L^r_s(\mathbf{T})$ выполнено неравенство (4.1.7), то из него следует неравенство (4.1.11). Пусть теперь справедливо неравенство (4.1.11). Следует ли из него неравенство (4.1.7) с некоторой, не зависящей от x константой?

Ясно, что из (4.1.11) сразу вытекает неравенство

$$E_0(x^{(k)})_{L_q(\mathbf{T})} \le K_1 \|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})}. \tag{4.1.12}$$

Кроме того, если

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t)dt$$

является средним значением функции x на периоде, и $c_p(x)$ – константа наилучшего L_p-приближения для x, то имеем

$$|\hat{x}_0 - c_p(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t)dt - c_p(x)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (x(t) - c_p(x))dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |x(t) - c_p(x)|dt \le \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} |x(t) - c_p(x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} (2\pi)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/p}} E_0(x)_{L_p(\mathbf{T})}.$$

Таким образом,

$$|\hat{x}_0 - c_p(x)| \le \frac{1}{(2\pi)^{1/p}} E_0(x)_{L_p(\mathbf{T})} < E_0(x)_{L_p(\mathbf{T})}.$$

Теперь для любой функции $x \in L_p(\mathbf{T})$ можем записать

$$\|x - \hat{x}_0\|_{L_p(\mathbf{T})} \le \|x - c_p(x)\|_{L_p(\mathbf{T})} + \|\hat{x}_0 - c_p(x)\|_{L_p(\mathbf{T})} < 2E_0(x)_{L_p(\mathbf{T})},$$

т.е.

$$\|x - \hat{x}_0\|_{L_p(\mathbf{T})} < 2E_0(x)_{L_p(\mathbf{T})}. \tag{4.1.13}$$

Учитывая неравенство (4.1.13) и то, что $\hat{x}_0^{(k)} = 0$ (если $k \in \mathbf{N}$), для любой функции $x \in L_s^r(\mathbf{T})$ из неравенства (4.1.12) получаем

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{T})} < 2K_1 \|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})}.$$

Таким образом, очевидно, что при $k \in \mathbf{N}$ необходимые условия существования неравенств (4.1.7) *и* (4.1.11) *совпадают.*

При описании условий (4.1.4) и (4.1.8) будем использовать следующую удобную геометрическую интерпретацию. На координатной плоскости по оси абсцисс откладываются величины $1/q, 1/p, 1/s$, обратные параметрам метрик, а по оси ординат – значения параметров k, r. При этом тот факт, что $x \in L^r_{p,s}(G)$, изображается парой точек $A_{p,0}$ с координатами $(1/p, 0)$ и $A_{s,r}$ с координатами $(1/s, r)$, расположенных в прямоугольнике $P = [0,1] \times [0,r]$. Параметрам q и k, фигурирующим в левой части (4.1.3), соответствует точка $A_{q,k}$ с координатами $(1/q, k)$ в этом прямоугольнике. Вопрос о существовании неравенства типа (4.1.3) при заданном наборе параметров $k, r; q, p, s$ теперь может быть сформулирован так: при каком взаимном расположении точек $A_{q,k}$, $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$ возможны неравенства типа (4.1.3)?

В прямоугольнике P выделим два множества: 1) множество $\mathcal{K}$=$\mathcal{K}(p, s; r)$ – "колмогоровская область", состоящая из точек, расположенных правее или на отрезке $[A_{p,0}, A_{s,r}]$, соединяющем точки $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$; 2) множество $\Gamma = \Gamma(p, s; r)$ – "габушинская область", состоящая из точек, расположенных левее или на отрезке $[A_{p,0}, A_{s,r}]$.

Их пересечение будем называть “колмогоровским отрезком”. Разбиение на эти множества аналитически описывается следующим образом. Пусть

$$\Delta = \Delta(q,p,s;k,r) = \frac{1}{q} - \left(1 - \frac{k}{r}\right)\frac{1}{p} - \frac{k}{r}\frac{1}{s}.$$

Тогда $\Delta \geq 0$ в области $\mathcal{K}$, $\Delta = 0$ на отрезке $\mathcal{K} \cap \Gamma$, $\Delta \leq 0$ в области Γ.

С каждой из троек точек $A_{q,k}$, $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$ свяжем следующие числа:

$$\alpha_{\mathcal{K}} := 1 - \frac{k}{r}, \quad \alpha_{\Gamma} := \frac{r - k - s^{-1} + q^{-1}}{r - s^{-1} + p^{-1}}. \tag{4.1.14}$$

Тогда определение “критического показателя” в (4.1.8) можно переписать в виде

$$\alpha_{cr} = \min\{\alpha_{\mathcal{K}}, \alpha_{\Gamma}\}.$$

Легко видеть, что $\alpha_{\mathcal{K}} < \alpha_{\Gamma}$ в области $\mathcal{K} \setminus \Gamma$, $\alpha_{\mathcal{K}} > \alpha_{\Gamma}$ в области $\Gamma \setminus \mathcal{K}$ и $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\Gamma}$ на отрезке $\mathcal{K} \cap \Gamma$. Геометрический смысл числа α_{cr} следующий. Пусть $A_{q,k} \in \mathcal{K}$; сместимся от этой точки по горизонтали влево до встречи в точке $(1/q_{\mathcal{K}}, k)$ с отрезком $[A_{p,0}, A_{s,r}]$. Тогда $(\alpha_{cr}, 1-\alpha_{cr})$ являются барицентрическими координатами точки $(1/q_{\mathcal{K}}, k)$ относительно точек $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$. Если же $A_{q,k} \in \Gamma$, то будем двигаться от нее к отрезку $[A_{p,0}, A_{s,r}]$ по прямой с угловым коэффициентом 1. Пусть $(1/q_{\Gamma}, y)$ – декартовы координаты точки пересечения. Тогда $(\alpha_{cr}, 1 - \alpha_{cr})$ снова являются барицентрическими координатами точки $(1/q_{\Gamma}, y)$ относительно точек $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$.

Сформулированные выше условия (4.1.4), (4.1.5) и (4.1.8) теперь означают, что при заданных значениях $k, r; q, p, s$ неравенство (4.1.3) в случае $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$ возможно, если только $(1/q, k) \in \Gamma$, и при этом показатель α в (4.1.3) необходимо равен α_{Γ}.

Для периодических функций неравенства типов (4.1.7) и (4.1.11) возможны при любых значениях параметров $k, r; q, p, s$, если только $\alpha_{cr} = \alpha_{\Gamma}$ в габушинской области ($(1/q, k) \in \Gamma$) и $\alpha_{cr} = \alpha_{\mathcal{K}}$ в колмогоровской области ($(1/q, k) \in \mathcal{K}$).

4.2. Необходимые и достаточные условия

Пусть G – отрезок числовой прямой, прямая $\mathbf{R}$ или полупрямая $\mathbf{R}_+$.

Исследуем вопрос о необходимых и достаточных условиях на данный набор вещественных чисел $p, q, s \geq 1,\ k, r \in \mathbf{Z}_+\ \ (k < r)$, α, β, с которым для любой функции $x \in L^r_{p,s}(G)$ справедливо неравенство (4.1.3) с константой K, не зависящей от x.

Начнем с теоремы, представляющей самостоятельный интерес.

Теорема 4.2.1. *Если* $p, q, s \geq 1,\ 0 \leq k < r$,

$$\frac{r-k}{p} + \frac{k}{s} \geq \frac{r}{q}, \tag{4.2.1}$$

то для функций $x \in L^r_{p,s}(G)$ *при любом* δ $(0 < \delta \leq \operatorname{mes} G)$ *выполняется неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} \leq A\left(\delta^{-k-1/p+1/q}\|x\|_{L_p(G)} + \delta^{r-k-1/s+1/q}\|x^{(r)}\|_{L_s(G)}\right), \tag{4.2.2}$$

где A *не зависит от* δ *и* G.

Доказательство. Будем предполагать, что $\operatorname{mes} G < \infty$, так как случай $\operatorname{mes} G = \infty$ получается отсюда предельным переходом. Отметим, что условие (4.2.1) есть другая форма записи неравенства (4.1.4) и означает, что $A_{q,k} \in \Gamma(p, s; r)$.

Докажем неравенство (4.2.2) с помощью индукции по параметру r. Пусть $r = 1$ и, следовательно, $k = 0$. Фиксируем произвольную функцию $x \in L^1_{p,s}(G)$ и представим ее в виде

$$x(t) = x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} x'(u)du,$$

где t_1 выбирается по t так, чтобы $|t - t_1| \leq \delta$,

$$|x(t_1)| = \min_{t \in G_\delta} |x(t)|, \quad G_\delta = [t-\delta, t+\delta] \cap G.$$

По неравенству Гельдера

$$|x(t_1)| \le \delta^{-1/p}\|x\|_{L_p(G_\delta)}, \quad \int\limits_{t_1}^{t} |x'(u)|du \le \delta^{1-1/s}\|x'\|_{L_s(G_\delta)},$$

а так как

$$|x(t)| \le |x(t_1)| + \left|\int\limits_{t_1}^{t} x'(u)du\right|,$$

то отсюда следует неравенство (4.2.2) при $q = \infty$ с константой $A = 1$.

Чтобы доказать его в случае $q < \infty$, воспользуемся следующими двумя неравенствами:

$$\|x\|_{L_q(G)} = \left(\int\limits_G |x|^p|x|^{q-p}dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \|x\|^{1-p/q}_{L_\infty(G)}\|x\|^{p/q}_{L_p(G)}, \qquad (4.2.3)$$

$$\|x\|_{L_p(G)} \le \delta^{1/p}\left(\delta^{-1/p}\|x\|_{L_p(G)} + \delta^{1-1/s}\|x'\|_{L_s(G)}\right). \qquad (4.2.4)$$

Оценивая в (4.2.3) $\|x\|_{L_p(G)}$ и $\|x\|_{L_\infty(G)}$ с помощью (4.2.4) и в силу уже доказанного при $r = 1$ неравенства (4.2.2), будем иметь

$$\|x\|_{L_q(G)} \le \delta^{-1/p+1/q}\|x\|_{L_p(G)} + \delta^{1-1/s+1/q}\|x'\|_{L_s(G)},$$

т.е. теорема доказана при $r = 1,\ k = 0$.

Заметим, что при $q \ge p \ge 1$ для класса функций $L^1_{p,s}(G)$, $G = [a, b]$, выполняется неравенство

$$\|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_q(G)} \le 4\|x\|^{\alpha}_{L_p(G)}\|x'\|^{1-\alpha}_{L_s(G)}, \qquad (4.2.5)$$

где

$$\alpha = \frac{1 - 1/s + 1/q}{1 - 1/s + 1/p}, \quad 1 - \alpha = \frac{1/p - 1/q}{1 - 1/s + 1/p}$$

и точка $\xi \in G$ такова, что $|x(\xi)| = \min\limits_{t\in G}|x(t)|$.

В самом деле, положим $y(t) = x(t) - x(\xi)$. Из непрерывности функции $x(\cdot)$ вытекает, что $|x(t) - x(\xi)| \le |x(t)|$, и, следовательно,

$\|y\|_{L_p(G)} \le \|x\|_{L_p(G)}$. Пусть $G_1 = (-\infty, b]$, $G_2 = [a, \infty)$. Так как $y \in L^1_{p,s}(G)$ и $y(\xi) = 0$, то функции

$$y_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < t \le \xi, \\ y(t), & \text{если } \xi < t \le b, \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } a \le t < \xi, \\ 0, & \text{если } \xi \le t < \infty, \end{cases}$$

абсолютно непрерывны и

$$\|y_i\|_{L_p(G_i)} \le \|x\|_{L_p(G)},$$

$$\|y_i'\|_{L_s(G_i)} \le \|y'\|_{L_s(G)} = \|x'\|_{L_s(G)},$$

$$\|y\|_{L_q(G)} \le 2 \max_i \|y_i\|_{L_q(G_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, $y_i \in L^1_{p,s}(G_i)$, $i = 1, 2$, и по уже доказанному для $r = 1$ неравенству (4.2.2) с учетом приведенных выше соотношений между нормами при любом $\delta > 0$ имеем неравенство

$$\|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_q(G)} \le 2\Big(\delta^{-1/p+1/q}\|x\|_{L_p(G)} + \delta^{1-1/s+1/q}\|x'\|_{L_s(G)}\Big). \tag{4.2.6}$$

Полагая в (4.2.6)

$$\delta = \Big(\|x\|_{L_p(G)}\|x'\|^{-1}_{L_s(G)}\Big)^{(1-1/s+1/p)^{-1}},$$

получаем неравенство (4.2.5).

Покажем, что если $x \in L^2_{p,s}(G)$ $(p, q, s \ge 1)$ и x' имеет хотя бы один нуль на G, то при $1/p + 1/s \ge 2/q$

$$\|x'\|_{L_q(G)} \le K\|x\|^{\alpha}_{L_p(G)}\|x''\|^{1-\alpha}_{L_s(G)}, \tag{4.2.7}$$

где $\alpha = \dfrac{1 - 1/s + 1/q}{2 - 1/s + 1/p}$ и K не зависит от x и G.

Это утверждение тривиально, если $\|x''\|_{L_s(G)} = 0$, так как тогда $\|x'\|_{L_q(G)} = 0$. Предположим вначале, что x' не меняет знак на G и, следовательно, для любой точки $\eta \in G$

$$\|x(\cdot) - x(\eta)\|_{L_\infty(G)} \le \|x'\|_{L_1(G)} \le 2\|x(t) - x(\eta)\|_{L_\infty(G)}. \tag{4.2.8}$$

Так как $x \in L^2_{p,s}(G)$ и $\operatorname{mes} G < \infty$, то $x \in L^1_{p,q}(G)$, $x' \in L^1_{1,s}(G)$, и согласно неравенству (4.2.5)

$$\|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_\infty(G)} \le 4\|x\|^{\alpha_1}_{Lp(G)}\|x'\|^{1-\alpha_1}_{Lq(G)}, \tag{4.2.9}$$

$$\|x'\|_{Lq(G)} \le 4\|x'\|^{\alpha_2}_{L_1(G)}\|x''\|^{1-\alpha_2}_{Ls(G)}, \tag{4.2.10}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1-1/q}{1-1/q+1/p}, \quad \alpha_2 = \frac{1-1/s+1/q}{2-1/s}$$

и точка $\xi \in G$ такова, что $|x(\xi)| = \min\limits_{t\in G}|x(t)|$. Оценивая в (4.2.10) $\|x'\|_{L_1(G)}$ с помощью (4.2.8) и (4.2.9), получаем при $q > 1$ неравенство (4.2.7).

Если же $q = 1$, то из условия $1/p + 1/s \ge 2/q$ вытекает, что $p = s = 1$, и неравенство (4.2.7) следует из уже доказанного неравенства (4.2.9) для $p = 1$, $q = \infty$, соотношения (4.2.8) и оценки $\|x'\|_{L_\infty(G)} \le \|x''\|_{L_1(G)}$.

Докажем неравенство (4.2.7) в общем случае. Для этого рассмотрим множество точек разрыва функции $\operatorname{sgn} x'(\cdot)$. Это замкнутое множество разбивает отрезок G не более чем на счетное множество σ интервалов E_ν; при этом на каждом отрезке $\overline{E}_\nu$ функция x принадлежит $L^2_{p,s}(\overline{E}_\nu)$, а x' не меняет знак и имеет хотя бы один нуль. Поэтому, применяя сначала неравенство (4.2.7), а затем неравенство Иенсена [171, т. 1, с. 45] и замечая, что из условия $1/p + 1/s \ge 2/q$ вытекает соотношение $\alpha q/p + (1-\alpha)q/s \ge 1$, получаем

$$\|x'\|^q_{Lq(G)} = \sum_{\nu\in\sigma}\int\limits_{\overline{E}_\nu}|x'(t)|^q dt \le$$

$$\le \sum_{\nu\in\sigma} K\left(\int\limits_{\overline{E}_\nu}|x(t)|^p dt\right)^{\alpha q/p}\left(\int\limits_{\overline{E}_\nu}|x''(t)|^s dt\right)^{(1-\alpha)q/s} \le$$

$$\le K\|x\|^{\alpha q}_{Lp(G)}\|x''\|^{(1-\alpha)q}_{Ls(G)}.$$

Отсюда по теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем для любого $\delta > 0$ неравенство

$$\|x'\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq K\left(\delta^{-1-1/p+1/q}\|x\|_{L_p(G)}\right)^{\alpha}\left(\delta^{1-1/s+1/q}\|x''\|_{L_s(G)}\right)^{1-\alpha} \leq$$

$$\leq K\left(\delta^{-1-1/p+1/q}\|x\|_{L_p(G)} + \delta^{1-1/s+1/q}\|x''\|_{L_s(G)}\right). \quad (4.2.11)$$

Завершим доказательство теоремы 4.2.1 для $r = 2$, $k = 1$. Пусть $x \in L^2_{p,s}(G)$ и $P_1(t) = a_0 + a_1 t$ – полином наилучшего приближения функции $x(t)$ в метрике L_p. Положим $\phi(t) = x(t) - P_1(t)$. Легко проверить, что

$$\|\phi\|_{L_p(G)} \leq \|x\|_{L_p(G)}, \quad \|\phi''\|_{L_s(G)} = \|x''\|_{L_s(G)},$$

$$\|P_1\|_{L_p(G)} \leq 2\|x\|_{L_p(G)}.$$

Оценивая интегралы от $P_1(t)$ и $P_1'(t)$, получаем для любого δ $(0 < \delta < \operatorname{mes} G)$ соотношение

$$\|P_1'\|_{L_q(G)} \leq 2(\operatorname{mes} G)^{-1-1/p+1/q}\|P_1\|_{L_p(G)} \leq$$

$$\leq 4\delta^{-1-1/p+1/q}\|x\|_{L_p(G)}. \quad (4.2.12)$$

Ясно, что $\phi \in L^2_{p,s}(G)$, а так как графики $x(t)$ и $P_1(t)$ имеют по меньшей мере две общие точки, то $\phi'(t)$ имеет хотя бы один нуль на G. Из оценки (4.2.12) и неравенства (4.2.11) для функции $\phi(t)$ с учетом соотношений между нормами получаем при любом δ $(0 < \delta < \operatorname{mes} G)$ неравенство

$$\|x'\|_{L_q(G)} \leq \|P_1'\|_{L_q(G)} + \|\phi'\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq (K+4)\left(\delta^{-1-1/p+1/q}\|x\|_{L_p(G)} + \delta^{1-1/s+1/q}\|x''\|_{L_s(G)}\right).$$

Итак, теорема 4.2.1 для $r = 2,\ k = 1$ доказана.

Предположим, что теорема верна для всех $r \leq n$ и всех k $(0 < k < r)$. Докажем теперь ее для $r = n + 1$ и всех k $(0 < k \leq n)$.

Пусть $x \in L^{n+1}_{p,s}(G)$ и выполняются условия $p, q, s \geq 1$, $(n+1-k)/p+$ $+k/s \geq (n+1)/q$. Рассмотрим два случая: $k > 1$ и $k = 1$.

Пусть $k > 1$. Тогда найдется такое $q_1 \geq 1$, что

$$\frac{k-1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{q_1}, \tag{4.2.13}$$

$$\frac{n+1-k}{q_1} + \frac{k-1}{s} \leq \frac{n}{q}. \tag{4.2.14}$$

Из абсолютной непрерывности $x(t)$ и $x^{(k)}(t)$ и предположения $\operatorname{mes} G < \infty$ следует, что $x \in L^k_{p,q}(G)$. Равенство (4.2.13) представляет собой условие (4.2.1) для $x(t)$ в классе $L^k_{p,q}(G)$, а так как $k \leq n$, то по предположению индукции при всех δ_1 $(0 < \delta_1 < \operatorname{mes} G)$ имеем

$$\|x'\|_{L_{q_1}(G)} \leq$$

$$\leq A_1 \left(\delta_1^{-1-1/p+1/q_1} \|x\|_{L_p(G)} + \delta_1^{k-1-1/q+1/q_1} \|x^{(k)}\|_{L_q(G)}\right). \tag{4.2.15}$$

Аналогично, неравенство (4.2.14) – это условие (4.2.1) для $x'(t)$ в классе $L^n_{q_1,s}(G)$, и можно записать, что при всех δ $(0 < \delta < \operatorname{mes} G)$ справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq A_2 \left(\delta^{1-k-1/q_1+1/q} \|x'\|_{L_{q_1}(G)} + \delta^{n-k+1-1/s+1/q} \|x^{(n+1)}\|_{L_s(G)}\right). \tag{4.2.16}$$

Положим $\delta_1 = \gamma\delta$. Из (4.2.15) и (4.2.16) следует, что

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} \leq A_1 A_2 \gamma^{-1-1/p+1/q_1} \delta^{-k-1/p+1/q} \|x\|_{L_p(G)} +$$

$$+ A_1 A_2 \gamma^{k-1+1/q_1-1/q} \|x^{(k)}\|_{L_q(G)} +$$

$$+ A_2 \delta^{n+1-k-1/s+1/q} \|x^{(n+1)}\|_{L_s(G)}.$$

Выбирая γ так, чтобы $A_1 A_2 \gamma^{k-1+1/q_1-1/q} \leq \dfrac{1}{2}$, получаем

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq A\left(\delta^{-k-1/p+1/q}\|x\|_{L_p(G)} + \delta^{n-k+1-1/s+1/q}\|x^{(n+1)}\|_{L_s(G)}\right),$$

где

$$A = 2\max\left(A_1 A_2 \gamma^{-1-1/p+1/q_1},\ A_2\right).$$

Предположим, что $k = 1$. Тогда найдется такое $q_1 \geq 1$, что

$$\frac{n-1}{p} + \frac{1}{q_1} \geq \frac{n}{q}, \quad \frac{1}{q} + \frac{n-1}{s} = \frac{n}{q_1}$$

и

$$x(t) \in L^n_{p,q_1}(G), \quad x'(t) \in L^n_{q,s}(G).$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим и в этом случае неравенство (4.2.2).

Наконец, из неравенств (4.2.2) при $k = 0,\ r = 1$ и при $k = 1$ и произвольном r следует неравенство (4.2.2) при $k = 0$ и произвольном r, и теорема полностью доказана.

Теорема 4.2.2. *Пусть G – прямая $\mathbf{R}$ или полупрямая $\mathbf{R}_+$; $1 \leq p, q, s \leq \infty$; $\alpha \in (0,1)$; $k, r \in \mathbf{Z}_+$, $k < r$. Для того чтобы для функций $x \in L^r_{p,s}(G)$ выполнялось неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} \leq K\|x\|^{\alpha}_{L_p(G)}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(G)} \tag{4.2.17}$$

с константой K, не зависящей от x, необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha = \frac{r - k - s^{-1} + q^{-1}}{r - s^{-1} + p^{-1}}, \tag{4.2.18}$$

$$\frac{r-k}{p} + \frac{k}{s} \geq \frac{r}{q}, \tag{4.2.19}$$

причем $\alpha = 1$ при $r = 1,\ p = \infty,\ s = 1$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 4.1.1.

Для доказательства достаточности заметим, что неравенство (4.2.17) вытекает из (4.2.2) при

$$\delta = \left(\|x\|_{L_p(G)}\|x^{(r)}\|^{-1}_{L_s(G)}\right)^{\gamma},$$

где $\gamma = 1/(r - s^{-1} + p^{-1})$. Теорема доказана.

4.3. Критерий существования неравенств для периодических функций

Теорема 4.3.1. *Пусть* $1 \le p, q, s \le \infty$; $\alpha \in (0,1)$; $k, r \in \mathbf{Z}_+$, $k < r$. *Для того чтобы для любой функции* $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})$ *выполнялось неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_{Lq(\mathbf{T})} \le K\|x\|^{\alpha}_{Lp(\mathbf{T})}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{Ls(\mathbf{T})} \tag{4.3.1}$$

с константой K, *не зависящей от* x, *необходимо и достаточно, чтобы показатель* α *удовлетворял условию*

$$\alpha \le \alpha_{cr} = \min\{\alpha_{\mathcal{K}}, \alpha_{\Gamma}\}, \tag{4.3.2}$$

где $\alpha_{\mathcal{K}}$ *и* α_{Γ} *определены в* (4.1.14).

Доказательство. Необходимость условия (4.3.2) доказана в теореме 4.1.2.

Для доказательства достаточности покажем, что при выполнении (4.3.2) для любой функции $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})$ справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{Lq(\mathbf{T})} \le K_1 E_0(x)^{\alpha_{cr}}_{Lp(\mathbf{T})}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha_{cr}}_{Ls(\mathbf{T})} \tag{4.3.3}$$

с константой K_1, не зависящей от x. Отсюда в силу неравенства типа Бора–Фавара (см., например, [318])

$$E_0(x)_{Lp(\mathbf{T})} \le C\|x^{(r)}\|_{Ls(\mathbf{T})}, \tag{4.3.4}$$

где $C = C(p,s)$ не зависит от x, легко следует неравенство (4.3.1).

Итак, осталось доказать неравенство (4.3.3). Рассмотрим два случая: 1) $(1/q, k) \in \Gamma$; 2) $(1/q, k) \in \mathcal{K} \setminus \Gamma$.

В первом случае $\alpha_{cr} = \alpha_{\Gamma}$, и применяя неравенство (4.2.2) к сужению функции $x - c_p(x)$ (где $c_p(x)$ – константа наилучшего приближения функции x в пространстве $L_p(\mathbf{T})$) на отрезок $[0, 2\pi]$, будем иметь

$$\|x^{(k)}\|_{Lq(\mathbf{T})} \le$$

$$\leq A\left(\delta^{-k-1/p+1/q}E_0(x)_{L_p(\mathbf{T})}+\delta^{r-k-1/s+1/q}\|x^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{T})}\right) \tag{4.3.5}$$

для любого $\delta \leq 2\pi$, где A не зависит от δ. Положив в (4.3.5)

$$\delta=\left(\frac{E_0(x)_{L_p(\mathbf{T})}}{C\|x^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{T})}}\right)^{\frac{1}{r-1/s+1/p}}$$

(в силу (4.3.4) $\delta < 2\pi$), получим (4.3.3).

Рассмотрим теперь случай, когда $(1/q,k) \in \mathcal{K}\setminus\Gamma$. Здесь $\alpha_{cr} = 1-k/r$, и существует $q_k > q$, такое, что $(1/q_k,k) \in \Gamma\cap\mathcal{K}$. В силу уже доказанного справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{L_{q_k}(\mathbf{T})} \leq K_2 E_0(x)^{1-k/r}_{L_p(\mathbf{T})}\|x^{(r)}\|^{k/r}_{L_s(\mathbf{T})}, \tag{4.3.6}$$

где K_2 не зависит от x. Учитывая теперь монотонность норм

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(\mathbf{T})} \leq (2\pi)^{1/q-1/q_k}\left\|x^{(k)}\right\|_{L_{q_k}(\mathbf{T})},$$

из (4.3.6) получаем (4.3.3). Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы и замечания к теореме 4.1.2 следует, что критерий существования неравенств вида

$$E_0(x^{(k)})_{L_q(\mathbf{T})} \leq K E_0(x)^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})}$$

также выражается условием (4.3.2).

4.4. Существование неравенств с дробными производными

Рассмотрим другой метод доказательства неравенств вида (4.3.1), использующий анализ Фурье. Основой метода является теорема Литлвуда–Пэли (см. ниже теорему 4.4.1), которая позволяет совсем просто доказать (4.3.1). Однако надо иметь в виду, что неравенства Литлвуда–Пэли справедливы только для значений $p \in (1,\infty)$. Поэтому на таком пути не удается охватить все возможные значения параметров метрики.

Отметим еще одну особенность данного метода: с его помощью можно исследовать аналоги неравенств вида (4.3.1) для других (дифференциальных) операторов, отличных от $(d/dx)^k$.

Будем использовать понятие дробной производной в смысле Вейля [131]. Ниже приведены необходимые определения в удобном для нас виде.

Пусть $1 \le p \le \infty$. Через $L_{p,0}(\mathbf{T})$ обозначим пространство функций $x \in L_p(\mathbf{T})$, в среднем равных нулю на периоде, т.е. $\int\limits_0^{2\pi} x(t)dt = 0$.

Пусть $\gamma > 0$. Интеграл дробного порядка $I_\gamma x$ для функций $x \in L_{1,0}(\mathbf{T})$ определяется в виде свертки

$$I_\gamma x(t) := \int\limits_0^{2\pi} B_\gamma(t-u)x(u)du,$$

где

$$B_\gamma(u) := 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma}\cos\left(ku - \gamma\frac{\pi}{2}\right).$$

Отметим, что $I_\gamma x \in L_{1,0}(\mathbf{T})$. Соответствующее соболевское пространство определяется равенством

$$L_p^\gamma(\mathbf{T}) := \{y : y = I_\gamma x + c,\ x \in L_{p,0}(\mathbf{T}),\ c \in \mathbf{R}\}.$$

Положим далее $L_{p,0}^\gamma(\mathbf{T}) = L_p^\gamma(\mathbf{T}) \cap L_{p,0}(\mathbf{T})$. Отметим, что представление функции $y \in L_p^\gamma(\mathbf{T})$ в виде $y = I_\gamma x + c$ единственно. Поэтому дробная производная $D^\gamma y$ для функций $y \in L_p^\gamma(\mathbf{T})$ корректно определяется формулой

$$D^\gamma y := D^\gamma(I_\gamma x + c) = x.$$

Отметим, что $D^\gamma y \in L_{p,0}(\mathbf{T})$.

Положим $\mathbf{Z}_0 := \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Каждому $l \in \mathbf{Z}_0$ сопоставим подмножество $I_l := \{k \in \mathbf{Z}_0 : 2^{l-1} \le |k| < 2^l,\ \mathrm{sgn}k = \mathrm{sgn}l\}$ и для $x \in L_p(\mathbf{T})$ положим

$$(\delta_l x)(t) = \sum_{k \in I_l} \widehat{x}_k e^{ikt},$$

где $\widehat{x}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt, \quad k \in \mathbf{Z}$, – коэффициенты Фурье функции x.

Для краткости положим $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p(\mathbf{T})}$.

Нам понадобится следующая теорема Литлвуда–Пэли ([171, т. 2, гл. 15]).

Теорема 4.4.1. *Пусть* $\gamma > 0$; $1 < p < \infty$. *Тогда существуют константы* $K_1 > 0$ *и* $K_2 > 0$, *такие, что для любой функции* $x \in L_p^\gamma(\mathbf{T})$

$$K_1 \left\| \left(\sum_{l \in \mathbf{Z}_0} |2^{|l|\gamma}\delta_l x(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le \|D^\gamma x\|_p \le$$

$$\le K_2 \left\| \left(\sum_{l \in \mathbf{Z}_0} |2^{|l|\gamma}\delta_l x(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

В дальнейшем этот факт будем кратко записывать в виде

$$\|D^\gamma x\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{l \in \mathbf{Z}_0} |2^{|l|\gamma}\delta_l x(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

Теорема 4.4.2. *Пусть числа* $1 < p, s < \infty$, $0 < \gamma < r$ *заданы и* q *такое, что*

$$\frac{r}{q} = \frac{\gamma}{s} + \frac{r-\gamma}{p}$$

(т.е. $(1/q, \gamma) \in \Gamma \cap \mathcal{K}$*). Тогда существует константа* K, *такая, что для функций* $x \in L_s^r(\mathbf{T})$ *выполнено неравенство*

$$\|D^\gamma x\|_q \le K\|x\|_p^{1-\frac{\gamma}{r}}\|D^r x\|_s^{\frac{\gamma}{r}} .$$

Кратко этот факт будем выражать неравенством

$$\|D^\gamma x\|_q \ll \|x\|_p^{1-\frac{\gamma}{r}} \|D^r x\|_s^{\frac{\gamma}{r}}.$$

Доказательство. Ввиду теоремы Литлвуда–Пэли

$$\|D^\gamma x\|_q^q \asymp \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |2^{|l|\gamma}\delta_l x(t)|^2 \right)^{\frac{q}{2}} dt.$$

Подынтегральное выражение представим в виде

$$\left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |2^{|l|\gamma}\delta_l x(t)|^2 \right)^{\frac{q}{2}} = \left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |\delta_l x(t)|^{\frac{2(r-\gamma)}{r}} \left(2^{|l|\gamma} |\delta_l x(t)|^{\frac{2\gamma}{r}} \right) \right)^{\frac{q}{2}}.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $\dfrac{r}{r-\gamma}$ и $\dfrac{r}{\gamma}$, имеем

$$\left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |2^{|l|\gamma}\delta_l x(t)|^2 \right)^{\frac{q}{2}} \le \left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |\delta_l x(t)|^2 \right)^{\frac{r-\gamma}{r}\frac{q}{2}} \left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |2^{|l|r}\delta_l x(t)|^2 \right)^{\frac{\gamma}{r}\frac{q}{2}}.$$

Таким образом,

$$\|D^\gamma x\|_q^q \ll \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |\delta_l x(t)|^2 \right)^{\frac{r-\gamma}{r}\frac{q}{2}} \left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |2^{|l|r}\delta_l x(t)|^2 \right)^{\frac{\gamma}{r}\frac{q}{2}} dt.$$

Применяя для оценки последнего интеграла неравенство Гельдера с показателями $\dfrac{pr}{q(r-\gamma)}$ и $\dfrac{sr}{\gamma q}$ и снова пользуясь теоремой Литлвуда–Пэли, получаем

$$\|D^\gamma x\|_q^q \ll$$

$$\ll \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |\delta_l x(t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{q(r-\gamma)}{pr}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{l\in\mathbf{Z}_0} |2^{|l|r}\delta_l x(t)|^2 \right)^{\frac{s}{2}} dt \right)^{\frac{\gamma q}{sr}} \asymp$$

$$\asymp \|x\|_p^{q(1-\frac{\gamma}{r})} \|D^r x\|_s^{q\frac{\gamma}{r}}.$$

Таким образом,

$$\|D^\gamma x\|_q \ll \|x\|_p^{1-\frac{\gamma}{r}} \|D^r x\|_s^{\frac{\gamma}{r}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.4.3. *Пусть* p, s, γ *и* r *такие, как в теореме* 4.4.2. *Пусть также* q *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{p} + \frac{\gamma}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right) \le \frac{1}{q} < \infty.$$

(т.е. $(1/q, \gamma) \in \mathcal{K}$*). Тогда для функций* $x \in L_s^r(\mathbf{T})$

$$\|D^\gamma x\|_q \ll \|x\|_p^{1-\frac{\gamma}{r}} \|D^r x\|_s^{\frac{\gamma}{r}}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы 4.4.3 вытекает из теоремы 4.4.2 и следующего неравенства:

$$\|D^\gamma x\|_q \ll \|D^\gamma x\|_{q_1},$$

где $q \le q_1$. Последнее неравенство можно установить при помощи неравенства Гельдера следующим образом:

$$\|D^\gamma x\|_q^q = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D^\gamma x(t)|^q dt \le \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D^\gamma x(t)|^{q_1} dt\right)^{\frac{q}{q_1}} (2\pi)^{\frac{q_1-q}{q_1}}.$$

Полагая $\dfrac{1}{q_1} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{\gamma}{r}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{s}\right)$, имеем $q_1 \le q$ и, следовательно,

$$\|D^\gamma x\|_q \ll \|D^\gamma x\|_{q_1} \ll \|x\|_p^{1-\frac{\gamma}{r}} \|D^r x\|_s^{\frac{\gamma}{r}}.$$

Теорема доказана.

Нам понадобится следующая лемма (см. [171]).

Лемма 4.4.1. *Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Тогда для функций* $x \in L^{\gamma}_{q,0}(\mathbf{T})$

$$\|x\|_p \ll \|D^{\gamma}x\|_q,$$

где $\gamma = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.

Теорема 4.4.4. *Пусть* p, s, γ *и* r *такие, как в теореме* 4.4.2. *Пусть также* q *такое, что*

$$0 < \frac{1}{q} \le \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)$$

(т.е. $(1/q, \gamma) \in \Gamma$*). Тогда для любой функции* $x \in L^r_s(\mathbf{T})$

$$\|D^{\gamma}x\|_q \ll \|x\|_p^{\alpha}\|D^r x\|_s^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r - \gamma - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p}$.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме

$$\|D^{\gamma}x\|_q \ll \|D^{\gamma_1}x\|_{q_1}, \tag{4.4.1}$$

где

$$\gamma_1 = r\frac{\gamma - \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p}}{r - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{p}}$$

и

$$\frac{1}{q_1} = \frac{\left(\gamma - \dfrac{1}{q}\right)\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{p}\right) + \dfrac{r}{p}}{r - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{p}},$$

так что $\gamma_1 - \gamma = \dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{q}$, т.е. $\gamma_1 - \dfrac{1}{q_1} = \gamma - \dfrac{1}{q}$. Оценивая правую часть (4.4.1) с помощью теоремы 4.4.2, получаем

$$\|D^{\gamma}x\|_q \ll \|x\|_p^{1-\frac{\gamma_1}{r}}\|D^r x\|_s^{\frac{\gamma_1}{r}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{\gamma - \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p}}{r - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{p}}$$

и

$$1 - \frac{\gamma_1}{r} = \frac{r - \gamma - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{q}}{r - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{p}} = \alpha,$$

завершаем доказательство теоремы.

Заметим, что неравенства

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)$$

эквивалентны соответственно неравенствам

$$1 - \frac{\gamma}{r} \leq \frac{r - \gamma - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p} \quad \text{и} \quad 1 - \frac{\gamma}{r} \geq \frac{r - \gamma - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p}.$$

Поэтому теоремы 4.4.2–4.4.4 можно объединить в одну.

Теорема 4.4.5. *Пусть* $1 < p, s < \infty$, $0 < \gamma < r$. *Тогда для любой функции* $x \in L_s^r(\mathbf{T})$ *и для любого* $q \in (0, \infty)$ *выполняется неравенство*

$$\|D^\gamma x\|_q \ll \|x\|_p^{\alpha_{cr}} \|D^r x\|_s^{1-\alpha_{cr}}, \tag{4.4.2}$$

где $\alpha_{cr} = \min\left\{1 - \dfrac{\gamma}{r},\ \dfrac{r - \gamma - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p}\right\}$.

Следующая теорема дает критерий существования неравенств для дробных производных периодических функций.

Теорема 4.4.6. *Пусть* p, s, γ, r *такие, как в теореме* 4.4.5, *причем* $1/s - 1/p < r$. *Тогда для любой функции* $x \in L_s^r(\mathbf{T})$ *и для любого* $q \in (0, \infty)$ *справедливо неравенство*

$$\|D^\gamma x\|_q \ll \|x\|_p^{\alpha} \|D^r x\|_s^{1-\alpha}, \tag{4.4.3}$$

если и только если $-\infty < \alpha \leq \alpha_{cr}$.

Доказательство. Для доказательства достаточности установим справедливость неравенства

$$\|D^\gamma x\|_q \ll E_0(x)_p^\alpha \|D^r x\|_s^{1-\alpha}, \tag{4.4.4}$$

где $E_0(x)_p$ – наилучшее приближение функции x константами в пространстве $L_p(\mathbf{T})$.

Заметим, что наряду с неравенством (4.4.2), очевидно, выполняется неравенство

$$\|D^\gamma x\|_q \ll E_0(x)_p^\alpha E_0(x)_p^{\alpha_{cr}-\alpha} \|D^r x\|_s^{1-\alpha_{cr}}. \tag{4.4.5}$$

Если $p \le s$, то применяя для оценки второго сомножителя правой части (4.4.5) очевидные соотношения

$$E_0(x)_p \le \|x - \widehat{x}_0\|_p \ll \|D^\delta x\|_s, \quad \delta > 0, \tag{4.4.6}$$

с $\delta = r$, где $\widehat{x}_0$ – среднее значение функции x на периоде, сразу получаем неравенство (4.4.4). Пусть теперь $p > s$. Тогда, применяя теорему 4.4.5, лемму 4.4.1 и соотношения (4.4.6) с $\delta = r - \left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{p}\right)$ (заметим, что по условию $\delta > 0$), будем иметь

$$\|D^\gamma x\|_q \ll E_0(x)_p^\alpha E_0(x)_p^{\alpha_{cr}-\alpha} \|D^r x\|_s^{1-\alpha_{cr}} \ll$$

$$\ll E_0(x)_p^\alpha \|D^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} x\|_s^{\alpha_{cr}-\alpha} \|D^r x\|_s^{1-\alpha_{cr}} \ll$$

$$\ll E_0(x)_p^\alpha \|D^r x\|_s^{\alpha_{cr}-\alpha} \|D^r x\|_s^{1-\alpha_{cr}}.$$

Неравенство (4.4.4) установлено.

Для доказательства необходимости положим сначала в (4.4.3) $x_n(t) = \cos nt$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда должно быть

$$n^\gamma \ll n^{r(1-\alpha)},$$

так что необходимо

$$\gamma \le r(1-\alpha)$$

или

$$\alpha \le 1 - \frac{\gamma}{r}.$$

Тем самым для колмогоровской области $\mathcal{K}$ теорема доказана.

Пусть теперь $(1/q, \gamma) \in \Gamma$. Подставим в (4.4.3) y_n – полином Фейера (см., например, [318]), нормированный условием $\|y_n\|_p = 1$. Тогда, как известно (см. там же),

$$\|D^\gamma y_n\|_q \asymp n^{\gamma + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+},$$

$$\|D^\gamma y_n\|_s \asymp n^{r + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+}.$$

Поэтому должно быть

$$\gamma + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ \le (1-\alpha)\left(r + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+\right),$$

т.е.

$$\alpha \le \frac{r - \gamma + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+ - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+}{r + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+}.$$

В случае, когда $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{s}$, получаем

$$\alpha \le \frac{r - \gamma - \frac{1}{s} - \frac{1}{q}}{r + \frac{1}{p} - \frac{1}{s}}.$$

Пусть теперь $\dfrac{1}{p} \le \dfrac{1}{s}$. Тогда подставим в (4.4.3) z_n – функцию из $L^r_s(\mathbf{T})$, ортогональную пространству $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$, нормированную условием $\|z_n\|_s = 1$. В силу неравенств типа Фавара (см., например, [318])

$$\|z_n\|_p \ll n^{-r + \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{s'}\right)_+} \|D^r z_n\|_s, \tag{4.4.7}$$

поэтому из (4.4.3) следует

$$\|D^\gamma z_n\|_q \ll \|D^r z_n\|_s n^{\left(-r + \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{s'}\right)_+\right)\alpha}. \tag{4.4.8}$$

С другой стороны, неравенство Фавара является точным по порядку при $n \to \infty$. Это, в частности, означает, что

$$\sup_{z_n \perp \mathcal{T}_n} \frac{\|D^\gamma z_n\|_q}{\|D^r z_n\|_s} \gg n^{-r+\gamma+\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{s'}\right)_+}. \tag{4.4.9}$$

Так как $\dfrac{1}{p} \le \dfrac{1}{s}$, то $\dfrac{1}{p'} \ge \dfrac{1}{s'}$ и в габушинской области Γ выполнено неравенство $\dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{s}$. Следовательно, $\dfrac{1}{s'} < \dfrac{1}{q'}$. Поэтому из справедливости (4.4.3) для z_n, (4.4.8) и (4.4.9) вытекает неравенство

$$-r+\gamma+\frac{1}{q'}-\frac{1}{s'} \le \left(-r+\frac{1}{p'}-\frac{1}{s'}\right)\alpha$$

или

$$-r+\gamma-\frac{1}{q}+\frac{1}{s} \le \left(-r-\frac{1}{p}+\frac{1}{s}\right)\alpha.$$

Следовательно,

$$\alpha \le \frac{r-\gamma-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{q}}{r-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{p}}.$$

Таким образом, и в габушинской области Γ теорема также справедлива. Теорема полностью доказана.

4.5. Сравнение точных констант в неравенствах для производных функций, заданных на вещественной оси и окружности

В данном параграфе будет показано, что для точных констант

$$K = K(G) = K_{k,r}(G;q,p,s;\alpha) := \sup_{\substack{x \in L^r_{p,s}(G) \\ x^{(r)} \ne 0}} \frac{\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(G)}}{\|x\|^\alpha_{L_p(G)} \left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_{L_s(G)}}$$

в неравенствах типа Колмогорова справедливы следующие соотношения: $K(\mathbf{R}) \le K(\mathbf{T})$ в габушинской области Γ; $K(\mathbf{R}) = K(\mathbf{T})$ на колмогоровском отрезке $\mathcal{K}$.

Точнее, имеют место следующие две теоремы.

Теорема 4.5.1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $1 \le q, p, s \le \infty$. *Тогда, если* $A_{q,k} := (1/q, k) \in \Gamma := \Gamma(p, s; r)$, *то выполняется неравенство*

$$K(\mathbf{R}) \le K(\mathbf{T}), \tag{4.5.1}$$

где $K(\mathbf{R}) := K_{k,r}(\mathbf{R}; q, p, s; \alpha)$; $K(\mathbf{T}) := K_{k,r}(\mathbf{T}; q, p, s; \alpha)$;

$$\alpha = \alpha_{cr} = \frac{r - k - s^{-1} + q^{-1}}{r - s^{-1} + p^{-1}}.$$

Теорема 4.5.2. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $1 \le q, p, s \le \infty$. *Тогда, если* $A_{q,k} = (1/q, k) \in \mathcal{K} \cap \Gamma = \mathcal{K}(p, s; r) \cap \Gamma(p, s; r)$, *то*

$$K_{k,r}(\mathbf{R}; q, p, s; 1 - k/r) = K_{k,r}(\mathbf{T}; q, p, s; 1 - k/r). \tag{4.5.2}$$

Отметим, что в общем случае, когда $A_{q,k} \in \Gamma$, равенство в (4.5.1) (впрочем как и строгое неравенство) не гарантируется (соответствующие примеры приведены в комментариях после доказательства теорем 4.5.1 и 4.5.2).

Перейдем к доказательству теорем. Отметим сразу, что случай $p = s = \infty$ (при этом и $q = \infty$) можно исключить, так как при таких значениях параметров равенство (4.5.2) следует из неравенства Колмогорова (2.3.1). Поэтому в дальнейшем будем считать выполненным условие

$$\min\{p, s\} < \infty. \tag{4.5.3}$$

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 4.5.1 (см., например, [253, с. 211]). *Существует последовательность четных функций* $\{\eta_l\}_{l \in \mathbf{N}}$ *со следующими специальными свойствами:*

1) $\forall l \in \mathbf{N}$ $\eta_l(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

2) $\eta_l(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$;

3) $\eta_l(t) = 0$, *если* $|t| > l + 1$;
4) $0 \le \eta_l(t) \le 1 \ \ \forall t \in \mathbf{R}^1$;
5) $\eta_l(t) = 1, \quad$ *если* $\ |t| \le l$;
6) $\forall l \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [l+1, l+2] \quad \eta_{l+1}(t) = \eta_l(t-1)$.

Отметим, что для любого $i \in \mathbf{N}$ и любого l $\sup \eta_l^{(i)} \subset \Delta_l :=$ $:= [-l-1, l+1]$.

Условимся в дальнейшем через $\|x\|_{p,\Delta_l}$ обозначать $\|x\|_{L_p(\Delta_l)}$.

Из теоремы 4.2.1 вытекает следующая лемма.

Лемма 4.5.2. *При любых фиксированных* $r \in \mathbf{N}$, $q, p, s \in [1, \infty]$ *существуют константы* A *и* B, *не зависящие от* l *и* k, *такие, что* $\forall x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ *при всех* $k = 0, 1, ..., r-1$

$$\|x^{(k)}\|_{q,\Delta_l} \le A\|x\|_{p,\Delta_l} + B\|x^{(r)}\|_{s,\Delta_l}. \tag{4.5.4}$$

Лемма 4.5.3. *Пусть* $q, p, s \in [1, \infty]$, $\min\{p, s\} < \infty$, $k, r, \in \mathbf{N}$, $k < r$, *и значения параметров такие, что*

$$A_{q,k} \in \Gamma(p, s; r).$$

Тогда для любой функции $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ *найдется последовательность* $\{y_l, l \in \mathbf{N}\}$ *бесконечно дифференцируемых функций из* $L^r_{p,s}(\mathbf{R})$, *таких, что при* $l \to \infty$

$$\|y_l\|_{L_p(\mathbf{R})} \to \|x\|_{L_p(\mathbf{R})}, \tag{4.5.5}$$

$$\|y_l^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})} \to \|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})}, \tag{4.5.6}$$

$$\|y_l^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})} \to \|x^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})}. \tag{4.5.7}$$

Доказательство леммы 4.5.3. Так как $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ и $A_{q,k} \in \Gamma$, то правые части в (4.5.5)–(4.5.7) конечны. Положим $y_l = x\eta_l$, где η_l определены в лемме 4.5.1. Соотношение (4.5.5) очевидно, а (4.5.6) и (4.5.7) будем доказывать одновременно (для этого в (4.5.6) полагаем $k = r$, считая, что $q = s$). Имеем

$$y_l^{(k)} = x^{(k)}\eta_l + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i x^{(i)} \eta_l^{(k-i)}. \tag{4.5.8}$$

Ясно, что при $l \to \infty$

$$\|x^{(k)}\eta_l\|_{L_q(\mathbf{R})} \to \|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})}. \tag{4.5.9}$$

Кроме того, $\forall i, i < k$,

$$\sup(x^{(i)}\eta_l^{(k-i)}) \subset \sup(\eta_l^{(k-i)}) \subset \Delta_l := [-l-1, l+1], \tag{4.5.10}$$

и найдется $C > 0$, такое, что для всех $i \le r$ и всех $l \in \mathbf{N}$

$$\|\eta_l^{(i)}\|_\infty \le C. \tag{4.5.11}$$

Пусть сначала $s < \infty$ или $s = \infty$, но $i < r - 1$. Ввиду (4.5.8), (4.5.9) для доказательства (4.5.6) и (4.5.7) достаточно установить, что при $l \to \infty$

$$\left\| \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i x^{(i)} \eta_l^{(k-i)} \right\|_{L_q(\mathbf{R})} \to 0. \tag{4.5.12}$$

Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что при любом $i = 0, 1, ..., k-1$

$$\|x^{(i)}\eta_l^{(k-i)}\|_{L_q(\mathbf{R})} \to 0, \quad l \to \infty. \tag{4.5.13}$$

Ввиду (4.5.11) имеем

$$\|x^{(i)}\eta_l^{(k-i)}\|_{L_q(\mathbf{R})} \le C\|x^{(i)}\|_{q,\Delta_l}.$$

Выберем $p_i \in (q, \infty)$ так, чтобы $(1/p_i, i) \in \Gamma(p, s; r)$, т.е. чтобы выполнялось условие (4.2.19). Из теоремы 4.2.2 тогда следует, что $x^{(i)} \in L_{p_i}(\mathbf{R})$. Применяя неравенство (4.5.4) в виде

$$\|x^{(i)}\|_{q,\Delta_l} \le A\|x^{(i)}\|_{p_i,\Delta_l} + B\|x^{(r)}\|_{s,\Delta_l}$$

и учитывая, что при $l \to \infty$ (в случае, если $s < \infty$)

$$\|x^{(i)}\|_{p_i,\Delta_l} \to 0 \ \text{ и } \ \|x^{(r)}\|_{s,\Delta_l} \to 0,$$

получаем (4.5.13). В случае $s = \infty$ и $i < r - 1$ положим $s_1 = rp/(r-1)$ и применим неравенство (4.5.4) в виде

$$\|x^{(i)}\|_{q,\Delta_l} \le A\|x^{(i)}\|_{p_i,\Delta_l} + B\|x^{(r-1)}\|_{s_1,\Delta_l}$$

(p_i такое, как и в предыдущем случае). Снова учитывая, что при $l \to \infty$

$$\|x^{(i)}\|_{p_i,\Delta_l} \to 0 \ \text{ и } \ \|x^{(r-1)}\|_{s_1,\Delta_l} \to 0,$$

получаем (4.5.13). Итак, в случае $s < \infty$ при всех i и $s = \infty$ при $i < r - 1$ все доказано.

Осталось рассмотреть случай, когда $s = \infty$ и $i = r - 1$. Здесь будем пользоваться тем легко проверяемым фактом, что если $x \in L^1_{p,\infty}(\mathbf{R})$, $p < \infty$, то

$$\|x\|_{\infty,\Delta_l} \to 0 \ \text{ при } \ l \to \infty. \tag{4.5.14}$$

Надо доказать, что

$$\|x^{(r-1)}\eta_l'\|_{L_q(\mathbf{R})} \to 0, \ \ l \to \infty. \tag{4.5.15}$$

Применяя (4.5.11) и учитывая то, что $x^{(r-1)} \in L^1_{p_1,\infty}(\mathbf{R})$, где $p_1 = rp/(r-1)$, получаем

$$\|x^{(r-1)}\eta'\|_{q,\Delta_l} \le C\|x^{(r-1)}\|_{q,\Delta_l} \le 2^{1/q}C\|x^{(r-1)}\|_{\infty,\Delta_l}.$$

Отсюда с учетом (4.5.14) выводим (4.5.15). Лемма 4.5.3 доказана.

Доказательство теоремы 4.5.1. Существенным является тот факт, что константа $K(\mathbf{T})$ в неравенстве для периодических функций с периодом 2π в случае, когда $A_{q,k} \in \Gamma$ и $\alpha = \alpha_{cr}$, на самом деле не зависит от величины периода. Действительно, обозначим $l\mathbf{T}$, $l > 0$, – отрезок $[0, 2\pi l]$ с отождествленными концами. Для функции $x \in L^r_{p,s}(l\mathbf{T})$ положим $y(t) = x(lt)$, $t \in \mathbf{T}$. Ясно, что $y \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})$, и

$$K(\mathbf{T}) = \sup_{y \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})} \frac{\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{T})}}{\|y\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})}\|y^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})}} =$$

$$= \sup_{x \in L^r_{p,s}(l\mathbf{T})} \frac{l^{k-1/q}\|x^{(k)}\|_{L_q(l\mathbf{T})}}{\left(l^{-1/p}\|x\|_{L_p(l\mathbf{T})}\right)^{\alpha}\left(l^{r-1/s}\|x^{(r)}\|_{L_s(l\mathbf{T})}\right)^{1-\alpha}} =$$

$$= l^{k-1/q+\alpha/p-(r-1/s)(1-\alpha)}K(l\mathbf{T}).$$

Осталось заметить, что при $\alpha = \alpha_{cr}$ выполняется равенство

$$k - \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{p} - \left(r - \frac{1}{s}\right)(1-\alpha) = 0.$$

Перейдем к доказательству неравенства (4.5.1). Выберем произвольно $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ и $\varepsilon > 0$. Пользуясь леммой 4.5.3, находим финитную функцию $y \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$, такую, что

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})} \le (1+\varepsilon)\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})}, \quad \|x\|_{L_p(\mathbf{R})} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}\|y\|_{L_p(\mathbf{R})},$$

$$\|x^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}\|y^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})}.$$

Выберем положительное число l, большее длины носителя функции y, и положим

$$\tilde{y}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y(t + 2\pi l\nu).$$

Ясно, что $\tilde{y} \in L^r_{p,s}(l\mathbf{T})$ и при $\alpha = \alpha_{cr}$ имеем

$$\frac{\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})}}{\|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{R})}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{R})}} \le$$

$$\le \frac{(1+\varepsilon)\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})}}{\left((1+\varepsilon)^{-1}\|y\|_{L_p(\mathbf{R})}\right)^{\alpha}\left((1+\varepsilon)^{-1}\|y^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})}\right)^{1-\alpha}} =$$

$$= (1+\varepsilon)^2\frac{\|\tilde{y}^{(k)}\|_{L_q(l\mathbf{T})}}{\|\tilde{y}\|^{\alpha}_{L_p(l\mathbf{T})}\|\tilde{y}^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(l\mathbf{T})}} \le (1+\varepsilon)^2 K(l\mathbf{T}) = (1+\varepsilon)^2 K(\mathbf{T}).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует (4.5.1). Теорема 4.5.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.5.2. Пусть $\mathbf{T}_1$ – отрезок $[0,1]$ с отождествленными концами. Возьмем произвольно $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T}_1)$. Предположим, что q такое, что $A_{q,k} = (1/q, k) \in \mathcal{K} \cap \Gamma$ и, следовательно, $\alpha = \alpha_{cr} = 1 - k/r$. Тогда $1/q - \alpha/p - (1-\alpha)/s = 0$. Положим

$$y_l(t) = x(t)\eta_l(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad l \in \mathbf{N}.$$

Учитывая свойства функции η_l (см. лемму 4.5.1), имеем

$$\|y_l^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})} \geq (2l)^{1/q}\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{T}_1)},$$

$$\|y_l\|_{L_p(\mathbf{R})} \leq (2l+2)^{1/p}\|x\|_{L_p(\mathbf{T}_1)},$$

$$\|y_l^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})} = \|x^{(r)}\eta_l + \sum_{i=1}^{r} C_r^i x^{(r-i)}\eta_l^{(i)}\|_{L_s(\mathbf{R})} \leq$$

$$\leq \|x^{(r)}\eta_l\|_{L_s(\mathbf{R})} + \sum_{i=1}^{r} C_r^i \|x^{(r-i)}\eta_l^{(i)}\|_{L_s(\mathbf{R})} \leq$$

$$\leq (2l+2)^{1/s}\|x^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{T}_1)} + 2M\sum_{i=1}^{r} C_r^i \|x^{(r-i)}\|_{L_s(\mathbf{T}_1)},$$

где $M = \max\limits_{1\leq i\leq r} \|\eta_l^{(i)}\|_\infty$ не зависит от l. При оценке $\|x^{(r-i)}\eta_l^{(i)}\|_{L_s(\mathbf{R})}$ мы использовали тот факт, что $\eta_l^{(i)} = 0$ вне двух интервалов длины 1.

Из полученных оценок следует, что при любом $l \in \mathbf{N}$

$$K(\mathbf{R}) \geq \frac{\|y_l^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})}}{\|y_l\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{R})}\|y_l^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{R})}} \geq$$

$$\geq \frac{(2l)^{1/q}\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{T}_1)}\left((2l+2)^{1/p}\|x\|_{L_p(\mathbf{T}_1)}\right)^{-\alpha}}{\left((2l+2)^{1/s}\|x^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{T}_1)}+2M\sum\limits_{i=1}^{r}C_r^i\|x^{(r-i)}\|_{L_s(\mathbf{T}_1)}\right)^{1-\alpha}}=:$$

$$=: F(l).$$

Так как при $\alpha=\alpha_{cr}=1-k/r$ будет $1/q-\alpha/p-(1-\alpha)/s=0$ и, следовательно,

$$\lim_{l\to\infty}\frac{(2l)^{1/q}}{(2l+2)^{\alpha/p}(2l+2)^{(1-\alpha)/s}}=1,$$

то при $l\to\infty$ получаем

$$F(l)\to\frac{\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{T}_1)}}{\|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T}_1)}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T}_1)}}.$$

Отсюда следует, что $K(\mathbf{R})\geq K(\mathbf{T}_1)=K(\mathbf{T})$. Теорема 4.5.2 доказана.

Комментарии к теоремам 4.5.1 и 4.5.2

В связи с неравенством (4.5.1) приведем примеры, показывающие, что в габушинской области Γ для констант $K(\mathbf{T})$ и $K(\mathbf{R})$ возможны как равенство

$$K(\mathbf{T})=K(\mathbf{R}), \tag{4.5.16}$$

так и строгое неравенство

$$K(\mathbf{T})>K(\mathbf{R}). \tag{4.5.17}$$

Рассмотрим случай $q=\infty$, $p=s=2$. Л.В. Тайков [310] доказал, что

$$K_{k,r}(\mathbf{R};\infty,2,2)=\pi^{-1/2}\beta_{r,k}A_{r,k}, \tag{4.5.18}$$

где $\beta_{r,k}=\left(\dfrac{2r}{2k+1}\right)^{(2k+1)/4r}\left(\dfrac{2r}{2r-2k-1}\right)^{(2r-2k-1)/4r}$, и

$$A^2_{r,k}=\int\limits_0^\infty\frac{x^{2k}}{1+x^{2r}}dx=\frac{\pi}{2}\left(r\sin\frac{2k+1}{2r}\pi\right)^{-1}. \tag{4.5.19}$$

В работе А.Ю. Шадрина [341] доказано, что

$$K_{k,r}(\mathbf{T};\infty,2,2)=\pi^{-1/2}\beta_{r,k}\sup_{t>0}A_{r,k}(t), \tag{4.5.20}$$

где

$$A^2_{r,k}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2k+1}n^{2k}}{1+t^{2r}n^{2r}}$$

есть "интегральная сумма" для $A^2_{r,k}$ (см. (4.5.19)), т.е. $A^2_{r,k}=$ $=\lim\limits_{t\to 0}A^2_{r,k}(t)$.

Приведем простые оценки, показывающие, что при некоторых значениях параметров k,r

$$\sup_{t>0}A_{r,k}(t)>\lim_{t\to 0}A_{r,k}(t). \tag{4.5.21}$$

Пусть $r\geq 7$, $2\leq k\leq (r-1)/2$. Так как $\sin t\geq 2t/\pi$ при $t\in(0,\pi/2]$, то

$$A^2_{r,k}=\frac{\pi}{2r}\left(\sin\frac{2k+1}{2r}\pi\right)^{-1}<\frac{\pi}{2(2k+1)}.$$

С другой стороны,

$$\sup_{t>0}A^2_{r,k}(t)\geq A^2_{r,k}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2k}}{1+n^{2r}}>\frac{1}{2},$$

и при сделанных предположениях $\dfrac{\pi}{2(2k+1)}<\dfrac{1}{2}$, т.е. выполнено (4.5.21). Теперь из (4.5.18)–(4.5.21) следует (4.5.17).

Рассмотрим другую ситуацию, в которой будет выполнено (4.5.16).

В работе В.И. Арестова [7], в частности, доказано, что при любом $s\in(1,\infty)$

$$K_{1,2}(\mathbf{R};\infty,\infty,s;\alpha)=2^{\frac{s-1}{2s-1}}\left(\frac{2s-1}{2s}\right)^{\frac{s}{2s-1}}, \tag{4.5.22}$$

где $\alpha = \alpha_{cr} = (1-1/s)/(2-1/s)$. В [75] доказано точное неравенство

$$\|x'\|_{L_\infty}(\mathbf{T}) \le 2^{\frac{1-s'}{1+s'}} \left(\frac{s'+1}{s'}\right)^{\frac{s'}{s'+1}} E_0(x)_{L_\infty(\mathbf{T})}^{\frac{1}{s'+1}} E_0(x'')_{L_s(\mathbf{T})}^{\frac{s'}{s'+1}}, \tag{4.5.23}$$

где $s \in (1,\infty)$, $s' = s(s-1)^{-1}$; $E_0(x)_{L_\infty(\mathbf{T})}-$ наилучшее равномерное приближение функции x константами.

Из (4.5.22) и (4.5.23) следует, что

$$K_{1,2}(\mathbf{T};\infty,\infty,s;\alpha) \le 2^{\frac{1-s'}{1+s'}} \left(\frac{s'+1}{s'}\right)^{\frac{s'}{s'+1}} = K_{1,2}(\mathbf{R};\infty,\infty,s;\alpha),$$

и, значит, с учетом теоремы 4.5.1 получаем для этих значений параметров равенство (4.5.16).

Приведенный пример допускает обобщение, которое сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 4.5.1. *Пусть* $r=2$, $k=1$; $p=\infty$, $s\in[1,\infty)$, $q \ge 2s$; $\alpha = \alpha_{cr} = (1+1/q-1/s)/(2-1/s)$. *Тогда*

$$K_{1,2}(\mathbf{R};q,\infty,s;\alpha) = K_{1,2}(\mathbf{T};q,\infty,s;\alpha).$$

Доказательство. Ясно, что при указанных значениях параметров $A_{q,k} = (1/q,k) \in \Gamma$. Поэтому в силу теоремы 4.5.1

$$K_{1,2}(\mathbf{R};q,\infty,s;\alpha) \le K_{1,2}(\mathbf{T};q,\infty,s;\alpha),$$

и для доказательства утверждения достаточно установить неравенство противоположного смысла. Для этого фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $x \in L_s^2(\mathbf{T})$ так, чтобы

$$\frac{\|x'\|_{L_q(\mathbf{T})}}{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{T})}^{\alpha} \|x''\|_{L_s(\mathbf{T})}^{1-\alpha}} > (1-\varepsilon)K_{1,2}(\mathbf{T};q,\infty,s;\alpha).$$

Без ограничения общности можно считать, что $\max\limits_t x(t) = x(\pi)$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{x}(t) := \begin{cases} x(t), & \text{если } |t| \le \pi, \\ x(\pi), & \text{если } |t| > \pi. \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{x} \in L^2_{\infty,s}(\mathbf{R})$, причем $\|\tilde{x}'\|_{L_q(\mathbf{R})} = \|x'\|_{L_q(\mathbf{T})}$, $\|\tilde{x}\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T})}$, $\|\tilde{x}''\|_{L_s(\mathbf{R})} = \|x''\|_{L_s(\mathbf{T})}$. Таким образом,

$$K_{1,2}(\mathbf{R}; q, \infty, s; \alpha) \geq \frac{\|\tilde{x}'\|_{L_q(\mathbf{R})}}{\|\tilde{x}\|^{\alpha}_{L_\infty(\mathbf{R})} \|\tilde{x}''\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{R})}} =$$

$$= \frac{\|x'\|_{L_q(\mathbf{T})}}{\|x\|^{\alpha}_{L_\infty(\mathbf{T})} \|x''\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})}} > (1-\varepsilon) K_{1,2}(\mathbf{T}; q, \infty, s; \alpha).$$

Ввиду произвольности ε отсюда получаем

$$K_{1,2}(\mathbf{R}; q, \infty, s; \alpha) \geq K_{1,2}(\mathbf{T}; q, \infty, s; \alpha).$$

Тем самым утверждение доказано.

4.6. Условия существования аддитивных неравенств на конечном интервале

Как уже отмечалось (см. § 1.7), мультипликативные неравенства для норм производных функций, заданных на отрезке, вообще говоря, не выполняются. Естественной формой неравенств для производных в этом случае является аддитивная форма.

В данном параграфе приведем достаточные условия существования аддитивных неравенств вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \leq A \|x\|_{L_p[a,b]} + B \left\|x^{(r)}\right\|_{L_s[a,b]}. \tag{4.6.1}$$

Кроме того, установим взаимосвязь неравенств вида (4.6.1) с неравенствами типа Маркова–Никольского

$$\left\|P^{(k)}_{r-1}\right\|_{L_q[a,b]} \leq M \|P_{r-1}\|_{L_p[a,b]} \tag{4.6.2}$$

для алгебраических полиномов P_{r-1} степени не выше $r-1$. В частности, будет установлена взаимосвязь между наименьшей константой $A = A^*_{r,k}(q,p,s)$ при норме функции в неравенстве (4.6.1)

и наименьшей константой $M = M^*_{r,k}(q,p)$ в неравенстве (4.6.2) (точные определения приведены ниже). Нетрудно заметить, что $A^*_{r,k}(q,p,s) \geq M^*_{r,k}(q,p)$. Установим, что на самом деле выполняется равенство

$$A^*_{r,k}(q,p,s) = M^*_{r,k}(q,p). \tag{4.6.3}$$

Чтобы придать нашим результатам большую общность, рассмотрим вначале одну общую схему получения аддитивных неравенств. С ее помощью мы не только решим поставленные выше задачи, но и получим ряд других следствий (см. § 9.5).

Пусть X, Y – группы по сложению; $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ – неотрицательные полуаддитивные вещественные функционалы на X и Y соответственно. Пусть также заданы отображение T,

$$X \supset D(T) \xrightarrow{T} Y,$$

такое, что

$$\forall x \in D(T) \qquad (\|x\|_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \|Tx\|_Y = 0), \tag{4.6.4}$$

и функционал F

$$X \supset D(F) \xrightarrow{F} \mathbf{R},$$

причем

$$D(F) \subset D(T) \tag{4.6.5}$$

(здесь и ниже $D(A)$ обозначает область определения отображения A).

Нас будут интересовать условия, обеспечивающие существование констант A и B, таких, что для любого $x \in D(F)$ выполняется неравенство

$$\|Tx\|_Y \leq A\,\|x\|_X + BF(x), \tag{4.6.6}$$

а также вопрос о точных постоянных в этом неравенстве. Положим

$$A^* = A^*(X,Y,T,F) = \inf A, \tag{4.6.7}$$

где $\inf$ берется по всевозможным A, таким, что с некоторой константой B неравенство (4.6.6) справедливо для любого $x \in D(F)$. Далее, пусть

$$B^* = B^*(X,Y,T,F) = \inf B, \tag{4.6.8}$$

где $\inf$ берется по всем B, таким, что неравенство (4.6.6) справедливо для любого $x \in D(F)$ с константой $A = A^* = A^*(X, Y, T, F)$.

Условия, обеспечивающие принципиальную возможность выполнения неравенства (4.6.6), а также некоторая информация о константах A^* и B^* содержатся в следующей теореме.

Теорема 4.6.1. *Предположим, что найдется подмножество* $H \subset D(T)$, *такое, что:*

1) $M^* = M^*(X, Y, T, H) := \sup\limits_{\substack{\|y\|_X \neq 0 \\ y \in H}} \frac{\|Ty\|_Y}{\|y\|_X} < \infty$;

2) *существует* $\widetilde{B} > 0$, *такое, что для любого* $x \in D(F)$

$$\inf_{y \in H} \{M^* \|y - x\|_X + \|Tx - Ty\|_Y\} \leq \widetilde{B} F(x).$$

Тогда для любого $x \in D(F)$

$$\|Tx\|_Y \leq M^* \|x\|_X + \widetilde{B} F(x), \tag{4.6.9}$$

так что

$$A^*(X, Y, T, F) \leq M^*(X, Y, T, H). \tag{4.6.10}$$

Если дополнительно предположить, что $H \subset D(F)$ *и* $F(y) = 0$ *для любого* $y \in H$, *то в неравенстве* (4.6.9) *константу при* $\|x\|_X$ *уменьшить нельзя, т.е. в* (4.6.10) *имеет место равенство и, кроме того,*

$$B^*(X, Y, T, F) \leq \widetilde{B}.$$

Доказательство. Учитывая полуаддитивность функционала $\|\cdot\|_Y$, для любых $x \in D(T)$ и $y \in H$, имеем

$$\|Tx\|_Y = \|Tx + (-Ty + Ty)\|_Y = \|(Tx - Ty) + Ty\|_Y \leq$$

$$\leq \|Tx - Ty\|_Y + \|Ty\|_Y .$$

Если $\|y\|_X \neq 0$, то из неотрицательности функционала $\|\cdot\|_X$ и условия 1 теоремы следует, что

$$\|Ty\|_Y \leq M^* \|y\|_X .$$

Если же $\|y\|_X = 0$, то справедливость этого неравенства вытекает из (4.6.4). Учитывая полуаддитивность функционала $\|\cdot\|_X$, теперь получаем

$$\|Ty\|_Y \le M^* \|y\|_X \le M^* \|y - x\|_X + M^* \|x\|_X .$$

Следовательно,

$$\|Tx\|_Y \le \|Tx - Ty\|_Y + \|Ty\|_Y \le$$

$$\le M^* \|x\|_X + M^* \|y - x\|_X + \|Tx - Ty\|_Y . \qquad (4.6.11)$$

Так как (4.6.11) справедливо для любого $y \in H$, то

$$\|Tx\|_Y \le M^* \|x\|_X + \inf_{y \in H} \{M^* \|y - x\|_X + \|Tx - Ty\|_Y\}. \quad (4.6.12)$$

Из (4.6.12) в силу условия 2 теоремы получаем, что для любого $x \in D(F)$ выполняется неравенство (4.6.9).

Пусть теперь $H \subset D(F)$ и $F(y) = 0$ для любого $y \in H$. Предполагая, что $A^*(X, Y, T, F) < M^*(X, Y, T, F)$, устанавливаем, что для некоторых $A < M^*$ и $B > 0$ при всех $x \in D(F)$ справедливо неравенство

$$\|Tx\|_Y \le A \|x\|_X + BF(x).$$

В частности, для любого $x \in H$ имеем

$$\|Tx\|_Y \le A \|x\|_X , \qquad A < M^*,$$

что противоречит условию 1 теоремы. Таким образом, константа M^* в (4.6.9) неулучшаема, и, следовательно, $B^*(X, Y, T, F) \le \widetilde{B}$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.6.1 видно, что для выполнимости аддитивного неравенства (4.6.6) с некоторыми константами A и B достаточно, чтобы нашлось подмножество H из $D(T)$, для элементов которого, во-первых, выполняется неравенство типа Маркова–Никольского (условие 1 теоремы) и, во-вторых, совместное приближение элементов x и Tx элементами y и Ty $(y \in H)$ допускает оценку сверху

вида $BF(x)$ с константой B, не зависящей от x (условие 2 теоремы). Отметим, что при некоторых дополнительных условиях верно и обратное утверждение.

Если неравенство (4.6.6) выполняется для любого $x \in D(F)$ и $H = \{x \in D(F) : F(x) = 0\}$, то для $x \in H$ справедливо неравенство типа Маркова–Никольского

$$\|Tx\|_Y \leq A \|x\|_X .$$

Если, кроме того, T – гомоморфизм $D(T)$ в Y и найдется константа C, такая, что для всех $x \in D(F)$

$$\inf_{y \in H} \|x - y\|_X \leq CF(x), \tag{4.6.13}$$

то в силу (4.6.6) для любых $x \in D(F)$ и $y \in H$

$$\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leq A \|x - y\|_X + BF(x),$$

и с учетом (4.6.13) получаем

$$\inf_{y \in H} \{A \|x - y\|_X + \|Tx - Ty\|_Y\} \leq (2AC + B)F(x),$$

т.е. для совместного приближения элементов x и Tx элементами y и Ty $(y \in H)$ имеет место оценка типа 2.

Как следствие из теоремы 4.6.1, получим сейчас неравенство для норм производных функций, заданных на конечном отрезке. Ряд других следствий из теоремы 4.6.1, известных результатов о точных константах в неравенствах типа Маркова–Никольского, и результатов о совместных приближениях функций и их производных будет приведен в § 9.5.

Везде ниже в данном параграфе для сокращения записей вместо $\|\cdot\|_{L_p[-1,1]}$ будем писать $\|\cdot\|_p$. Символом π_{r-1} обозначим линейное многообразие алгебраических полиномов степени не выше $r - 1$, а $M^*_{r,k} = M^*_{r,k}(q, p)$ – точную константу в неравенстве Маркова–Никольского (4.6.2).

Теорема 4.6.2. *Для любых* $1 \le q, p, s \le \infty$, *любых* $k, r \in \mathbf{N}$, $k \le r-1$ *и для любой функции* $x \in L_s^r[-1,1]$ *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le M_{r,k}^* \|x\|_p + B_{r,k}^* \left\|x^{(r)}\right\|_s . \qquad (4.6.14)$$

При этом константу $M_{r,k}^*$ *в* (4.6.14) *уменьшить нельзя, т.е.*

$$A_{r,k}^*(q,p,s) = M_{r,k}^* = M_{r,k}^*(q,p),$$

а для константы $B_{r,k}^*$ *справедлива оценка*

$$B_{r,k}^* \le \frac{2^r M_{r,k}^*}{(r-1)!} + \frac{2^{r-k}}{(r-k-1)!}.$$

Доказательство. Положим в теореме 4.6.1

$$X = L_p[-1,1], \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_p, \quad Y = L_q[-1,1], \quad \|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_q,$$

$$H = \pi_{r-1}, \quad F(x) = \left\|x^{(r)}\right\|_s, \quad r \in \mathbf{N}, \quad T = D^k, \quad k \in \mathbf{N},$$

где T – оператор k-кратного дифференцирования. Тогда условие 1 теоремы 4.6.1 выполняется в силу справедливости для полиномов из π_{r-1} неравенства (4.6.2) Маркова–Никольского. Кроме того, $F(y) = 0$ для любого $y \in \pi_{r-1}$ (т.е. дополнительное условие теоремы 4.6.1 также выполнено).

Для проверки условия 2 теоремы 4.6.1, которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\inf_{y \in \pi_{r-1}} \left\{ M_{r,k}^* \|x-y\|_p + \left\|x^{(k)} - y^{(k)}\right\|_q \right\} \le \widetilde{B} \left\|x^{(r)}\right\|_s ,$$

воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Имеем для любой функции $x \in L_s^r[-1,1]$ и любого $k = 0, 1, 2, ..., r-1$

$$x^{(k)}(t) = P_{r-1}^{(k)}(t) + \frac{1}{(r-k-1)!} \int_{-1}^{1} (t-u)_+^{r-k-1} x^{(r)}(u)du \quad (4.6.15)$$

(здесь $x^{(0)} := x$, а P_{r-1} – полином Тейлора функции x).

Применяя обобщенное неравенство Минковского и неравенство Гельдера, из (4.6.15) получаем для конечных $q, p, s, s' = s(s-1)^{-1}$:

$$\left\| x^{(k)} - P_{r-1}^{(k)} \right\|_q =$$

$$= \frac{1}{(r-k-1)!} \left(\int_{-1}^{1} \left| \int_{-1}^{1} (t-u)_+^{r-k-1} x^{(r)}(u) du \right|^q dt \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r-k-1)!} \int_{-1}^{1} \left| x^{(r)}(u) \right| \left\| (\cdot - u)_+^{r-k-1} \right\|_q du \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r-k-1)!} \left\| x^{(r)} \right\|_s \left(\int_{-1}^{1} \left\| (\cdot - u)_+^{r-k-1} \right\|_q^{s'} du \right)^{1/s'}.$$

Таким образом,

$$\inf_{y \in \pi_{r-1}} \left\{ M_{r,k}^* \|x-y\|_p + \left\| x^{(k)} - y^{(k)} \right\|_q \right\} \leq$$

$$\leq \left\| x^{(r)} \right\|_s \left\{ \frac{M_{r,k}^*}{(r-1)!} \left(\int_{-1}^{1} \left\| (\cdot - u)_+^{r-1} \right\|_p^{s'} du \right)^{1/s'} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(r-k-1)!} \left(\int_{-1}^{1} \left\| (\cdot - u)_+^{r-k-1} \right\|_q^{s'} du \right)^{1/s'} \right\}.$$

Значит, условие 2 теоремы 4.6.1 выполнено, и для константы (см. (4.6.8))

$$B_{r,k}^* = B^* \left(L_p, L_q, \frac{d^k}{dt^k}, \left\| x^{(r)} \right\|_s \right)$$

получаем оценку сверху:

$$B^*_{r,k} \le \frac{M^*_{r,k}}{(r-1)!}\left(\int\limits_{-1}^{1}\left\|(\cdot-u)_+^{r-1}\right\|_p^{s'}du\right)^{1/s'} +$$

$$+\frac{1}{(r-k-1)!}\left(\int\limits_{-1}^{1}\left\|(\cdot-u)_+^{r-k-1}\right\|_q^{s'}du\right)^{1/s'} < \frac{2^r M^*_{r,k}}{(r-1)!} + \frac{2^{r-k}}{(r-k-1)!}.$$

Ясно, что аналогичную оценку совместного приближения и констант $B^*_{r,k}$ нетрудно получить и в случае, когда какие-то из параметров q, p, s и s' равны ∞. Теорема доказана.

4.7. Условия существования неравенств для норм производных почти периодических функций

Пусть G – вещественная ось $\mathbf{R}$, конечный отрезок $\mathbf{I}$ (или объединение двух таких отрезков) или $G = \mathbf{T}_l = [-l, l]$, $l > 0$, $p \in [1, \infty]$. Напомним, что $L_p(G)$ – это пространство функций $x : G \to \mathbf{R}$ ($2l$-периодических функций $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ в случае $G = \mathbf{T}_l$), измеримых и суммируемых с p-й степенью (существенно ограниченных, если $p = \infty$) на G, а $L^r_{p,s}(G)$ ($p, s \in [1, \infty]$, $r \in \mathbf{N}$) – пространство функций $x \in L_p(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $x^{(r-1)}$ и таких, что $x^{(r)} \in L_s(G)$.

Для заданных $t, l \in \mathbf{R}$, $l > 0$, положим $\mathbf{I}_{t,l} = [t - l, t + l]$. Обозначим T_p $(p \in [1, \infty))$ – пространство функций $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, суммируемых с p-й степенью на каждом конечном промежутке и таких, что

$$\|x\|_{T_p} := \lim_{l\to\infty}\sup_{t\in\mathbf{R}}\left\{\frac{1}{l}\int\limits_{t}^{t+l}|x(s)|^p ds\right\}^{1/p} =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\sup_{t\in\mathbf{R}}\frac{1}{(2l)^{1/p}}\|x\|_{L_p(\mathbf{I}_{t,l})} < \infty.$$

Отметим, что с расстоянием $\|x-y\|_{T_p}$ связано определение почти периодических функций в смысле Вейля (см. [252, гл. 5]).

Обозначим $T^r_{p,s}$ $(p,s\in[1,\infty),\ n\in\mathbf{N})$ – пространство функций $x\in T_p$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $x^{(r-1)}$ и таких, что $x^{(r)}\in T_s$.

В § 4.2 доказано, что для функций $x\in L^r_{p,s}(G)$ ($G=\mathbf{R}$ или $G=\mathbf{R}_+$) выполняется неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{Lq(G)}\le K\|x\|^{\alpha}_{Lp(G)}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{Ls(G)}, \tag{4.7.1}$$

$k\in\mathbf{N}$, $k<r$, с абсолютной константой K, если и только если

$$\frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}\le\frac{r-k}{r}, \tag{4.7.2}$$

и при этом

$$\alpha=\frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}.$$

В некотором смысле противоположная ситуация представлена в следующей теореме.

Теорема 4.7.1. *Пусть* $k,r\in\mathbf{N}$, $k<r$, *и* $p,q,s\in[1,\infty)$. *Для функций* $x\in T^r_{p,s}$ *выполняется неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_{Tq}\le K\|x\|^{\alpha}_{Tp}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{Ts} \tag{4.7.3}$$

с абсолютной константой K, *если и только если*

$$\frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}\ge\frac{r-k}{r}. \tag{4.7.4}$$

При этом α *в неравенстве* (4.7.3) *определяется соотношением* $\alpha=\dfrac{r-k}{r}$.

Доказательство. Из результатов § 4.3 следует, что при выполнении условия (4.7.2) неравенство (4.7.1) с $G=\mathbf{T}_\pi$ и $\alpha=\dfrac{r-k}{r}$

выполняется с абсолютной константой K для всех функций $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T}_\pi)$. Отсюда следует, что при любом $l > 0$ для функций $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T}_l)$ справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{Lq(\mathbf{T}_l)} \le K\,(l/\pi)^\gamma\,\|x\|^{1-\frac{k}{r}}_{Lp(\mathbf{T}_l)}\|x^{(r)}\|^{\frac{k}{r}}_{Ls(\mathbf{T}_l)}, \tag{4.7.5}$$

где

$$\gamma = q^{-1} - p^{-1} + (k/r)(p^{-1} - s^{-1}). \tag{4.7.6}$$

Пусть $\eta_{l,\epsilon}$ $(l, \epsilon > 0)$ – функция из $C^\infty(\mathbf{R})$, такая, что $\eta_{l,\epsilon}(t) = 1$, если $|t| \le l$, $\eta_{l,\epsilon}(t) = 0$, если $|t| \ge l + \epsilon$, и $0 \le \eta_{l,\epsilon}(t) \le 1$ для всех $t \in \mathbf{R}$. В дальнейшем $\epsilon > 0$ будем считать фиксированным. Отметим, что производные $\eta^{(j)}_{l,\epsilon}(t)$, $j = 1, 2, ..., r$, этой функции ограничены некоторой константой M.

С произвольной функцией $x \in T^r_{p,s}$ и точкой $t \in \mathbf{R}$ свяжем $2(l + \epsilon)$-периодическую функцию $x_{t,l,\epsilon}$, полагая $x_{t,l,\epsilon}(u) = x(u)\eta_{l,\epsilon}(u - t)$, если $|u - t| \le l + \epsilon$, и продолжая затем с периодом $2(l + \epsilon)$ полученную функцию на всю числовую ось.

Применяя к функции $x_{t,l,\epsilon}$ неравенство (4.7.5) и учитывая отмеченные выше свойства функции $\eta_{l,\epsilon}(t)$, будем иметь для любого $t \in \mathbf{R}$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{Lq(\mathbf{I}_{t,l})} \le \left\|x^{(k)}_{t,l,\epsilon}\right\|_{Lq(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon})} \le$$

$$\le K\left(\frac{l+\epsilon}{\pi}\right)^\gamma \|x_{t,l,\epsilon}\|^{1-k/r}_{Lp(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon})}\left\|x^{(r)}_{t,l,\epsilon}\right\|^{k/r}_{Ls(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon})} \le$$

$$\le K\left(\frac{l+\epsilon}{\pi}\right)^\gamma \left(\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l})} + \|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{1-k/r} \times$$

$$\times\left(\left\|x^{(r)}\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l})} + \left\|(x\eta_{l,\epsilon}(\cdot - t))^{(r)}\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{k/r} \le$$

$$\le K\left(\frac{l+\epsilon}{\pi}\right)^\gamma \left(\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l})} + \|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{1-k/r} \times$$

$$\times\left(\left\|x^{(r)}\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l})} + \sum_{j=0}^{r}\left\|x^{(j)}\eta^{(r-j)}_{l,\epsilon}(\cdot - t)\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{k/r} \le$$

$$\leq K\left(\frac{l+\epsilon}{\pi}\right)^{\gamma}\left(\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l})}+\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{1-k/r}\times$$

$$\times\left(\left\|x^{(r)}\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l})}+M\sum_{j=0}^{r}\left\|x^{(j)}\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{k/r}.$$

Как следует из теоремы 4.6.2, для любой функции $x\in L^r_{p,s}(\mathbf{I})$ при любых $r,k\in\mathbf{N}$, $k<r$, $p,q\in[1,\infty]$ справедливо неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{Lq(\mathbf{I})}\leq A\,\|x\|_{Lp(\mathbf{I})}+B\left\|x^{(r)}\right\|_{Ls(\mathbf{I})} \tag{4.7.7}$$

с константами A и B, зависящими только от длины отрезка $\mathbf{I}$. Учитывая полученную выше оценку для $\left\|x^{(k)}\right\|_{Lq(\mathbf{I}_{t,l})}$ и неравенство (4.7.7) с $q=s$, имеем

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{Lq(\mathbf{I}_{t,l})}\leq K\left(\frac{l+\epsilon}{\pi}\right)^{\gamma}\left(\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l})}+\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{x,l})}\right)^{1-k/r}\times$$

$$\times\left(\left\|x^{(r)}\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l})}+C_1\,\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}+C_2\left\|x^{(r)}\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{k/r}$$

с некоторыми константами C_1 и C_2.

Деля обе части полученного неравенства на $(2l)^{1/q}$ и учитывая (4.7.6), получаем

$$\frac{1}{(2l)^{1/q}}\left\|x^{(k)}\right\|_{Lq(\mathbf{I}_{t,l})}\leq$$

$$\leq K\left(\frac{l+\epsilon}{2l\pi}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{(2l)^{1/p}}\,\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l})}+\frac{1}{(2l)^{1/p}}\,\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{1-\frac{k}{r}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(2l)^{1/s}}\left\|x^{(r)}\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l})}+C_1\frac{1}{(2l)^{1/s}}\,\|x\|_{Lp(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}+\right.$$

$$\left.+C_2\frac{1}{(2l)^{1/s}}\left\|x^{(r)}\right\|_{Ls(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{\frac{k}{r}}.$$

Следовательно,

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \frac{1}{(2l)^{1/q}} \left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(\mathbf{I}_{x,l})} \le K \left(\frac{l+\epsilon}{2l\pi}\right)^{\gamma} \times$$

$$\times \left(\sup_{t\in\mathbf{R}} \frac{1}{(2l)^{1/p}} \|x\|_{L_p(\mathbf{I}_{t,l})} + \frac{1}{(2l)^{1/p}} \sup_{t\in\mathbf{R}} \|x\|_{L_p(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)^{1-\frac{k}{r}} \times$$

$$\times \left\{\sup_{t\in\mathbf{R}} \frac{1}{(2l)^{1/s}} \left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(\mathbf{I}_{t,l})} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1+C_2}{(2l)^{1/s}} \left(\sup_{t\in\mathbf{R}} \|x\|_{L_p(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})} + \sup_{t\in\mathbf{R}} \left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}\right)\right\}^{\frac{k}{r}}.$$

Устремляя $l \to \infty$ и учитывая, что величины

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \|x\|_{L_p(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon})\setminus\mathbf{I}_{t,l})} \quad \text{и} \quad \sup_{t\in\mathbf{R}} \left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(\mathbf{I}_{t,l+\epsilon}\setminus\mathbf{I}_{t,l})}$$

конечны и не зависят от l, получаем

$$\|x^{(k)}\|_{T_q} \le \frac{K}{(2\pi)^{\gamma}} \|x\|_{T_p}^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_{T_s}^{k/r},$$

где γ определено равенством (4.7.6), а K – константа из (4.7.5).

Таким образом, неравенство (4.7.3) при выполнении условия (4.7.4) действительно имеет место.

Покажем, что условие (4.7.4) является необходимым для того, чтобы неравенство (4.7.3) выполнялось сразу для всех функций $x \in T^r_{p,s}$.

Предположим, что неравенство (4.7.3) справедливо для всех функций $x \in T^r_{p,s}$. Заметим, что вместе с любой функцией $x \in T^r_{p,s}$ пространству $T^r_{p,s}$ принадлежит любая функция вида $x_\lambda(t) = x(\lambda t)$, $\lambda > 0$, причем, как легко видеть, для любого $\lambda > 0$

$$\|x_\lambda(\cdot)\|_{T_p} = \|x(\cdot)\|_{T_p},$$

$$\|x_\lambda^{(k)}(\cdot)\|_{T_q} = \lambda^k \|x^{(k)}(\cdot)\|_{T_q},$$

и

$$\|x_\lambda^{(r)}(\cdot)\|_{T_s} = \lambda^r \|x^{(r)}(\cdot)\|_{T_s}.$$

Следовательно, если неравенство (4.7.3) выполняется, то при любом $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\lambda^k \|x^{(k)}(\cdot)\|_{T_q} \le K \|x\|_{T_p}^\alpha (\lambda^r \|x^{(r)}(\cdot)\|_{T_s})^{1-\alpha}. \tag{4.7.8}$$

Но для того чтобы неравенство (4.7.8) имело место при всех $\lambda > 1$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $k \le r(1-\alpha)$, а для того чтобы неравенство (4.7.8) выполнялось при всех $\lambda < 1$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $k \ge r(1-\alpha)$. Таким образом, необходимым условием выполнения неравенства (4.7.8) является равенство $k = r(1-\alpha)$ или $\alpha = 1 - k/r$.

Далее, для 2π-периодической функции x при любом $p \ge 1$

$$\|x\|_{T_p} = \frac{1}{(2\pi)^{1/p}} \|x\|_{L_p(\mathbf{T}_\pi)}.$$

Поэтому, если для функций из $T_{p,s}^r$ справедливо неравенство (4.7.3), то для функций из $L_{p,s}^r(\mathbf{T}_\pi)$ выполнялось неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{T}_\pi)} \le (2\pi)^\gamma K \|x\|_{L_p(\mathbf{T}_\pi)}^\alpha \|x^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{T}_\pi)}^{1-\alpha}$$

с показателем $\alpha = \dfrac{r-k}{r}$. Но, как было отмечено выше, это возможно только, если выполнено условие (4.7.4). Таким образом, условие (4.7.4) является необходимым для справедливости неравенства (4.7.3). Теорема доказана.

Комментарии к главе 4

Данная глава посвящена изучению вопроса о возможности неравенства, оценивающего L_q-норму промежуточной производной через L_p-норму функции и L_s-норму старшей производной. Для функций с различными областями задания этот вопрос решается по-разному. В § 4.1 для функций, заданных на оси или полуоси, приводим (хорошо известные и несложные) необходимые условия (в терминах параметров, задающих нормы и количество дифференцирований) и даем их удобную геометрическую интерпретацию (она

принадлежит, к сожалению, не нам, но мы затрудняемся дать точную ссылку на то, откуда мы ее знаем).

Изучением различных достаточных условий существования неравенств для промежуточных производных занимались многие математики. В этой связи упомянем работы Гальярдо [144] и Ниренберга [273, 274], а также Стейна [295] (в связи с ситуацией, когда $q = p = s$). Впервые общие условия существования (совпадающие с необходимыми условиями из § 4.1) были даны В.Н. Габушиным в работе [132]. В § 4.2 мы воспроизводим доказательства из этой его работы. Впоследствии им были предложены (см., например, [138]) другие доказательства теоремы о необходимых и достаточных условиях существования неравенств для функций, заданных на оси или полуоси, позволившие получить необходимые и достаточные условия существования несколько более общих неравенств, а также рассмотреть случай, когда некоторые из параметров q, p, s, задающих нормы, могут быть меньше единицы. Однако доказательство из [132] остается одним из наиболее элементарных.

В отличие от случая функций, заданных на всей числовой оси или полуоси, неравенства для норм производных периодических функций возможны при любых значениях параметров $1 \leq q, p, s \leq \infty$. Однако по поводу мультипликативных неравенств для периодических функций весьма важным является вопрос о том, каков максимально возможный показатель степени при норме функции (именно такие неравенства являются наиболее важными для приложений и, кроме того, из неравенства с максимально возможным показателем, используя неравенство типа Бора–Фавара, можно легко получить неравенство с меньшим показателем). Для периодических функций соответствующие вопросы были изучены Клоцем [196]. В § 4.3 приводим полученные им результаты.

В § 4.7 рассматриваются вопросы существования неравенств для производных почти периодических функций, изученные в [94]. Интересно отметить, что область существования неравенств для почти периодических функций “дополняет” область существования неравенств для функций, заданных на всей оси или полуоси, до области, в которой существуют неравенства для периодических функций.

В § 4.4 для случая $1 < q, p, s < \infty$ приведено доказательство необходимых и достаточных условий существования неравенств для периодических функций методами гармонического анализа (см. [110, 111]). Такой метод доказательства позволяет без труда включить в рассмотрение производные дробного порядка.

Достаточно давно было замечено, что во всех случаях, когда на "колмогоровском отрезке" известно точное неравенство типа Колмогорова для функций, заданных на оси, экстремальную функцию (точнее, асимптотически экстремальную последовательность функций) для этого неравенства можно получить, отправляясь от подходящей периодической функции, сохраняя ее на увеличивающемся числе периодов и сглаживая. В § 4.5 приведено общее утверждение такого рода [85]. Точнее, нами установлено, что в "габушинской области" неулучшаемая константа в неравенстве на оси не превосходит точной константы в неравенстве на окружности (с теми же параметрами q, p, s, k, r), а на "колмогоровском отрезке" эти две константы совпадают. Как будет показано в дальнейшем, к настоящему времени вопрос о точных константах в неравенствах типа Колмогорова для периодических функций изучен полнее, чем для функций, заданных на оси. Одной из причин этого являются трудности, возникающие при построении экстремалей, удовлетворяющих условиям суммируемости в некоторой степени на всей оси. Теорема 4.5.2 позволяет получить некоторые новые результаты на оси в случае, когда точка $A_{q,k} = (1/q, k)$ расположена на колмогоровском отрезке (см. § 9.2 и [85]).

В § 4.6 обсуждаются вопросы существования неравенств для промежуточных производных функций, заданных на конечном отрезке, а также задача о наименьшем возможном значении константы при норме функции в аддитивном неравенстве для производных. Некоторые результаты о такой наименьшей константе были получены Буренковым [123, 124]. Приведенный в § 4.6 общий факт установлен в [85].

В § 4.7 обсуждаются вопросы существования неравенств типа Колмогорова для почти периодических функций [93, 94].

В заключение отметим, что вопросы существования неравенств для производных функций многих переменных изучались многими авторами (Гальярдо, Ниренберг и др.). Необходимые и достаточные условия для функций, заданных на всем пространстве или многомерном торе, были установлены Бесовым [110] (см. также [111]), а для периодических функций – Галеевым [143]. Необходимые и достаточные условия существования неравенств иного вида изучались Габушиным [138].

В связи с результатами, представленными в § 4.5, интересно отметить следующее. Для функций многих переменных аналога описанной там ситуации, вообще говоря, не существует (см. по этому поводу недавние работы Бабенко, Корнейчука и Пичугова [52, 53]).

Дополнительные результаты к главе 4

1. Пусть $G = \mathbf{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $k, r \in z_+$, $0 \le k \le r-1$, $0 < q, p, s \le \infty$, и $q \ne p$ при $k = 0$; $\psi_s\left(x^{(r)}\right)$ – один из следующих функционалов: $\left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(G)}$, $\left\|x_+^{(r)}\right\|_{L_s(G)}$ или $\left\|x_-^{(r)}\right\|_{L_s(G)}$. Тогда для функций $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ выполняется неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(G)} \le K \left\|x\right\|^{\alpha}_{L_p(G)} \psi_s^{\beta}\left(x^{(r)}\right) \tag{Д.4.1}$$

с константой K, не зависящей от x, тогда и только тогда, когда [138]:

$$s \ge 1,$$

$$\alpha = \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}, \quad \beta = 1-\alpha, \tag{Д.4.2}$$

$$\Delta(q,p,s;k,r) = \frac{1}{q} - \left(1-\frac{k}{r}\right)\frac{1}{p} - \frac{k}{r}\frac{1}{s} \le 0.$$

2. Пусть $0 < q, p, s \le \infty$, $k, r \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le r-1$, $k - 1/q + 1/p > 0$; $\Delta(q,p,s;k,r) > 0$; $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$. Тогда для функций класса $L^r_{p,s}(G)$ выполняется неравенство [138]

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(G)} \le K\left(\nu\left(x^{(k)}\right)\right)^{\gamma} \left\|x^{(k)}\right\|^{\alpha}_{L_p(G)} \left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_{L_s(G)},$$

где α определено в (Д.4.2), $\nu\left(x^{(k)}\right)$ – число перемен знака функции $x^{(k)}$, K не зависит от x,

$$\gamma := \Delta(q,p,s;k,r)\frac{r}{r-1/s+1/p}.$$

Заметим, что условие $\Delta(q,p,s;k,r) > 0$ означает, что неравенство вида (Д.4.1) на классе $L^r_{p,s}(G)$ невозможно.

3. В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук и С.А. Пичугов [52, 53] получили следующий результат.

Пусть G есть $\mathbf{R}^d$ или d-мерный тор $\mathbf{T}^d$; $\|f\|_p = \|f\|_{L_p(G)}$, $1 \le p \le \infty$; $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbf{N}^d$, $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$;

$$f^{(\gamma)} := \frac{\partial^{\gamma_1+\dots\gamma_d} f}{\partial x_1^{\gamma_1}\dots\partial x_d^{\gamma_d}}$$

(производные понимаются в смысле Соболева); M, M_1, M_2 – константы, не зависящие от f.

Для функций $f \in L^{r\gamma}_{p,s}(G) := \{f \in L_p(G) : f^{(r\gamma)} \in L_s(G)\}$ изучена задача оценки $\|f^{(k\gamma)}\|_q$ через $\|f\|_p$ и $\|f^{(r\gamma)}\|_s$. В частности, доказано, что для всех $f \in L^{r\gamma}_{\infty,\infty}(\mathbf{T}^d)$ справедливо следующее неравенство:

$$\left\|f^{(k\gamma)}\right\|_\infty \le M\,\|f\|_\infty^{1-k/r}\left\|f^{(r\gamma)}\right\|_\infty^{k/r}\left(1+\ln^+\frac{\left\|f^{(r\gamma)}\right\|_\infty}{\|f\|_\infty}\right)^{d-1}.$$

С другой стороны, существует $\beta \ge (d-1)\max\{1-k/r,\ k/r\}$, такое, что

$$\sup_{\substack{f\in L^{r\gamma}_{\infty,\infty}(\mathbf{T}^d)\\ f\ne 0}}\frac{\left\|f^{(k\gamma)}\right\|_\infty}{\|f\|_\infty^{1-k/r}\left\|f^{(r\gamma)}\right\|_\infty^{k/r}\left(1+\ln^+\frac{\left\|f^{(r\gamma)}\right\|_\infty}{\|f\|_\infty}\right)^{\beta}} \ge M_1 > 0.$$

4. Пусть $\mathbf{I}$ – интервал (конечный или бесконечный). Выполняется следующее аддитивное неравенство для производных (см. [145]).

Пусть $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$, $p \in [1, \infty)$. *Тогда для всех* $x \in L_{p,p}(\mathbf{I})$ *и любого* $h \in (0, \mu\mathbf{I})$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{r-1} h^k \left\| x^{(k)} \right\|_{L_p(\mathbf{I})} \leq h^r \left\| x^{(r)} \right\|_{L_p(\mathbf{I})} + C_r \left\| x \right\|_{L_p(\mathbf{I})}, \qquad (\text{Д}.4.3)$$

где константа C_r *зависит только от* r.

Заметим, что в неравенстве (Д.4.3) присутствуют все промежуточные производные.

Доказательство (заимствованное из [201]). Пусть $\mathbf{I}_1 = [a, a + 2\lambda] \subset I$. Положим $N_k = \left\| x^{(k)} \right\|_{L_p(\mathbf{I}_1)}$, $k = 0, 1, ..., r$. Далее, пусть $1 \leq k < r$ и $g := x^{(k-1)}$. Легко видеть, что

$$|g'(t)| \leq \int\limits_t^{t+y} |g''(s)| ds + y^{-1} |g(t+y) - g(t)|$$

для всех $t \in [a, a + \lambda]$ и $y \in (0, \lambda]$. Тогда

$$\left(\int\limits_a^{a+\lambda} |g'(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq y \left(\int\limits_{\mathbf{I}_1} |g''(t)|^p dt \right)^{1/p} + \frac{2}{y} \left(\int\limits_{\mathbf{I}_1} |g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Аналогичные оценки справедливы и для $\int\limits_{a+\lambda}^{a+2\lambda} |g'(t)|^p dt$. Поэтому для каждого $y \in (0, \lambda]$

$$N_k \leq 2y N_{k+1} + \frac{4}{y} N_{k-1}.$$

Пусть $\delta_0 = 1$, $\delta_j = 8\delta_{j-1} + 2$ $(j = 1, ..., r)$ и $d_k = \delta_{r-k}$ $(k = 0, ..., r)$.

Полагая $y = h/(2d_k)$ $(0 < k < 2\lambda)$, приходим к неравенствам

$$h^k d_k N_k \leq h^{k+1} N_{k+1} + 8h^{k-1} d_k^2 N_{k-1}$$

для $k = 1, ..., r-1$. Складывая их и учитывая, что $d_k = 8d_{k+1}^2 + 2$, получаем

$$\sum_{k=1}^{r-1} h^k N_k \le h^r N_r + 8d_1^2 N_0.$$

Отсюда следует (Д.4.3).

Если $\mu\mathbf{I} = \infty$, то из (Д.4.3) несложно вывести мультипликативное неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_p(\mathbf{I})} \le C \left\|x\right\|_{L_p(\mathbf{I})}^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_{L_p(\mathbf{I})}^{k/r} \qquad (\text{Д.4.4})$$

для всех $1 \le k < r$.

С помощью соотношения (Д.4.3) нетрудно получить аналогичные (Д.4.4) неравенства для смешанных производных функций нескольких переменных [].

5. Пусть $G = \mathbf{R}^m$, $m > 1$, $0 < q, p, s \le \infty$, $i = (i_1, ..., i_m)$, $k = (k_1, ..., k_m)$ – векторы с неотрицательными целочисленными координатами, $t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbf{R}^m$,

$$\mathcal{D}^k x(t) := \frac{\partial^{|k|} x(t)}{\partial t_1^{k_1} ... \partial t_m^{k_m}}, \quad |k| = k_1 + ... + k_m.$$

В работе [142] В.Н. Габушин исследовал вопрос об условиях существования для функций m переменных мультипликативных неравенств вида

$$\left\|\mathcal{D}^k x\right\|_{L_q(\mathbf{R}^m)} \le C \left\|x\right\|_{L_p(\mathbf{R}^m)}^{\alpha} \left(\max_{|i|=r} \left\|\mathcal{D}^i x\right\|_{L_s(\mathbf{R}^m)}\right)^{\beta}. \qquad (\text{Д.4.5})$$

Теорема (В.Н. Габушин). *Пусть* $0 < q, p, s \le \infty$, $0 \le |k| < r$, $q \ne p$ *при* $|k| = 0$,

$$\mu = r - m\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{p}\right), \quad \Delta = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\left(\frac{r - |k|}{p} + \frac{|k|}{s}\right).$$

Неравенство (Д.4.5) *справедливо тогда и только тогда, когда выполнены такие условия:*

1) $s \geq 1$;
2) $\Delta\mu < 0$, $(r - |k| - m/s + m/q)/\mu \geq 0$, *если* $\Delta \neq 0$;
3) $q \neq \infty$, *если* $s > 1$, $r - |k| - m/s + m/q = 0$;
4) $p \neq \infty$, *если* $|k| = 0$;
5) $\alpha = (r - |k| - m/s + m/q)/\mu$, *если* $\mu \neq 0$,
$\alpha \in (-\infty, 1 - |k|/r]$, *если* $\mu = 0$, $p \neq \infty$,
$\alpha \in (0, 1 - |k|/r]$, *если* $\mu = 0 \neq |k|$, $p = \infty$;
6) $\beta = 1 - \alpha$.

Заметим, что случай $q = p$, $|k| = 0$ либо тривиален, так как $\alpha = 1$ при любых s, либо при $m > 1$ выполняется (Д.4.5), если

$$r - \frac{m}{s} + \frac{m}{q} = 0, \quad |k| = 0, \quad q = p < \infty, \quad s > 1, \quad \alpha \in (-\infty, 1].$$

Обзор результатов, связанных с неравенством (Д.4.5), имеется в книге [111] и статье [19].

6. В [141] для линейных дифференциальных операторов

$$Lx(t) = x^{(r)}(t) + \sum_{k=0}^{r-1} a_k(t) x^{(k)}(t)$$

доказывается наравенство вида

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{Lq(G)} \leq C \|x\|^{\alpha}_{Lp(G)} \|Lx\|^{1-\alpha}_{Ls(G)} + Kh^{-\eta} \|x\|_{Lp(G)},$$

где $G = \mathbf{I}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $0 < q, p, s \leq \infty$, $h \leq \mu G$, h зависит только от коэффициентов $a_k(t)$, C и K не зависят от x, $\eta > 0$.

7. Пусть $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$, $1 \leq q, p, s \leq \infty$, $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, причем

$$\frac{r}{q} \leq \frac{r-k}{p} + \frac{k}{s}, \quad \alpha = \frac{r - k - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p}.$$

Пусть также K – наименьшая возможная константа в неравенстве

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \leq K \|x\|^{\alpha}_p \|x\|^{1-\alpha}_s.$$

Если числа M_0, M_k, M_r удовлетворяют неравенству

$$M_k < K M_0^{\alpha} M_r^{1-\alpha},$$

то существует функция $x \in L^r_{p,s}(G)$, такая, что

$$\|x\|_p = M_0, \quad \left\|x^{(k)}\right\|_q = M_k, \quad \left\|x^{(r)}\right\|_s = M_r$$

([190, теорема 1.6]).

8. Для $1 < q = p = s \le \infty$, $G = \mathbf{R}_+$, $r = 2$, $k = 1$ (так, что $\alpha = 1/2$) существует функция $x \in L^2_{p,p}(\mathbf{R}_+)$, такая, что $y \ne 0$ и

$$\sup_{\substack{x \in L^2_{p,p}(\mathbf{R}_+) \\ x \ne 0}} \frac{\|x'\|_p}{\|x\|_p^{1/2}\|x''\|_p^{1/2}} = \frac{\|y'\|_p}{\|y\|_p^{1/2}\|y''\|_p^{1/2}}$$

(такая функция называется экстремальной). Если $G = \mathbf{R}$ и $1 < p < < \infty$, то экстремальной функции не существует. Наконец, если $G = \mathbf{R}$ и $p = 1$, экстремальной функции также не существует ([190]).

9. Пусть $M = \mathbf{Z}$ или $M = \mathbf{Z}_+$. Разностный оператор Δ определятся так: если $x = (x_m)_{m \in M}$, то

$$\Delta x = (x_{m+1} - x_m)_{m \in M},$$

$$\Delta^2 = \Delta(\Delta), \quad \Delta^j = \Delta(\Delta^{j-1}), \quad j = 2, 3, ...$$

Теорема [190]. *Пусть $M = \mathbf{Z}$ или $M = \mathbf{Z}_+$, $k, r \in \mathbf{N}$, $1 \le k < r$; $1 \le p, q, s \le \infty$. Тогда существует константа $C > 0$, такая, что неравенство*

$$\|\Delta^k x\|_q \le C\|x\|_p^\alpha \|\Delta^r x\|_s^{1-\alpha}$$

справедливо для любой последовательности $x \in l_p(M)$, удовлетворяющей условию $\Delta^r x \in l_s(M)$, в том и только в том случае, когда

$$\frac{r}{q} \le \frac{r-k}{p} + \frac{k}{s}$$

и

$$\alpha = \frac{r - k - 1/s + 1/q}{r - 1/s + 1/p}.$$

10. Пусть $m \subset L^2_{p,p}(G)$ и

$$K(p, M) = \sup_{\substack{x \in M \\ x \neq 0,\, x'' \neq 0}} \frac{\|x'\|_p^2}{\|x\|_p \|x''\|_p}.$$

Пусть также

$$M_1 = \{x \in L^2_{p,p}([0,1]) : x(0) = x(1) = 0\},$$

$$M_2 = \{x \in M_1 : x(t) > 0, \quad 0 < t < 1\},$$

$$M_3 = \{x \in L^2_{p,p}([0,1]) : x(0) = x'(1) = 0, \quad x(t) > 0, \quad 0 < t < 1\},$$

$$M_4 = \{x \in M_3 : x'(t) \geq 0, \quad 0 < t < 1\},$$

$$M_5 = \{x \in L^2_{p,p}([0,1]) : x'(0) = x'(1) = 0\},$$

$$M_6 = \{x \in L^2_{p,p}(\mathbf{R}_+) : x(0) = 0\},$$

$$M_7 = \{x \in L^2_{p,p}(\mathbf{R}_+) : x'(0) = 0\},$$

$$M_8 = \{x \in L^2_{p,p}(\mathbf{R}_+) : x(0)x'(0) = 0\},$$

$$M_9 = \{x \in L^2_{p,p}([0,1]) : x'(1) = 0, x'(t) \geq 0, x(t) \geq 0,\ 0 < t < 1\}.$$

Справедливо следующее утверждение: для любого p, $1 \leq p < \infty$,

$$K(p, M_i) = C^2_{2,1}(p, \mathbf{R}), \quad i = 1, 2, ..., 9.$$

При этом интервал $[0,1]$ можно заменить любым интервалом $[a,b]$ (с соответствующим изменением краевых условий) [193, § 2.4].

11. Пусть

$$N_1 = \{x \in L^2_{p,p}([0,1]) : x(1) = x'(1) = 0\},$$

$$N_2 = \{x \in L^2_{p,p}([0,1]) : \text{ либо } x(0) = x(1) = 0,$$

$$\text{либо } x'(0)/x(0) = x'(1)/x(1) = 0 \text{ и}$$

$$y' \text{ обращается в нуль на } (0,1) \text{ в точности один раз}\}.$$

Тогда [193] для любого $p,\ 1 \le p \le \infty$,

$$K(p, N_i) = C^2_{2,1}(p, \mathbf{R}_+), \quad i = 1, 2.$$

12. В данном пункте представлены аналоги результатов § 4.6 для дифференцируемых отображений банаховых пространств из работы [70].

Нам понадобятся некоторые сведения из теории дифференцируемых отображений банаховых пространств (см., например, [182]), приводимые ниже.

Пусть X и Y – банаховы пространства над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Для любого $r \in \mathbf{N}$ будем через $\mathcal{L}_r(X, Y)$ обозначать пространство r-линейных (т.е. линейных по каждой переменной при фиксированных остальных переменных) отображений $F : X^r \to Y$, где X^r – декартово произведение r экземпляров пространства X. В частности, $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}_1(X, Y)$ – пространство линейных непрерывных отображений $F : X \to Y$. Норма отображения $F \in \mathcal{L}_r(X, Y)$ определяется равенством

$$\|F\|_{\mathcal{L}_r(X,Y)} := \sup\{\|F(x_1, ..., x_r)\|_Y : x_i \in X, \|x_i\|_X = 1, i = 1, ..., r\}.$$

Пусть $U \subset X$ – непустое, открытое, ограниченное множество; $f : U \to Y$ – отображение класса $C^r = C^r(U; Y)$; $f^{(k)}$ – k-е производное отображение для f. Как известно, при любом $r \ge 2$ справедлива естественная изометрия

$$\mathcal{L}(X; \mathcal{L}_{r-1}(X, Y)) \approx \mathcal{L}_r(X, Y),$$

в силу которой k-е производное отображение для f можно трактовать как отображение

$$f^{(k)} : U \to \mathcal{L}_k(X, Y).$$

Для $f \in C^r(U; Y)$ положим

$$|||f|||_U = \sup_{x \in U} \|f(x)\|_Y$$

и (при $1 \le k \le r$)

$$|||f^{(k)}|||_U = \sup_{x \in U} \|f^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}_k(X,Y)}.$$

В работе [70] установлено, что вопрос о принципиальной возможности неравенства

$$|||f^{(k)}|||_U \le A|||f|||_U + B|||f^{(r)}|||_U, \qquad (Д.4.6)$$

а также вопрос о точных константах в этом неравенстве тесно связан с выполнимостью неравенства типа Маркова для полиномиальных отображений X в Y и, более того, точная константа в соответствующем неравенстве типа Маркова дает неулучшаемую константу A в (Д.4.6).

Через $\mathcal{P}_r(X,Y)$ будем обозначать пространство полиномиальных отображений (полиномов) степени не выше r, действующих из X в Y, т.е. пространство всех отображений $P_r : X \to Y$ вида

$$P_r(x) = \sum_{j=0}^{r} u_j(x,...,x),$$

где $u_j \in \mathcal{L}_j(X,Y)$ для $j \ge 1$, а u_0 – постоянное отображение X в Y (однородный полином степени 0). Отметим, что если $P_r \in \mathcal{P}_r(X,Y)$ и $0 \le k \le r$, то $P_r^{(k)} \in \mathcal{P}_{r-k}(X, \mathcal{L}_k(X,Y))$.

Для фиксированных $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$, и ограниченного открытого множества $U \subset X$ положим

$$M_{r,k}(U,Y) := \sup\{|||P_r^{(k)}|||_U : P_r \in \mathcal{P}_r(X,Y), |||P_r|||_U \le 1\}.$$

Если $X = Y = \mathbf{R}$ и $U = (a,b) \subset \mathbf{R}$, то $M_{r,k}(U,Y)$ есть точная константа в неравенстве Маркова для производных алгебраических полиномов. В частности, если

$$T_r(x) = \cos r \arccos x = 2^{r-1}x^r + ..., \quad x \in [-1,1],$$

– полином Чебышева 1-го рода, то

$$M_{r,k}((-1,1),\mathbf{R}) = \|T_r^{(k)}\|_{C[-1,1]} = T_r^{(k)}(1) =$$

$$= \frac{r^2(r^2-1)...(r^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!}.$$

В общем случае конечность $M_{r,k}(U,Y)$ означает справедливость для полиномов из $\mathcal{P}_r(X,Y)$ неравенства типа Маркова

$$|||P_r^{(k)}|||_U \leq M|||P_r|||_U \qquad (Д.4.7)$$

и $M_{r,k}(U,Y)$ в этом случае есть точная константа в неравенстве (Д.4.7).

Очевидно, что если найдутся числа A и B, такие, что неравенство (Д.4.6) выполняется для любого $f \in C^r(U,Y)$, то $M_{r-1,k}(U,Y) \leq$ $\leq A < \infty$, и, следовательно, для полиномов из $\mathcal{P}_{r-1}(X,Y)$ справедливо неравенство (Д.4.7). Из следующей теоремы вытекает, что если множество U является звездным, то верно и обратное утверждение.

Теорема 1 [70]. *Пусть $U \subset X$ – открытое, ограниченное множество, звездное относительно некоторой своей точки, $r,k \in \mathbf{N}$, $k < r$. Если $M_{r-1,k}(U,Y) < \infty$, то найдется $B > 0$, такое, что для любого $f \in C^r(U,Y)$*

$$|||f^{(k}|||_U \leq M_{r-1,k}(U,Y)|||f|||_U + B|||f^{(r)}|||_U.$$

При этом константа $M_{r-1,k}(U,Y)$ неулучшаема в том смысле, что

$$M_{r-1,k}(U,Y) = \inf A,$$

где $\inf$ *берется по всем A, таким, что с некоторой константой B неравенство* (Д.4.6) *справедливо для всех $f \in C^r(U,Y)$.*

Через $W_\infty^r((-1,1)^m)$, $m,r \in \mathbf{N}$, обозначим пространство вещественнозначных функций $f \in L_\infty((-1,1)^m)$, имеющих для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_m) \in \mathbf{Z}_+^m$, такого, что $|\alpha| =$ $= \alpha_1 + ... + \alpha_m = r$, обобщенную в смысле Соболева производную $D^\alpha f$, принадлежащую $L_\infty((-1,1)^m)$. Положим для $k \in \mathbf{N}$, $k \leq r$,

$$\bigtriangledown^k f = (D^\alpha f)_{|\alpha|=k} \quad \text{и} \quad \| \bigtriangledown^k f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L_\infty((-1,1)^m)}.$$

Пусть для $r,k \in \mathbf{N}$, $k < r$,

$$M_{r,k}^* := \sup\left\{\| \bigtriangledown^k P_r\|_\infty : P_r \in \mathcal{P}_{r,m} \ , \ \|P_r\|_{L_\infty((-1,1)^m)} \leq 1\right\},$$

где $\mathcal{P}_{r,m} = \mathcal{P}_r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$ – множество алгебраических полиномов от m переменных, степени $\leq r$, т.е. таких, что сумма степеней в каждом мономе не превосходит r.

Теорема 2 [70]. *Пусть $k, m, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. Тогда для любой функции $f \in W^r_\infty((-1,1)^m)$ выполняется неравенство*

$$\| \bigtriangledown^k f\|_\infty \leq M^*_{r-1,k} \|f\|_{L_\infty((-1,1)^m)} + B\| \bigtriangledown^r f\|_\infty$$

с некоторой константой B, не зависящей от f. При этом константа $M^*_{r-1,k}$ в этом неравенстве неулучшаема.

Глава

5

НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННЫЕ С L_2-НОРМАМИ

5.1. Неравенства для степеней операторов в гильбертовом пространстве

Одно из возможных направлений обобщений неравенств для норм промежуточных производных связано с заменой оператора дифференцирования, степени которого участвуют в таких неравенствах, достаточно произвольным линейным оператором, действующим в некотором линейном нормированном пространстве. Одним из первых исследования такого рода начал Ю.И. Любич [245]. В данном параграфе изложим некоторые результаты в этом направлении. Главным образом они будут связаны с операторами, действующими в гильбертовом пространстве. В этой связи будем использовать терминологию из монографии [20], причем по ходу изложения будем приводить некоторые необходимые определения и факты.

Идея, использованная при доказательстве теоремы 1.6.2, позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 5.1.1. *Пусть A — линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $(H, \|\cdot\|)$. Тогда для любого элемента $x \in H$ при всех $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, справедливо неравенство*

$$\|A^k x\| \le \|x\|^{1-\frac{k}{r}} \|A^r x\|^{\frac{k}{r}}. \tag{5.1.1}$$

Неравенство (5.1.1) *неулучшаемо и обращается в равенство для любого собственного элемента оператора A.*

Доказательство. В силу теоремы Гильберта–Шмидта для оператора A существует ортонормированная система собственных элементов $\{u_n\}$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \neq \neq 0$, такая, что каждый элемент $x \in H$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_n (x, u_n) u_n + x',$$

где $x' \in \mathrm{Ker} A$, т. е. $Ax' = 0$, при этом

$$Ax = \sum_n \lambda_n (x, u_n) u_n.$$

Для степеней оператора A в силу написанных равенств будем иметь

$$\|A^k x\|^2 = \sum_n |\lambda_n|^{2k} |(x, u_n)|^2, \tag{5.1.2}$$

$$\|A^r x\|^2 = \sum_n |\lambda_n|^{2r} |(x, u_n)|^2$$

и, кроме того,

$$\|x\|^2 = \sum_n |(x, u_n)|^2 + \|x'\|^2.$$

Применяя для оценки (5.1.2) неравенство Гельдера с показателями $r/(r-k)$ и r/k, получаем

$$\|A^k x\|^2 = \sum_n |(x, u_n)|^{\frac{2r-2k}{r}} |\lambda_n|^{2k} |(x, u_n)|^{\frac{2k}{r}} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_n |(x, u_n)|^2 \right\}^{\frac{r-k}{r}} \left\{ \sum_n |\lambda_n|^{2r} |(x, u_n)|^2 \right\}^{\frac{k}{r}} \leq$$

$$\leq \|x\|^{\frac{2r-2k}{r}} \|A^r x\|^{\frac{2k}{r}},$$

откуда сразу следует неравенство (5.1.1).

Утверждение о том, что (5.1.1) обращается в равенство для любого собственного элемента оператора A, очевидно.

Напомним, что линейный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется нормальным, если $A^*A = AA^*$. Для степеней ограниченного нормального оператора A можно дать чисто алгебраическое доказательство неравенства типа (5.1.1).

Теорема 5.1.2. *Пусть A — ограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда для любого элемента $x \in H$ при всех $k,r \in \mathbf{N}$, $k < r$ справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\|A^k x\| \le \|x\|^{1-\frac{k}{r}} \|A^r x\|^{\frac{k}{r}}. \tag{5.1.3}$$

Доказательство. Докажем сначала это неравенство для случая $r = 2,\ k = 1$. Для любого $x \in H$ будем иметь

$$\|Ax\|^2 = (Ax,\ Ax) = |(x,\ A^*Ax)| \le \|x\|\|A^*Ax\|.$$

Но

$$\|A^*Ax\|^2 = (A^*Ax, A^*Ax) = (AA^*Ax, Ax) = (A^*A^2x, Ax) =$$
$$= (A^2x, A^2x) = \|A^2x\|^2.$$

Поэтому

$$\|Ax\| \le \|x\|^{\frac{1}{2}} \|A^2x\|^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть неравенство (5.1.3) справедливо для некоторого $r \ge 2$ и для всех k, $1 \le k \le r-1$. Тогда

$$\|A^r x\| = \|A^{r-1}Ax\| \le \|Ax\|^{\frac{1}{r}} \|A^{r+1}x\|^{\frac{r-1}{r}} \le$$
$$\le \left(\|x\|^{\frac{r-1}{r}} \|A^r x\|^{\frac{1}{r}}\right)^{1/r} \|A^{r+1}x\|^{\frac{r-1}{r}}.$$

Отсюда следует, что

$$\|A^r x\| \le \|x\|^{\frac{1}{r+1}} \|A^{r+1}x\|^{\frac{r}{r+1}},$$

и при любом $k,\ 1 \le k \le r$,

$$\|A^k x\| \le \|x\|^{1-\frac{k}{r}} \|A^r x\|^{\frac{k}{r}} \le \|x\|^{1-\frac{k}{r+1}} \|A^{r+1}x\|^{\frac{k}{r+1}}.$$

Неравенство (5.1.3) доказано.

Покажем, что неравенство (5.1.3) неулучшаемо. Действительно, из него следует, что $\|A^k\|^{1/k} \le \|A^r\|^{1/r}$ для всех $0 < k < r$. Поэтому

$$\|A^r\| = \|A^k A^{r-k}\| \le \|A^k\|\|A^{r-k}\| \le \|A^r\|^{k/r}\|A^r\|^{(r-k)/r} = \|A^r\|.$$

Это, в частности, означает, что $\|A^k\| = \|A\|^k$ при всех k, а значит,

$$\sup_{x\in H} \frac{\|A^k x\|}{\|x\|} = \left(\sup_{x\in H} \frac{\|A^r x\|}{\|x\|}\right)^{k/r}. \tag{5.1.4}$$

Пусть для $\varepsilon > 0$ вектор x_ε такой, что

$$\frac{\|A^k x_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} > (1-\varepsilon) \sup_{x\in H} \frac{\|A^k x\|}{\|x\|}.$$

Тогда в силу (5.1.4) будет

$$\frac{\|A^k x_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} > (1-\varepsilon) \left(\frac{\|A^r x_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|}\right)^{k/r}$$

или

$$\|A^k x_\varepsilon\| \ge (1-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|^{1-\frac{k}{r}}\|A^r x_\varepsilon\|^{\frac{k}{r}},$$

что ввиду произвольности ε означает неулучшаемость (5.1.3).

Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H (не обязательно ограниченный), называется симметрическим (или эрмитовым), если:

а) его область определения D_A плотна в H;

б) для любых двух элементов $x, y \in D_A$ $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Хорошо известно (см., например, [20]), что если симметрический оператор ограничен, то его расширение по непрерывности определено всюду в H и является ограниченным самосопряженным оператором. Если же симметрический оператор не ограничен, то его область определения не может совпадать со всем пространством.

Если область определения D_B оператора B шире области определения D_A оператора A (т. е. $D_A \subset D_B$) и если $Ax = Bx$ для всех $x \in D_A$, то оператор B называют расширением оператора A и пишут $A \subset B$.

Если A — симметрический оператор, то $A \subset A^*$, причем всякое симметрическое расширение оператора A содержится в A^*.

Оператор A, совпадающий со своим сопряженным (т. е. $A = A^*$), называется самосопряженным; он не имеет симметрических расширений.

Симметрический оператор, не имеющий симметрических расширений, но не совпадающий со своим сопряженным, называется максимальным симметрическим оператором.

Теорема 5.1.3. *Если A — эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H, то для любых $k,r \in \mathbf{N}$, $k < r$, и для любого $x \in D_{A^r}$*

$$\|A^k x\| \le \|x\|^{1-\frac{k}{r}} \|A^r x\|^{\frac{k}{r}}. \tag{5.1.5}$$

Если, в частности, A — самосопряженный оператор и $A \neq 0$, то неравенство (5.1.5) *неулучшаемо.*

Доказательство. Для $x \in D_{A^2}$ имеем

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (x, A^2 x) \le \|x\| \|A^2 x\|,$$

что эквивалентно (5.1.5) при $k = 1$ и $r = 2$. Завершить доказательство (5.1.5) можно по индукции, как при доказательстве теоремы 5.1.2.

Пусть теперь A — самосопряженный оператор, $A \neq 0$, и пусть E_λ — разложение единицы оператора A. Если $\lambda_0 \neq 0$ — какая-нибудь точка спектра оператора A, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется вектор x_ε, такой, что

$$\left\| \left(E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon} \right) x_\varepsilon \right\| = 1.$$

Полагая $y_\varepsilon = (E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon}) x_\varepsilon$ и считая, что точки $\lambda_0 \pm \varepsilon$ не принадлежат дискретному спектру, будем иметь

$$A^k y_\varepsilon = \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} \lambda^k dE_\lambda x_\varepsilon, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ получим

$$A^k y_\varepsilon = \lambda_0^k y_\varepsilon + o(1).$$

Значит, при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\|A^k y_\varepsilon\|}{\|y_\varepsilon\|^{1-k/r}\|A^r y_\varepsilon\|^{k/r}} \to 1,$$

откуда следует неулучшаемость (5.1.5). Теорема доказана.

Проанализируем с точки зрения применения теоремы 5.1.3 операторы дифференцирования в пространстве $L_2(a,b)$. Здесь мы используем материал из [20, с. 162–170].

Пусть $L_2(a,b)$ ((a,b) — конечный интервал, полуось $(0,\infty)$ или числовая ось $\mathbf{R}$) — пространство измеримых комплекснозначных функций $x(t)$, таких, что

$$\|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Пространство $L_2(a,b)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x,y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}dt.$$

Оператор $\mathcal{P}$ в $L_2(a,b)$, который функции $x(t)$ ставит в соответствие функцию

$$\mathcal{P}x = i\frac{dx}{dt},$$

называется оператором дифференцирования. Область определения $D_{\mathcal{P}}$ оператора $\mathcal{P}$ состоит из локально абсолютно непрерывных на (a,b) функций $x(t)$, таких, что

$$x, x' \in L_2(a,b). \qquad (A)$$

Если $(a,b)=\mathbf{R}$ и $x\in D_{\mathcal{P}}$, то автоматически $x(t)\to 0$, если $t\to-\infty$ или $t\to\infty$. Отсюда следует, что в случае пространства $L_2(\mathbf{R})$ оператор $\mathcal{P}$ является самосопряженным оператором. Поэтому к его степеням применима теорема 5.1.3. Таким образом, из этой теоремы вытекает неравенство Харди–Литлвуда–Полиа (1.6.1).

Если (a,b) есть конечный интервал или полуось $(0,\infty)$, оператор $\mathcal{P}$ с областью определения, состоящей из локально абсолютно непрерывных на (a,b) функций x, удовлетворяющих условию (A), не является симметрическим. Поэтому теорема 5.1.3 не применима. Однако, сужая область определения и требуя, чтобы функции x удовлетворяли некоторым краевым условиям, придем к симметрическим операторам.

В случае конечного интервала достаточно, например, потребовать выполнения следующего краевого условия:

$$x(a)=x(b)=0. \tag{B}$$

Совокупность $D_{\mathcal{P}}$ функций, удовлетворяющих условиям (A) и (B), будет плотной в $L_2(a,b)$, а оператор $\mathcal{P}$ с такой областью задания будет симметрическим (и неограниченным) оператором. Теорема 5.1.3, таким образом, в этом случае применима.

Отметим [20], что сопряженный к оператору $\mathcal{P}$ с такой областью определения, задаваемой условиями (A) и (B), будет оператор

$$\mathcal{P}^*x=ix'(t)$$

с областью определения, задаваемой только условием (A).

Любое симметрическое расширение рассматриваемого оператора сводится (см. [20]) к ослаблению условия (B) на область определения: область определения любого симметрического расширения $\widetilde{\mathcal{P}}$ оператора $\mathcal{P}$ состоит из функций, удовлетворяющих условию (A) и следующему условию:

$$\varphi(b)=\theta\varphi(a), \tag{$\tilde{B}$}$$

где θ $(|\theta|=1)$ — некоторая, зависящая от расширения $\widetilde{\mathcal{P}}$, константа. Отметим, что любое симметрическое расширение $\widetilde{\mathcal{P}}$ оператора $\mathcal{P}$ является самосопряженным оператором.

Если $a = 0$, $b = 2\pi$ и $\theta = 1$, то приходим к оператору дифференцирования в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ 2π-периодических комплекснозначных функций. Таким образом, теорема 1.6.2 также является следствием теоремы 5.1.3.

Обратимся, наконец, к случаю, когда $(a, b) = (0, \infty)$. В этом случае в качестве второго условия, задающего область определения оператора $\mathcal{P}$, примем условие

$$x(0) = 0. \tag{B_+}$$

Оператор $\mathcal{P}$ с областью определения, задаваемой условиями (A) и (B_+), будет симметрическим (неограниченным) оператором. Сопряженным $\mathcal{P}^*$ к рассматриваемому оператору $\mathcal{P}$ будет оператор

$$\mathcal{P}^* x = i x'(t) \tag{5.1.6}$$

с областью определения, задаваемой только условием (A). Следовательно, оператор $\mathcal{P}$ не является самосопряженным. При этом (см. [20, с. 168]), в отличие от случая конечного интервала, рассматриваемый симметрический оператор $\mathcal{P}$ на полуоси не имеет симметрических расширений. Таким образом, оператор дифференцирования на полуоси с областью определения, задаваемой условиями (A) и (B_+), является максимальным симметрическим оператором, сопряженным к которому является оператор дифференцирования (5.1.6) с областью определения, задаваемой только условием (A). Следовательно, естественным обобщением задачи о точной константе в неравенстве вида

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(0,\infty)} \le C_{r,k} \|x\|^{1-\frac{k}{r}}_{L_2(0,\infty)} \|x^{(r)}\|^{\frac{k}{r}}_{L_2(0,\infty)} \tag{5.1.7}$$

является задача о точных неравенствах вида

$$\|A^k x\| \le C_{r,k}(A) \|x\|^{1-\frac{k}{r}} \|A^r x\|^{\frac{k}{r}} \tag{5.1.8}$$

для степеней оператора A, сопряженного к максимальному симметрическому несамосопряженному оператору B, действующему в гильбертовом пространстве.

Для оператора дифференцирования в пространстве $L_2(0,\infty)$ Г. Харди и Дж. Литлвудом было доказано (см. теорему 1.5.1) неравенство

$$\|x'\|_2 \le \sqrt{2}\|x\|_2^{1/2}\|x''\|_2^{1/2} \tag{5.1.9}$$

с неулучшаемой константой $C_{2,1}(d/dt) = \sqrt{2}$. Известно (см. § 1.5) несколько методов доказательства неравенства (5.1.9). Один из них, опирающийся на рассмотрение некоторого квадратичного функционала и на специальное расщепление области определения оператора d^2/dt^2, был обобщен Ю.И. Любичем на произвольный оператор A, сопряженный с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором в гильбертовом пространстве. Тем самым ему удалось доказать, что для любого такого оператора

$$C_{2,1}(A) = \sqrt{2}.$$

Развивая упомянутый метод, Ю.И. Любич показал, что вычисление точной константы $C_{2,1}(A)$ на полуоси можно свести к решению одного или нескольких алгебраических уравнений. В настоящем параграфе приведем только формулировки полученных им результатов. В параграфе 5.12 достаточно подробно опишем осуществленное Н.П. Купцовым развитие другого метода доказательства неравенства (5.1.9), которое также позволило исследовать задачу о точной константе в неравенстве (5.1.8) в случае, когда $A = d/dt$. Вариационный метод доказательства (см. [327]) неравенства (5.1.9) был обобщен А.П. Буслаевым [126].

Основной результат Ю.И. Любича состоит в следующем.

Теорема 5.1.4. *Для оператора A, сопряженного с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором B в гильбертовом пространстве H, точные константы $C_{r,k}(A)$ в неравенстве* (5.1.8) *даются формулой*

$$C_{r,k}(A) = \sqrt{\frac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}p_{r,k}}}\,,$$

где $p_{r,k}$ — наименьшее из значений p,

$$0 < p < \frac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}}, \tag{5.1.10}$$

для которых равен нулю определитель

$$Q = \det \begin{Vmatrix} 1 & \zeta_1 & \zeta_1^2 & \dots & \zeta_1^{k-1} & \zeta_1^{k+r} & \zeta_1^{k+r+1} & \dots & \zeta_1^{2r-1} \\ 1 & \zeta_2 & \zeta_2^2 & \dots & \zeta_2^{k-1} & \zeta_2^{k+r} & \zeta_2^{k+r+1} & \dots & \zeta_2^{2r-1} \\ . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 1 & \zeta_r & \zeta_r^2 & \dots & \zeta_r^{k-1} & \zeta_r^{k+r} & \zeta_r^{k+r+1} & \dots & \zeta_r^{2r-1} \end{Vmatrix}, \tag{5.1.11}$$

составленный по корням ζ_i уравнения

$$\zeta^{2r} + p\zeta^{2k} + 1 = 0, \tag{5.1.12}$$

лежащим в нижней полуплоскости.

Из теоремы 5.1.4 непосредственно вытекает такая теорема.

Теорема 5.1.5. *Точные константы $C_{r,k}(A)$ в неравенстве* (5.1.8) *не зависят от оператора A в классе операторов, сопряженных с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором в гильбертовом пространстве.*

С помощью этой теоремы устанавливаются следующие два следствия.

Следствие 5.1.1. *В условиях теоремы* 5.1.5

$$C_{r,k}(A) = C_{r,r-k}(A).$$

Следствие 5.1.2. *В условиях теоремы* 5.1.5

$$C_{r,k}(A) \le \binom{r}{k}.$$

Опираясь на теорему 5.1.4, легко дать метод вычисления констант $C_{r,k}(A)$, в существенном сводящийся к решению алгебраических уравнений с числовыми коэффициентами.

Заметим, что если определитель (5.1.11) равен нулю, то существует нетривиальный полином вида

$$F(\zeta) = \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_j \zeta^j + \zeta^{k+r} \sum_{j=0}^{r-k+1} \Psi_j \zeta^j, \tag{5.1.13}$$

который обращается в нуль во всех точках $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$. Но тогда полином $F(\zeta)F(-\zeta)$ должен делиться на

$$f_p(\zeta) = \zeta^{2r} - p\zeta^{2k} + 1.$$

Итак, для нахождения $C_{r,k}(A)$ достаточно выполнить следующие операции.

1. Составить полином $F(\zeta)$ вида (5.1.13) и найти остаток

$$r(\zeta) = \sum_{l=0}^{r-1} r_l\left(\Phi_0, \ldots, \Phi_{k-1}, \Psi_0, \ldots, \Psi_{r-k-1}; p\right)\zeta^{2l}$$

от деления $F(\zeta)F(-\zeta)$ на $f_p(\zeta)$.

2. Из системы уравнений

$$r_l\left(\Phi_0, \ldots, \Phi_{k-1}, \Psi_0, \ldots, \Psi_{r-k-1}; p\right) = 0, \quad l = 0, \ldots, r-1, \tag{5.1.14}$$

исключить неизвестные $\Phi_0, \ldots, \Phi_{k-1}, \Psi_0, \ldots, \Psi_{r-k-1}$, полагая, что они не равны нулю одновременно. Это можно сделать (см. [245, § 6]) так, чтобы для p получилось алгебраическое уравнение (с целыми коэффициентами).

3. Решить полученное в п. 2 уравнение относительно p в интервале (5.1.10).

4. Отделить посторонние значения p, если таковые имеются. Для этого достаточно при каждом из найденных в п. 3 значений p решить уравнение (5.1.12), вычислить соответствующий определитель (5.1.11), а затем отбросить те значения p, для которых этот определитель отличен от нуля, и из оставшихся p взять наименьшее.

5.2. Уточнение неравенства Харди–Литлвуда–Полиа

Неравенство Харди–Литлвуда–Полиа (1.6.1)

$$\|x^{(k)}\|_2 \le \|x\|_2^{\frac{r-k}{r}} \|x^{(r)}\|_2^{\frac{k}{r}}, \quad x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}), \tag{5.2.1}$$

эквивалентно неравенству

$$\|x^{(k)}\|_2 \le \frac{r-k}{r} h^{-k}\|x\|_2 + \frac{k}{r} h^{r-k}\|x^{(r)}\|_2, \tag{5.2.2}$$

справедливому при всех $h > 0$.

В данном параграфе приведем следующее уточнение неравенства (5.2.2).

Для $x \in L_{2,2}(\mathbf{R})$ и $h > 0$ положим

$$\Delta_h x(t) := x(t) - x(t+h).$$

Теорема 5.2.1. *Пусть $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$ (причем $r > 2$ при $k = 1$), и $h > 0$. Для любой функции $x \in L_{2,2}(\mathbf{R})$ выполняется неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_2 \le \frac{r-k}{r} h^{-k} \frac{1}{2} \|\Delta_{\pi h} x\|_2 + \frac{k}{r} h^{r-k} \|x^{(r)}\|_2. \tag{5.2.3}$$

Доказательство. Если $\hat{x}(t)$ — преобразование Фурье функции $x(t)$, то в смысле сходимости в $L_2(\mathbf{R})$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(u) e^{itu} du.$$

Тогда

$$x^{(k)}(t) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(u) u^k e^{itu} du.$$

Положим

$$\Lambda(x,t) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(u) \hat{x}(u) e^{itu} du,$$

где

$$\lambda(u) = \begin{cases} u^k - \frac{k}{r} h^{r-k} u^r \operatorname{sgn}\{u^{r+k}\}, & \text{если } |u| \le \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{r-k}} \frac{1}{h}, \\ 0, & \text{если } |u| \ge \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{r-k}} \frac{1}{h}. \end{cases}$$

Имеем

$$\|x^{(k)}\|_2 \le \|\Lambda(x)\|_2 + \|x^{(k)} - \Lambda(x)\|_2. \tag{5.2.4}$$

Оценим величину последнего слагаемого в (5.2.4):

$$x^{(k)}(t) - \Lambda(x,t) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(u)\{u^k - \lambda(u)\}e^{itu}du =$$

$$= \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(u)\frac{u^k - \lambda(u)}{u^r}u^r e^{itu}du.$$

Воспользуемся теоремой Планшереля

$$\|x^{(k)} - \Lambda(x)\|_2 = \left\|\hat{x}(u)\frac{u^k - \lambda(u)}{u^r}u^r\right\|_2 \leq$$

$$\leq \max_u \left|\frac{u^k - \lambda(u)}{u^r}\right| \|\hat{x}(u)u^r\|_2 =$$

$$= \max_u \left|\frac{u^k - \lambda(u)}{u^r}\right| \|x^{(r)}(u)\|_2 = \frac{k}{r}h^{r-k}\|x^{(r)}\|_2. \qquad (5.2.5)$$

Равенство

$$\max_u \left|\frac{u^k - \lambda(u)}{u^r}\right| = \frac{k}{r}h^{r-k}$$

проверяется непосредственным вычислением.

Оценивая слагаемое $\|\Lambda(x)\|_2$, воспользуемся определением $\Lambda(x)$, теоремой Планшереля и равенством $\lambda(u) = 0$ при $|u|h \geq \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{r-k}}$. Полагая $\tau = \tau(r,k,h) = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{r-k}}\frac{1}{h}$, имеем

$$\Lambda(x,t) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|u|\leq\tau} \lambda(u)\hat{x}(u)e^{itu}du =$$

$$= \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|u|\leq\tau} \frac{u^k - \frac{k}{r}h^{r-k}u^r \operatorname{sgn}\{u^{r+k}\}}{1 - e^{i\pi hu}}\left(1 - e^{i\pi hu}\right)\hat{x}(u)e^{itu}du,$$

$$\|\Lambda(x)\|_2 =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|u|\le\tau} \left| \frac{u^k - \frac{k}{r} h^{r-k} u^r \operatorname{sgn}\{u^{r+k}\}}{1 - e^{i\pi hu}} \right|^2 \left|1 - e^{i\pi hu}\right|^2 |\hat{x}(u)|^2 \, du \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \max_{|u|\le\tau} \left| \frac{u^k - \frac{k}{r} h^{r-k} u^r \operatorname{sgn}\{u^{r+k}\}}{1 - e^{i\pi hu}} \right| \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|1 - e^{i\pi hu}\right|^2 |\hat{x}(u)|^2 \, du \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \max_{0<u\le\tau} \frac{\left| u^k - \frac{k}{r} h^{r-k} u^r \right|}{\left|1 - e^{i\pi hu}\right|} \|x(t) - x(t + \pi h)\|_2.$$

Ниже исследуем поведение функции

$$\frac{\left| u^k - \frac{k}{r} h^{r-k} u^r \right|}{\left|1 - e^{i\pi hu}\right|} = \frac{u^k - \frac{k}{r} h^{r-k} u^r}{2 \sin \frac{\pi hu}{2}}, \quad 0 \le u \le \tau,$$

и докажем неравенство

$$\max_{0<u\le\tau} \frac{u^k - \frac{k}{r} h^{r-k} u^r}{2 \sin \frac{\pi hu}{2}} \le \frac{1}{2} \frac{r-k}{r} \frac{1}{h^k}. \tag{5.2.6}$$

Если теперь воспользуемся им, то получим

$$\|\Lambda(x)\|_2 \le \frac{r-k}{r} h^{-k} \frac{1}{2} \|\Delta_{\pi h} x\|_2. \tag{5.2.7}$$

Подставив оценки (5.2.5) и (5.2.7) в (5.2.4), получим утверждение теоремы.

Обратимся к доказательству неравенства (5.2.6). Положим $hu=t$, $\bar{t}=\bar{t}(r,k)=\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{r-k}}$ и будем доказывать равносильное неравенство

$$t^k-\frac{k}{r}t^r\le\frac{r-k}{r}\sin\frac{\pi t}{2},\quad 0\le t\le\bar{t}<2.$$

Последнее условие $\bar{t}<2$ равносильно очевидному неравенству $k^{-1}2^k<r^{-1}2^r$ при $2\le k<r$. Заметим также, что функция $\psi(t)=t^k-\frac{k}{r}t^r$ возрастает на отрезке $[0,1]$ и убывает на $[1,\bar{t}]$, причем $\psi(\bar{t})=0$, поэтому $\psi(\bar{t})\ge 0$ при $0\le t\le\bar{t}$, и это позволило нам снять знак модуля в (5.2.6).

Составим разность $r(t)=\psi(t)-\frac{r-k}{r}\sin\frac{\pi t}{2}$ и будем доказывать неравенство $r(t)\le 0$. В достаточно малой окрестности $t=0$ неравенство $r(t)\le 0$ выполняется, $r(0)=r(1)=0;\ r(\bar{t})<0$. Если предположить перемену знака $r(t)$ в точке $t_1,\ 0<t_1<1,\ r(t_1)=0$, то найдутся точки $0<t_1'<t_1<t_1''<1$, где $r(t_1')=r(t_1'')=0$; кроме того, $r'(1)=0$. Следовательно,

$$r''(t)=\psi''(t)-\left\{\frac{r-k}{r}\sin\frac{\pi t}{2}\right\}''=$$

$$=k(k-1)t^{k-2}-k(r-1)t^{r-2}-\left\{-\frac{r-k}{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi t}{2}\right\}$$

будет иметь по крайней мере два различных нуля на $(0,1)$. Эти нули могут быть только на интервале $\left(\left\{\frac{k-1}{r-1}\right\}^{\frac{1}{r-k}};1\right)$, но такое невозможно, поскольку $\psi''(t)$ убывает и выпукла вверх, а функция $-\frac{r-k}{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi t}{2}$ убывает на $\left(\left\{\frac{k-1}{r-1}\right\}^{\frac{1}{r-k}};1\right)$ и возрастает на $(1,\bar{t})$, оставаясь при этом выпуклой вниз на указанном интервале.

Если предположить перемену знака $r(t)$ в точке $t=t_2$, $1\le t_2<\bar{t},\ r(t_2)=0$, то найдется еще одна точка перемены знака $r(t)$,

$t = t_3$, $t_2 < t_3 < \bar{t}$, поскольку $r(\bar{t}) < 0$. Таким образом, опять существует $t = t_2'$, $t_3 < t_2' < t_3$, где $r'(t_2') = 0$; кроме того, $r'(0) = r'(1) = 0$. Наличие трех различных нулей у $r'(t)$ приводит к существованию по крайней мере двух различных нулей $r''(t)$ на интервале $\left(\dfrac{k-1}{r-1}, t\right)$, и это невозможно по той же причине.

Неравенство (5.2.6) полностью доказано, и завершено доказательство теоремы.

Исключительный случай для предыдущей теоремы составляет $k = 1$, $r = 2$ и восполняется следующим утверждением.

Теорема 5.2.2. *Для любой функции $x \in L_{2,2}(\mathbf{R})$ при любом $h > 0$ выполняется неравенство*

$$\|x'\|_2 \le \frac{1}{h}\frac{1}{\pi}\|\Delta_{\pi h}x\|_2 + \frac{1}{2}h\|x''\|_2.$$

Доказательство. Рассмотрим все тот же оператор $\Lambda(x,t)$ при $k = 1$, $r = 2$:

$$\Lambda(x,t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(u)\hat{x}(u)e^{itu}du,$$

где

$$\lambda(u) = \begin{cases} u - \dfrac{1}{2}hu^2\operatorname{sgn}\{u\}, & \text{если } |u| \le \dfrac{2}{h}, \\ 0, & \text{если } |u| \ge \dfrac{2}{h}. \end{cases}$$

Оценку сверху проводим аналогично предыдущему случаю (здесь $\tau = 2h^{-1}$):

$$\|x'\|_2 \le \|x' - \Lambda(x)\|_2 + \|\Lambda(x)\|_2 = \left\|\hat{x}(u)\frac{u-\lambda(u)}{u^2}u^2\right\|_2 +$$

$$+\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|u|\le\tau}\left|\frac{u - \frac{1}{2}hu^2\operatorname{sgn}\{u\}}{1-e^{i\pi hu}}\right|^2 \left|1-e^{i\pi hu}\right|^2 |\hat{x}(u)|^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq \max_u \left| \frac{u-\lambda(u)}{u^2} \right| \|x''\|_2 + \max_{0<u\leq\tau} \frac{u-\frac{1}{2}hu^2}{2\sin\frac{\pi hu}{2}} \|\Delta_{\pi h}x\|_2 =$$

$$= \frac{1}{2}h\|x''\|_2 + \frac{1}{\pi h}\|\Delta_{\pi h}x\|_2.$$

Оба равенства

$$\max_u \left| \frac{u-\lambda(u)}{u^2} \right| = \frac{h}{2}, \qquad \max_{0<u\leq\tau} \frac{u-\frac{1}{2}hu^2}{2\sin\frac{\pi hu}{2}} = \frac{1}{\pi h}$$

очевидны. Полагая, например, $hu = t$ во втором случае, получаем неравенство

$$t - \frac{1}{2}t^2 \leq \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

которое справедливо при $t = 0$, $t = 1$ и $t = 2$; если бы $r(t) = t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}$ сменило знак на $(0,2)$, то производная $r'(t) = 1 - t - \cos\frac{\pi t}{2}$ имела бы по крайней мере два нуля на $(0,2)$, что противоречит единственности нуля $r'(1) = 0$ на $(0,2)$.

Исследуем точность неравенства в теореме 5.2.2. Достаточно это сделать для $h = 1$:

$$\|x'\|_2 \leq \frac{1}{\pi}\|\Delta_\pi x\|_2 + \frac{1}{2}\|x''\|_2. \tag{5.2.8}$$

На семействе функций $x_1(t,\delta)$ с преобразованием Фурье

$$\hat{x_1}(t,\delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t \leq \delta, \\ 0, & \text{если } t \notin [0,\delta],\ \delta > 0, \end{cases}$$

неравенство (5.2.8) при $\delta \to 0$ примет вид

$$\left(\frac{1}{3}\delta^3\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\delta^3\right)^{\frac{1}{2}} + o\left(\delta^{3/2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\delta^5\right)^{\frac{1}{2}},$$

и, таким образом, константу π^{-1} нельзя заменить меньшей. Аналогично, на семействе функций $x_2(t,\delta)$ с преобразованием Фурье

$$\hat{x_2}(t,\delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 2-\delta \le t \le 2, \\ 0, & \text{если } t \notin [2-\delta, 2],\ 0 < \delta < 2, \end{cases}$$

при $\delta \to 0$ неравенство (5.2.8) запишем в виде

$$2\delta^{1/2} + o\left(\delta^{3/2}\right) \le \frac{1}{2}\left\{4\delta^{1/2} + o\left(\delta^{1/2}\right)\right\},$$

и константу 2^{-1} тоже уменьшить нельзя. Теорема доказана.

5.3. Одно неравенство для функций, заданных на отрезке

Обозначим $I_{2,r}$ — пространство функций x, измеримых на $\mathbf{I} = [-1,1]$ и таких, что

$$\|x\|_{I_{2,r}} := \left\{\int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^r |x(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

и пусть $L^r_{2,r}([-1,1])$ — пространство функций $x \in L_2([-1,1])$, у которых $x^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ при любом $\varepsilon \in (0,\,1)$ и $x^{(r)} \in I_{2,r}$.

Пусть далее $\{X_k(t)\}_0^\infty$ — ортонормированная на $[-1,1]$ система многочленов Лежандра, а $c_k(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)X_k(t)dt$, $k = 0,1,\ldots,$ — коэффициенты Фурье–Лежандра функции x.

Теорема 5.3.1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}_0$, $0 \le k \le r-1$. Тогда для любой функции $x \in L^r_{2,r}([-1,1])$, удовлетворяющей условию*

$$c_s(x) = 0 \ \ (s = k, k+1, \ldots, r-1), \tag{5.3.1}$$

выполнено неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{I_{2,k}} \le \frac{\Gamma^{1/2}(r+k+1)}{\Gamma^{1/2}(r-k+1)\Gamma^{k/2r}(2r+1)}\|x\|_{I_{2,0}}^{1-k/r}\|x^{(r)}\|_{I_{2,r}}^{k/r}, \tag{5.3.2}$$

где Γ — *гамма-функция. Неравенство* (5.3.2) *точное, знак равенства достигается при* $x = X_r$.

Доказательство. Из условий теоремы легко следует, что $x^{(m)} \in I_{2,m}$ $(m = 0, 1, \ldots, r)$, так что обе части неравенства (5.3.2) конечны. Поскольку при $k = 0$ неравенство (5.3.2) тривиально, то будем считать, что $0 < k \le r-1$. Обозначим $\{J_l^{(\alpha,\beta)}(t)\}_0^\infty$ — систему многочленов Якоби, ортонормированную с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ на $[-1, 1]$. Разложение в ряд Фурье–Лежандра функции $x \in I_{2,0}$ имеет вид $x(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i(x)X_i(t)$. Разложение функции $x^{(k)}$ в ряд Фурье по системе $\{J_l^{(k,k)}(t)\}_0^\infty$ имеет вид

$$x^{(k)}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} c_i(x)\left(\frac{(i+k)!}{(i-k)!}\right)^{1/2} J_{i-k}^{(k,k)}(t);$$

аналогично

$$x^{(r)}(t) = \sum_{i=r}^{\infty} c_i(x)\left(\frac{(i+r)!}{(i-r)!}\right)^{1/2} J_{i-r}^{(r,r)}(t).$$

В силу равенства Парсеваля

$$\|x\|_{I_{2,0}}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x)^2, \quad \|x^{(k)}\|_{I_{2,k}}^2 = \sum_{i=k}^{\infty} c_i(x)^2\frac{(i+k)!}{(i-k)!}, \tag{5.3.3}$$

$$\|x^{(r)}\|_{I_{2,r}}^2 = \sum_{i=r}^{\infty} c_i(x)^2\frac{(i+r)!}{(i-r)!}.$$

Учитывая, что $c_i(x) = 0$ $(i = k, k+1, ..., r-1)$, и применяя неравенство Гельдера с показателями $(1-k/r)^{-1}$ и r/k, имеем

$$\|x^{(k)}\|_{I_{2,k}}^2 = \sum_{i=r}^{\infty} c_i(x)^2\frac{(i+k)!}{(i-k)!} =$$

$$= \sum_{i=r}^{\infty} |c_i(x)|^{2(1-k/r)} |c_i(x)|^{2k/r} \left(\frac{(i+r)!}{(i-r)!} \right)^{k/r} \times$$

$$\times ((i+r)!)^{-k/r} ((i-r)!)^{k/r} \frac{(i+k)!}{(i-k)!} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=r}^{\infty} c_i(x)^2 \right)^{1-k/r} \left(\sum_{i=r}^{\infty} c_i(x)^2 \frac{(i+r)!}{(i-r)!} \right)^{k/r} \times$$

$$\times \sup_{i \geq r} \left(((i+r)!)^{-k/r} ((i-r)!)^{k/r} \frac{(i+k)!}{(i-k)!} \right) =$$

$$= \sup_{i \geq r} \left(((i+r)!)^{-k/r} ((i-r)!)^{k/r} \frac{(i+k)!}{(i-k)!} \right) \|x\|_{I_{2,0}}^{2(1-k/r)} \|x^{(r)}\|_{I_{2,r}}^{2k/r}.$$

Покажем, что

$$\sup_{i \geq r} \left(((i+r)!)^{-k/r} (i-r)!^{k/r} \frac{(i+k)!}{(i-k)!} \right) = ((2r)!)^{-k/r} \frac{(r+k)!}{(r-k)!}. \tag{5.3.4}$$

Тем самым неравенство (5.3.2) будет доказано. Чтобы получить (5.3.4) достаточно проверить, что функция

$$\gamma_{k,r} = ((i+r)!)^{-k/r} (i-r)!^{k/r} \frac{(i+k)!}{(i-k)!}$$

убывает с ростом i от r до ∞. Положим

$$f_{k,r}(t) = \left(\prod_{s=-k+1}^{k} (t+s) \right)^{r-k} \left(\prod_{s=-r+1}^{r} (t+s) \right)^{-k}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{d \ln f_{k,r}(t)}{dt} = (r-k) \sum_{s=-k+1}^{k} \frac{1}{t+s} - k \sum_{s=-r+1}^{k} \frac{1}{t+s} - k \sum_{s=k+1}^{r} \frac{1}{t+s} =$$

$$= (r-k) \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{1}{t-k+s} + \frac{1}{t+k-s+1} \right) -$$

$$-k\sum_{s=1}^{r-k}\left(\frac{1}{t-r+s}+\frac{1}{t+r-s+1}\right).$$

Нетрудно проверить, что каждая сумма вида $(t-k+s)^{-1}+(t+$ $+k-s+1)^{-1}$, стоящая под знаком $\sum\limits_{s=1}^{k}$, меньше любой суммы вида $(t-r+s)^{-1}+(t+r-s+1)^{-1}$, стоящей под знаком $\sum\limits_{s=1}^{r-k}$, откуда следует, что при $t\in[r,\infty]$ $\dfrac{d\ln f_{k,r}(t)}{dt}<0$, а значит, $f_{k,r}(t)$ убывает в $[r,\infty]$. Равенство (5.3.4), а с ним и неравенство (5.3.2) доказаны.

Тот факт, что при $x=X_r$ неравенство (5.3.2) превращается в равенство, доказывается весьма просто. Следует учесть, что

$$X_r^{(k)}(t)=\left(\frac{(r+k)!}{(r-k)!}\right)^{1/2}J_{r-k}^{(k,k)}(t),$$

$$X_r^{(k)}(t)=((2r)!)^{1/2}\,J_0^{(r,r)}(t).$$

Теорема доказана.

Замечание. Если для функции $x\in L_{2,r}^r([-1,1])$ не выполняется хотя бы одно из равенств (5.3.1), утверждение теоремы теряет силу; достаточно взять $x=X_s$ $(k\le s\le r-1)$.

5.4. Аддитивные неравенства типа Харди–Литлвуда–Полиа для периодических функций

Согласно неравенству Харди–Литлвуда–Полиа (1.6.1)

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_2(\mathbf{R})}^2\le\|x\|_{L_2(\mathbf{R})}^{2(1-k/r)}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_2(\mathbf{R})}^{2k/r},\quad k\in\mathbf{N},\quad 0<k<r, \tag{5.4.1}$$

для любой функции $x\in L_{2,2}^r(\mathbf{R})$, причем константа 1 в этом неравенстве неулучшаема. Из неравенства (5.4.1) следует, что для любого $A>0$ и для любой функции $x\in L_{2,2}^r(\mathbf{R})$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_2(\mathbf{R})}^2\le$$

$$\leq \left\{ \frac{rA}{r-k} \|x\|^2_{L_2(\mathbf{R})} \right\}^{1-k/r} \left\{ \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{(r-k)/k} \left\| x^{(r)} \right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} \right\}^{k/r}.$$

Используя неравенство Юнга

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 \leq p < \infty, \quad a, b > 0,$$

с показателями $p = \dfrac{r}{r-k}$ и $p' = \dfrac{r}{k}$, получаем для любого $A > 0$ и для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R})$ следующее неравенство:

$$\left\| x^{(k)} \right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} \leq A \|x\|^2_{L_2(\mathbf{R})} + \frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}} \left\| x^{(r)} \right\|^2_{L_2(\mathbf{R})}. \quad (5.4.2)$$

Это неравенство неулучшаемо в следующем смысле: для данного $A > 0$ точная нижняя грань констант B, таких, что неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} \leq A \|x\|^2_{L_2(\mathbf{R})} + B \left\| x^{(r)} \right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} \quad (5.4.3)$$

выполняется для всех функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R})$, равна

$$\frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}}. \quad (5.4.4)$$

Действительно, для любого $\delta > 0$ существует функция $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R})$, такая, что

$$\left\| x^{(k)} \right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} > (1-\delta) \|x\|^{2(1-k/r)}_{L_2(\mathbf{R})} \left\| x^{(r)} \right\|^{2k/r}_{L_2(\mathbf{R})}. \quad (5.4.5)$$

Для $a > 0$ положим $y(t) := x(at)$ и покажем, что для любых $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ числа δ и a можно выбрать так, что

$$\left\| y^{(k)} \right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} > A \|y\|^2_{L_2(\mathbf{R})} + (1-\varepsilon) \frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}} \left\| y^{(r)} \right\|^2_{L_2(\mathbf{R})}. \quad (5.4.6)$$

Заметим, что

$$\left\|y^{(i)}\right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} = a^{2i-1}\,\|x\|^2_{L_2(\mathbf{R})}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, r.$$

Поэтому в силу (5.4.5) для доказательства (5.4.6) достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$(1-\delta)a^{2k}\,\|x\|^{2(1-k/r)}_{L_2(\mathbf{R})}\left\|x^{(r)}\right\|^{2k/r}_{L_2(\mathbf{R})} > A\,\|x\|^2_{L_2(\mathbf{R})} +$$

$$+(1-\varepsilon)\frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}} a^{2r}\left\|x^{(r)}\right\|^2_{L_2(\mathbf{R})} \tag{5.4.7}$$

при некоторых δ и a. Положим

$$a = \left(\frac{rA}{r-k}\right)^{1/2k}\left(\frac{\|x\|^2_{L_2(\mathbf{R})}}{\left\|x^{(r)}\right\|^2_{L_2(\mathbf{R})}}\right)^{1/2r}.$$

Тогда (5.4.7) принимает вид

$$\frac{rA}{r-k}(1-\delta) > A + (1-\varepsilon)\frac{k}{r}\frac{rA}{r-k}$$

или

$$\frac{r}{r-k}\left[(1-\delta) - (1-\varepsilon)\frac{k}{r}\right] > 1.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполняется для достаточно малых $\delta > 0$. Таким образом, для данного $A > 0$ нижняя грань $B > 0$, таких, что неравенство (5.4.3) справедливо для всех $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R})$, действительно равна величине (5.4.4).

Для краткости положим $\|\cdot\|_2 := \|\cdot\|_{L_2(\mathbf{T})}$.

Неравенство (5.4.1) (а следовательно, и неравенство (5.4.2)) с нормой $\|x\|_2$ вместо $\|x\|_{L_2(\mathbf{R})}$ выполняется также и для периодических функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T})$ (см. (1.6.2)). Кроме того, для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T})$ справедливо неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_2 \le \left\|x^{(r)}\right\|^2_2 \tag{5.4.8}$$

(т.е. выполнен аналог неравенства (5.4.3) с $A = 0$ и $B = 1$). Однако константа (5.4.4) в общем случае не является точной (для заданной константы A).

В данном пункте исследуется следующая задача: для заданного $A \geq 0$ найти точную нижнюю грань констант B, таких, что для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T})$ выполнено неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 \leq A\,\|x\|_2^2 + B\left\|x^{(r)}\right\|_2^2.$$

Обозначим эту нижнюю грань символом $\Phi(\mathbf{T}; r, k; A)$. Исследуется также аналогичная задача для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T})$ с ограничениями на спектр.

Пусть

$$e_\nu(t) := \frac{1}{2\pi}e^{i\nu t},\ \nu \in \mathbf{Z},\ t \in \mathbf{R},$$

$$c_\nu(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(t)e_\nu(t)dt$$

есть коэффициенты Фурье функции x и

$$\sum_{\nu\in\mathbf{Z}} c_\nu(x)e_\nu(t)$$

является ее рядом Фурье.

Для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T})$, $0 < k < r$, и произвольного $A \geq 0$ при помощи равенства Парсеваля имеем

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 = \sum_{\substack{\nu\in\mathbf{Z}\\ \nu\neq 0}} |c_\nu(x)|^2\nu^{2k} \leq$$

$$\leq A\sum_{\nu\in\mathbf{Z}} |c_\nu(x)|^2 + \sum_{\substack{\nu\in\mathbf{Z}\\ \nu\neq 0}} |c_\nu(x)|^2(\nu^{2k} - A) =$$

$$= A\|x\|_2^2 + \sum_{\substack{\nu\in\mathbf{Z}\\ \nu\neq 0}} |c_\nu(x)|^2\nu^{2r}\frac{\nu^{2k} - A}{\nu^{2r}} \leq$$

$$\leq A\|x\|_2^2 + \max_{\nu\in\mathbf{N}} \frac{\nu^{2k} - A}{\nu^{2r}} \sum_{\substack{\nu\in\mathbf{Z}\\ \nu\neq 0}} |c_\nu(x)|^2 \nu^{2r} =$$

$$= A\|x\|_2^2 + \max_{\nu\in\mathbf{N}} \frac{\nu^{2k} - A}{\nu^{2r}} \left\|x^{(r)}\right\|_2^2.$$

Полагая

$$\varphi(A,\nu) := \frac{\nu^{2k} - A}{\nu^{2r}},$$

это неравенство переписываем в виде

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 \leq A\|x\|_2^2 + \max_{\nu\in\mathbf{N}} \varphi(A,\nu) \left\|x^{(r)}\right\|_2^2.$$

Для данного $A \geq 0$ находим значение величины

$$\max_{\nu\in\mathbf{N}} \varphi(A,\nu).$$

Для $\nu \in \mathbf{N}$ положим

$$\psi(\nu) = \nu^{2k}(\nu-1)^{2k} \frac{\nu^{2r-2k} - (\nu-1)^{2r-2k}}{\nu^{2r} - (\nu-1)^{2r}}.$$

Заметим, что $\psi(1) = 0$, $\psi(\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$ и

$$\psi(\nu) < \psi(\nu+1) \tag{5.4.9}$$

для любого $\nu \geq 1$. Действительно, согласно теореме Коши

$$\psi(\nu) = \nu^{2k}(\nu-1)^{2k} \frac{r-k}{r} \theta_\nu^{-2k},\ \nu - 1 < \theta_\nu < \nu.$$

Поэтому неравенство (5.4.9) эквивалентно следующему неравенству:

$$\nu^{2k}(\nu-1)^{2k} \frac{r-k}{r} \theta_\nu^{-2k} < \nu^{2k}(\nu+1)^{2k} \frac{r-k}{r} \theta_{\nu+1}^{-2k}$$

или

$$\left(\frac{\nu-1}{\nu+1}\right)^{2k} < \left(\frac{\theta_\nu}{\theta_{\nu+1}}\right)^{2k}.$$

Последнее неравенство очевидно, так как $\nu - 1 < \theta_\nu$ и $\theta_{\nu+1} < \nu + 1$.

Рассмотрим разность

$$\delta_\nu = \varphi(A, \nu) - \varphi(A, \nu - 1) = \frac{\nu^{2k} - A}{\nu^{2r}} - \frac{(\nu - 1)^{2k} - A}{(\nu - 1)^{2r}}.$$

Для $\nu \geq 2$ будем иметь

$$\delta_\nu = \frac{\nu^{2k}(\nu - 1)^{2r} - \nu^{2r}(\nu - 1)^{2k} - A(\nu - 1)^{2r} + A\nu^{2r}}{\nu^{2r}(\nu - 1)^{2r}} =$$

$$= \frac{\nu^{2r} - (\nu - 1)^{2r}}{\nu^{2r}(\nu - 1)^{2r}} \left(A - \frac{\nu^{2r}(\nu - 1)^{2k} - \nu^{2k}(\nu - 1)^{2r}}{\nu^{2r} - (\nu - 1)^{2r}} \right) =$$

$$= \frac{\nu^{2r} - (\nu - 1)^{2r}}{\nu^{2r}(\nu - 1)^{2r}} \left(A - \nu^{2k}(\nu - 1)^{2k} \frac{\nu^{2r-2k} - (\nu - 1)^{2r-2k}}{\nu^{2r} - (\nu - 1)^{2r}} \right) =$$

$$= \frac{\nu^{2r} - (\nu - 1)^{2r}}{\nu^{2r}(\nu - 1)^{2r}} \left(A - \psi(\nu) \right).$$

Если для данного $A \geq 0$ значение ν_0 такое, что $\psi(\nu_0) \leq A \leq$ $\leq \psi(\nu_0 + 1)$, то для $\nu \leq \nu_0$, приняв во внимание равенство $\operatorname{sgn} \delta_\nu =$ $= \operatorname{sgn}(A - \psi(\nu))$, получим $\delta_\nu \geq 0$, и, следовательно,

$$\varphi(A, 1) \leq \varphi(A, 2) \leq \ldots \leq \varphi(A, \nu_0).$$

Для $\nu > \nu_0$ будет $\delta_\nu \leq 0$ и, следовательно,

$$\varphi(A, \nu_0) \geq \varphi(A, \nu_0 + 1) \geq \ldots$$

Таким образом,

$$\max_{\nu \in \mathbf{N}} \varphi(A, \nu) = \max_{\nu \in \mathbf{N}} \frac{\nu^{2k} - A}{\nu^{2r}} = \varphi(A, \nu_0),$$

если $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0 + 1)$.

Тем самым для данного $A \geq 0$ и любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T})$ доказано неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 \leq A\|x\|_2^2 + \frac{\nu_0^{2k} - A}{\nu_0^{2r}} \left\|x^{(r)}\right\|_2^2 = A\|x\|_2^2 + \varphi(A, \nu_0) \left\|x^{(r)}\right\|_2^2, \tag{5.4.10}$$

если значение ν_0 такое, что $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0 + 1)$.

Покажем, что для данного A константа $\varphi(A, \nu_0)$ в (5.4.10) неулучшаема. Положим $x(t) = \cos \nu_0(t)$. Тогда это неравенство обращается в равенство, так как

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 = \pi\nu_0^{2k}, \quad \|x\|_2^2 = \pi, \quad \left\|x^{(r)}\right\|_2^2 = \pi\nu_0^{2r}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.4.1. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. Тогда для любого $A \geq 0$ и для произвольной функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T})$ выполнено неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 \leq A\|x\|_2^2 + \frac{\nu_0^{2k} - A}{\nu_0^{2r}} \left\|x^{(r)}\right\|_2^2 = A\|x\|_2^2 + \varphi(A, \nu_0) \left\|x^{(r)}\right\|_2^2, \tag{5.4.11}$$

если значение ν_0 такое, что $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0 + 1)$.

Для данного A константа $\varphi(A, \nu_0)$ в (5.4.11) *неулучшаема, т. е.*

$$\Phi(\mathbf{T}; r, k; A) = \frac{\nu_0^{2k} - A}{\nu_0^{2r}}, \tag{5.4.12}$$

где ν_0 такое, что $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0 + 1)$.

Функция $\Phi(\mathbf{T}; r, k; A)$, определенная равенством (5.4.12), непрерывна, линейна на каждом интервале $[\psi(\nu), \psi(\nu + 1)]$ и для любого $\nu \geq 1$

$$\Phi(\mathbf{T}; r, k; \psi(\nu)) = \frac{\nu^{2k} - (\nu - 1)^{2k}}{\nu^{2r} - (\nu - 1)^{2r}}.$$

Покажем, что

$$\frac{\nu_0^{2k} - A}{\nu_0^{2r}} < \frac{k}{r} \left(\frac{r - k}{Ar}\right)^{\frac{r-k}{k}} \quad \text{для} \quad A \neq A_0 := \nu^{2k} \left(\frac{r - k}{r}\right).$$

Для этого рассмотрим функцию

$$f(A) = \frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{Ar}\right)^{\frac{r-k}{k}} - \frac{1}{\nu^{2r-2k}} + \frac{A}{\nu^{2r}}.$$

Имеем

$$f'(A) = \frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}\left(1-\frac{r}{k}\right)A^{-\frac{r}{k}} + \frac{1}{\nu^{2r}},$$

и из условия $f'(A) = 0$ следует

$$A = A_0 = \nu^{2k}\left(\frac{r-k}{r}\right).$$

Нетрудно проверить, что $\psi(\nu_0) \le A_0 \le \psi(\nu_0{+}1)$, $f(A_0) = 0$, причем $f(A)$ имеет в точке A_0 максимум, и наше утверждение доказано.

Напомним, что $\mathcal{T}_n$ — пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n. Ввиду неравенства Зигмунда (см. неравенство (8.1.10)) для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_n$ и для любого $k \in \mathbf{N}$

$$\|\tau^{(k)}\|_2 \le n^k \|\tau\|_2. \tag{5.4.13}$$

Таким образом, для $x = \tau$ выполнен аналог неравенства (5.4.3) с $B = 0$ для любого $A \ge n^k$. Повторяя (с очевидными изменениями) доказательство теоремы 5.4.1, получаем для любых $k, r \in \mathbf{N}$, $k{<}r$, любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_n$ и любого $0 \le A \le n^k$ следующее неравенство:

$$\|\tau^{(k)}\|_2^2 \le A\|\tau\|_2^2 + \max_{\substack{\nu\in\mathbf{N}\\ \nu\le n}} \varphi(A,\nu)\|\tau^{(r)}\|_2^2.$$

Вычислим значение

$$\max_{\substack{\nu\in\mathbf{N}\\ \nu\le n}} \varphi(A,\nu).$$

Заметим, что $\psi(n+1) \le n^{2k}$. Действительно,

$$\psi(n+1) = (n+1)^{2k} n^{2k} \frac{(n+1)^{2r-2k} - n^{2r-2k}}{(n+1)^{2r} - n^{2r}} =$$

$$= n^{2k}\frac{(n+1)^{2r} - n^{2r-2k}(n+1)^{2k}}{(n+1)^{2r} - n^{2r}} \le n^{2k}\frac{(n+1)^{2r} - n^{2r}}{(n+1)^{2r} - n^{2r}} = n^{2k}.$$

Пусть $\psi(\nu_0) \le A \le \psi(\nu_0 + 1)$, где $\nu_0 \le n$. Тогда

$$\max_{\substack{\nu\in\mathbf{N}\\ \nu\le n}} \varphi(A,\nu) = \varphi(A,\nu_0) = \max_{\nu\in\mathbf{N}} \varphi(A,\nu).$$

Если $\psi(n+1) \le A \le n^{2k}$ (т. е. в случае, когда $\psi(\nu_0+1) \le A \le$ $\le \psi(\nu_0+1)$, где $\nu_0 \ge n+1$), то, принимая во внимание соотношение

$$\varphi(A,1) \le \varphi(A,2) \le \ldots \le \varphi(A,n) \le \ldots \le \varphi(A,\nu_0),$$

получаем

$$\max_{\substack{\nu\in\mathbf{N}\\ \nu\le n}} \varphi(A,\nu) = \varphi(A,n) = \frac{n^{2k} - A}{n^{2r}}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.4.2. *Для любых $k,n,r \in \mathbf{N}$, $k < r$, для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_n$ и для любого A, такого, что $0 \le A \le n^{2k}$:*

$$\|\tau^{(k)}\|_2^2 \le A\|\tau\|_2^2 + B\|\tau^{(r)}\|_2^2, \tag{5.4.14}$$

где

$$B = \varphi(A,\nu_0),$$

если $\psi(\nu_0) \le A \le \psi(\nu_0+1)$, $\nu_0 < n$, и

$$B = \varphi(A,n),$$

если $\psi(n) \le A \le n^{2k}$.

Неравенство (5.4.14) *неулучшаемо для любого A, удовлетворяющего условию $0 \le A \le n^{2k}$.*

Отметим, что в случае $\psi(n) \le A \le n^{2k}$ неравенство (5.4.14) является уточнением неравенства (5.4.13), так как правая часть (5.4.14) строго меньше, чем $n^{2k}\|\tau\|_2^2$ для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_n$, $\tau \ne$ $\ne a\cos(nt+b)$, $a,\ b \in \mathbf{R}$.

Рассмотрим множество функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T})$, для которых $c_\nu(x) = 0$ при $|\nu| \le n-1$ (обозначим символом $L^r_{2,2}(\mathbf{T}; n)$ множество таких функций). Для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T}; n)$ хорошо известно следующее неравенство:

$$\|x\|_2^2 \le \frac{1}{n^{2r}} \|x^{(r)}\|_2^2,$$

так что для любого $k < r$

$$\|x^{(k)}\|_2^2 \le \frac{1}{n^{2r-2k}} \|x^{(r)}\|_2^2. \tag{5.4.15}$$

Таким образом, для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T}; n)$ есть аналог неравенства (5.4.3) с константами $A = 0$ и $B = 1/n^{2r-2k}$.

Пусть $A > 0$. Повторяя (с очевидными изменениями) доказательство теоремы 5.4.1, получаем для любых $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$ и для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T}; n)$ следующее неравенство:

$$\|x^{(k)}\|_2 \le A\|x\|_2 + \max_{\substack{\nu \in \mathbf{N} \\ \nu \ge n}} \varphi(A, \nu) \|x^{(r)}\|_2.$$

Вычислим значение

$$\max_{\substack{\nu \in \mathbf{N} \\ \nu \ge n}} \varphi(A, \nu).$$

Пусть сначала $\psi(\nu_0) \le A \le \psi(\nu_0 + 1)$, где $\nu_0 \le n$. Тогда

$$\varphi(A, n) \ge \varphi(A, n+1) \ge \dots$$

и, следовательно,

$$\max_{\substack{\nu \in \mathbf{N} \\ \nu \ge n}} \varphi(A, \nu) = \varphi(A, n),$$

если $A \le \psi(n+1)$.

Пусть теперь $\psi(\nu_0) \le A \le \psi(\nu_0 + 1)$, где $\nu_0 \ge n+1$. В этом случае имеем

$$\max_{\substack{\nu \in \mathbf{N} \\ \nu \ge n}} \varphi(A, \nu) = \max_{\nu \in \mathbf{N}} \varphi(A, \nu_0) = \varphi(A, \nu_0).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.4.3. *Для любых $k, n, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T}; n)$ и для любого $A \geq 0$*

$$\|x^{(k)}\|_2 \leq A\|x\|_2 + B\|x^{(r)}\|_2, \tag{5.4.16}$$

где

$$B = \varphi(A, n),$$

если $A \leq \psi(n+1)$, и

$$B = \varphi(A, \nu_0),$$

если $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0 + 1)$, $\nu_0 \geq n + 1$.

Неравенство (5.4.16) *неулучшаемо для любого $A \geq 0$.*

Отметим, что в случае $0 < A \leq \psi(n+1)$ неравенство (5.4.16) является уточнением неравенства (5.4.15), так как правая часть (5.4.16) строго меньше, чем $n^{-2r+2k}\|x\|_2^2$ для любой функции $x \in$ $\in L^r_{2,2}(\mathbf{T}; n)$, $x \neq a\cos(nt + b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

5.5. Неравенства типа Харди–Литлвуда–Полиа в пространстве $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$

Пусть $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$ — пространство измеримых функций $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, таких, что

$$\|x\|_2 = \|x\|_{2,e^{-t^2}} := \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$L^r_{2,e^{-t^2}} = L^r_{2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$ — пространство функций $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, у которых $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $x^{(r)} \in L_{2,e^{-t^2}}$. Положим $L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R}) = L^r_{2,e^{-t^2}}(\mathbf{R}) \cap L_{2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$.

В настоящем параграфе исследуется следующая задача: для данного $A > 0$ найти точную нижнюю грань таких $B > 0$, что для любой функции $x \in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$ выполнено неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq A\,\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + B\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}. \tag{5.5.1}$$

Обозначим эту нижнюю грань символом $\Phi(\mathbf{R}; r, k; A)$. Исследуется также аналогичная задача для функций $x \in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$ с ограничениями на спектр.

Пусть $M_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \dfrac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$ – полиномы Эрмита.

Положим

$$\bar{H}_n(t) = \frac{H_n(t)}{\|H_n\|_{2,e^{-t^2}}}.$$

Принимая во внимание равенство $H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$, получаем

$$\left\|\bar{H}_n^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} = 2^k \varphi_k(n),$$

где $\varphi_j(t) = t(t-1)\dots(t-j+1)$. Пусть

$$a_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} x(t) \bar{H}_n(t) dt.$$

Неравенство (5.5.1) невозможно, если $A < \|\bar{H}^{(k)}_{r-1}\|^2_{2,e^{-t^2}}$, так как ввиду (5.5.1) для $x(t) = \bar{H}_{m-1}(t)$ имеем $\left\|\bar{H}^{(k)}_{r-1}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \le A$.

Используя равенство Парсеваля, для любой функции $x \in$ $\in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$ и любого $A \ge \|\bar{H}_{r-1}\|^2_{2,e^{-t^2}}$ получаем

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} = \sum_{\nu \ge k} a_\nu^2(x) \|\bar{H}^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} =$$

$$= A \sum_{\nu \ge k} a_\nu^2(x) + \sum_{\nu \ge k} a_\nu^2(x) \left(\|\bar{H}^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} - A \right) \le$$

$$\le A \sum_{\nu \ge k} a_\nu^2(x) + \sum_{\nu \ge r} a_\nu^2(x) \|\bar{H}^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} \frac{\|\bar{H}^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} - A}{\|\bar{H}^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}} \le$$

$$\leq A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \sup_{\nu\geq r} \frac{\|\bar{H}^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} - A}{\|\bar{H}^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}} \|x^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq$$

$$\leq A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \sup_{\nu\geq r} \varphi(A,\nu)\|x^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}},$$

где

$$\varphi(A,\nu) := \frac{\|\bar{H}^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} - A}{\|\bar{H}^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}} = \frac{2^k\varphi_k(\nu) - A}{2^r\varphi_r(\nu)}.$$

Найдем точное значение величины

$$\sup_{\nu\geq r} \varphi(A,\nu).$$

Положим

$$\delta_\nu = \varphi(A,\nu) - \varphi(A,\nu-1).$$

Имеем

$$\delta_\nu = \frac{2^k\varphi_k(\nu) - A}{2^r\varphi_r(\nu)} - \frac{2^k\varphi_k(\nu-1) - A}{2^r\varphi_r(\nu-1)} =$$

$$= \frac{A(\varphi_r(\nu) - \varphi_r(\nu-1)) - 2^k(\varphi_r(\nu)\varphi_k(\nu-1)) - \varphi_k(\nu)\varphi_r(\nu-1)}{2^r\varphi_r(\nu)\varphi_r(\nu-1)} =$$

$$= \frac{\varphi_r(\nu) - \varphi_r(\nu-1)}{2^r\varphi_r(\nu)\varphi_r(\nu-1)} \left[A - 2^k \frac{\varphi_r(\nu)\varphi_k(\nu-1) - \varphi_k(\nu)\varphi_r(\nu-1)}{\varphi_r(\nu) - \varphi_r(\nu-1)}\right] =$$

$$= \frac{\varphi_r(\nu) - \varphi_r(\nu-1)}{2^r\varphi_r(\nu)\varphi_r(\nu-1)}[A - \psi(\nu)],$$

где

$$\psi(\nu) = 2^k \frac{\varphi_r(\nu)\varphi_k(\nu-1) - \varphi_k(\nu)\varphi_r(\nu-1)}{\varphi_r(\nu) - \varphi_r(\nu-1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{k}{r}\right)\varphi_k(\nu) = \left(1 - \frac{k}{r}\right)\left\|H^{(k)}_\nu\right\|^2_{2,e^{-t^2}},$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sgn}\,\delta_\nu = \operatorname{sgn}\,(A - \psi(\nu)).$$

Заметим, что

$$\psi(r) = 2^k \varphi_k(r-1) = \left\| \bar{H}_{r-1}^{(k)} \right\|_{2,e^{-t^2}}^2 .$$

Кроме того, $\forall \nu \geq r$ $\psi_\nu < \psi_{\nu+1}$ и $\psi_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$.

Если для данного $A \geq \left\| \bar{H}_{r-1}^{(k)} \right\|_{2,e^{-t^2}}^2$ значение ν_0 такое, что

$$\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0 + 1),$$

то для $\nu \leq \nu_0$, принимая во внимание равенство

$$\operatorname{sgn} \delta_\nu = \operatorname{sgn}(A - \psi(\nu)),$$

получаем $\delta_\nu \geq 0$, и, следовательно,

$$\varphi(A, r) \leq \varphi(A, r+1) \leq \ldots \leq \varphi(A, \nu_0).$$

В случае $\nu > \nu_0$ имеем $\delta_\nu \leq 0$ и, следовательно,

$$\varphi(A, \nu_0) \geq \varphi(A, \nu_0 + 1) \geq \ldots$$

Таким образом,

$$\sup_{\nu \geq r} \varphi(A, \nu) = \varphi(A, \nu_0),$$

если значение ν_0 такое, что

$$\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0 + 1).$$

Тем самым доказано, что для любого $A \geq \left\| \bar{H}_{r-1}^{(k)} \right\|_{2,e^{-t^2}}^2$ и для любой функции $x \in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{2,e^{-t^2}}^2 \leq A \|x\|_{2,e^{-t^2}}^2 + \varphi(A, \nu_0) \left\| x^{(r)} \right\|_{2,e^{-t^2}}^2 , \qquad (5.5.2)$$

если $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0 + 1)$.

Для данного $A \geq \|\bar{H}_{r-1}^{(k)}\|_{2,e^{-t^2}}^2$ константа $\varphi(A, \nu_0)$ в (5.5.2) неулучшаема, так как это неравенство становится равенством для $x = \bar{H}_{\nu_0}$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 5.5.1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. *Тогда для любого* $A \geq \geq \|\bar{H}_{r-1}^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}$ *и для любой функции* $x \in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$ *выполнено неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \varphi(A,\nu_0)\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} =$$

$$= A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \frac{\|\bar{H}_{\nu_0}^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} - A}{\|\bar{H}_{\nu_0}^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}}\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} =$$

$$= A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \frac{2^k\varphi_k(\nu_0) - A}{2^r\varphi_r(\nu_0)}\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}, \tag{5.5.3}$$

если $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0+1)$.

Для данного $A \geq \|\bar{H}_{r-1}^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}$ *константа* $\varphi(A,\nu_0)$ *в* (5.5.3) *неулучшаема, т. е.*

$$\Phi(\mathbf{R}, r, k, A) = \varphi(A,\nu_0) = \frac{2^k\varphi_k(\nu_0) - A}{2^r\varphi_r(\nu_0)}, \tag{5.5.4}$$

если ν_0 *такое, что* $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0+1)$.

Отметим, что функция $\Phi(\mathbf{R}, r, k, A)$, определенная равенством (5.5.4), непрерывна на $[\psi(r), +\infty)$, линейна на каждом интервале $[\psi(\nu),\ \psi(\nu+1)]$, $\nu \geq r$, и

$$\Phi(\mathbf{R}, r, k, \psi(\nu)) = \frac{\varphi_k(\nu) - \varphi_k(\nu-1)}{2^{r-k}(\varphi_r(\nu) - \varphi_r(\nu-1))}.$$

Пусть π_n — множество алгебраических полиномов степени не выше n. Для $x \in \pi_n$ имеем

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} = \sum_{k\leq\nu\leq n} a_\nu^2(x)\|\bar{H}_\nu^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq$$

$$\leq \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} \sum_{k\leq\nu\leq n} a_\nu^2(x) = \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}\,\|x\|^2_{2,e^{-t^2}}, \tag{5.5.5}$$

и, следовательно, если $A \geq \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}$, то неравенство (5.5.1) выполнено с таким же A и с $B = 0$. Поэтому, рассматривая задачу о точном неравенстве вида (5.5.1) для полиномов, можно предположить, что

$$\|\bar{H}_{r-1}^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq A \leq \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}.$$

Для таких A, как и выше, найдем

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq \|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \sup_{r\leq\nu\leq n} \varphi(A,\nu)\|x^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}},$$

где

$$\varphi(A,\nu) := \frac{\|\bar{H}_\nu^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} - A}{\|\bar{H}_\nu^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}} = \frac{2^k\varphi_k(\nu) - A}{2^r\varphi_r(\nu)}.$$

Вычислим точное значение величины

$$\sup_{r\leq\nu\leq n} \varphi(A,\nu).$$

Напомним, что

$$\psi(r) = \|\bar{H}_{r-1}^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}},$$

и заметим, что

$$\psi(n) = \left(1 - \frac{k}{r}\right)\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} < \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}.$$

Аналогично теореме 5.4.2 можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.5.2. *Пусть $k, r, n \in \mathbf{N}$, $k < r < n$. Тогда для любого $\|\bar{H}_{r-1}^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq A \leq \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}$ и для любого полинома $x \in \pi_n$*

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \varphi(A,n)\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} =$$

$$= A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \frac{\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} - A}{\|\bar{H}_n^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}} \left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} =$$

$$= A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \frac{2^k\varphi_k(n) - A}{2^r\varphi_r(n)} \left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}, \tag{5.5.6}$$

если $\psi(n) = \left(1 - \dfrac{k}{r}\right)\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} \le A \le \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}$.

Если $\psi(\nu_0) \le A \le \psi(\nu_0 + 1)$, $r \le \nu_0 \le n - 1$, *то*

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \le A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \varphi(A, \nu_0)\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}. \tag{5.5.7}$$

Для данного $\|\bar{H}_{r-1}^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} \le A \le \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}$ *константы при* $\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}$ *в* (5.5.6) *и* (5.5.7) *неулучшаемы.*

Положив

$$B = \frac{\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} - A}{\|\bar{H}_n^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}},$$

перепишем (5.5.6) в виде

$$\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \le$$

$$\le \left\{\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} - B\|\bar{H}_n^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}\right\}\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + B\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}.$$

Условие

$$\psi(n) = \left(1 - \frac{k}{r}\right)\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} \le A \le \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}$$

эквивалентно неравенству

$$0 \le B \le \frac{k\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}}{r\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}} = \frac{k}{2^{r-k}r(n-k)\dots(n-r+1)}.$$

Поэтому получим следующую теорему (см. [117]).

Теорема 5.5.3. *Пусть k, r и n — произвольные натуральные числа, удовлетворяющие требованиям $k < r \le n$. Тогда неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \le A\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} + \left\{2^k\binom{n}{k}k! - A2^r\binom{n}{r}r!\right\}\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} \tag{5.5.8}$$

выполнено для любой функции $x \in \pi_n$ и любого A, такого, что

$$A \le \frac{k}{2^{r-k}r(n-k)\dots(n-r+1)}.$$

Неравенство (5.5.8) *обращается в равенство для $x = H_n$, где $H_n(t) := (-1)^n e^{t^2}\dfrac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$ — полином Эрмита.*

Отметим, что неравенство (5.5.6) является уточнением неравенства (5.5.5), так как, используя (5.5.6) и

$$\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \le \|\bar{H}_n^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}\,\|x\|^2_{2,e^{-t^2}},$$

получаем

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \le A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \frac{\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} - A}{\|\bar{H}_n^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}}\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \le$$

$$\le A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \frac{\|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}} - A}{\|\bar{H}_n^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}}\|\bar{H}_n^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}\,\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} =$$

$$= \|\bar{H}_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}\,\|x\|^2_{2,e^{-t^2}}.$$

Обозначим $L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R};n)$ — множество функций $x \in$ $\in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$, для которых

$$a_\nu(x) = 0 \quad \text{при} \quad \nu = k,\dots,n-1.$$

Для $x \in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R};n)$ имеем

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} = \sum_{\nu\geq n} a^2_\nu(x)\|\bar{H}^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} =$$

$$= \sum_{\nu\geq n} a^2_\nu(x)\|\bar{H}^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} \frac{\|\bar{H}^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\|\bar{H}^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}} \leq$$

$$\leq \sup_{\nu\geq n} \frac{\|\bar{H}^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\|\bar{H}^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}} \left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} = \frac{\|\bar{H}^{(k)}_n\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\|\bar{H}^{(r)}_n\|^2_{2,e^{-t^2}}} \left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}.$$

Мы получили неравенство типа Фавара

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq \frac{\|\bar{H}^{(k)}_n\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\|\bar{H}^{(r)}_n\|^2_{2,e^{-t^2}}} \left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}. \tag{5.5.9}$$

Соотношение (5.5.9) показывает, что неравенство (5.5.1) выполняется для функций $x \in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R};n)$ с $A = 0$ и $B = \dfrac{\|\bar{H}^{(k)}_n\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\|\bar{H}^{(r)}_n\|^2_{2,e^{-t^2}}}$.

Пусть $A > 0$. Как и выше, получим

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq \|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \sup_{\nu\geq n} \varphi(A,\nu)\|x^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}.$$

Легко проверить, что $\sup\limits_{\nu\geq n} \varphi(A,\nu) = \varphi(A,n)$, если $0 \leq A \leq \psi(n+1)$, и $\sup\limits_{\nu\geq n} \varphi(A,\nu) = \varphi(A,\nu_0)$, если $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0+1)$, $\nu \geq n+1$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.5.4. *Пусть $k,r,n \in \mathbf{N}$, $k < r < n$. Тогда для любой функции $x \in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbf{R};n)$*

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \varphi(A,n)\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}, \tag{5.5.10}$$

если $0 \le A \le \psi(n+1)$, *и*

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \le A\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \varphi(A,\nu_0)\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}},$$

если $\psi(\nu_0) \le A \le \psi(\nu_0+1),\ \nu \ge n+1$.

Для данного $A \ge 0$ *константы при* $\left\|x^{(r)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}}$ *в этих неравенствах неулучшаемы.*

Отметим, что неравенство (5.5.10) является уточнением неравенства (5.5.9).

Получим теперь для функций $x \in L^r{}_{2,e^{-t^2}}(\mathbf{R},r)$ неравенство типа Харди–Литлвуда–Полиа в мультипликативной форме. Имеем

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} = \sum_{\nu\ge k} a^2_\nu(x)\|\bar H^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} =$$

$$= \sum_{\nu\ge r} a^2_\nu(x)\|\bar H^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}} \frac{\|\bar H^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\|\bar H^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}} =$$

$$= \sum_{\nu\ge r} |a_\nu(x)|^{2\left(1-\frac{k}{r}\right)} |a_\nu(x)|^{2\frac{k}{r}} \|\bar H^{(r)}_\nu\|^{2\frac{k}{r}}_{2,e^{-t^2}} \times$$

$$\times \left\{ \|\bar H^{(r)}_\nu\|^{2\left(1-\frac{k}{r}\right)}_{2,e^{-t^2}} \frac{\|\bar H^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\|\bar H^{(r)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}} \right\} \le$$

$$\le \sup_{\nu\ge r}\left\{ \frac{\|\bar H^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\left\|\bar H^{(r)}_\nu\right\|^{\frac{2k}{r}}_{2,e^{-t^2}}} \right\} \sum_{\nu\ge r} |a_\nu(x)|^{2\left(1-\frac{k}{r}\right)} |a_\nu(x)|^{2\frac{k}{r}} \|\bar H^{(r)}_\nu\|^{2\frac{k}{r}}_{2,e^{-t^2}}.$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \le \sup_{\nu\ge r}\left\{ \frac{\|\bar H^{(k)}_\nu\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\left\|\bar H^{(r)}_\nu\right\|^{\frac{2k}{r}}_{2,e^{-t^2}}} \right\} \left(\sum_{\nu\ge r} |a_\nu(x)|^2\right)^{1-\frac{k}{r}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\nu \geq r} |a_\nu(x)|^2 \|\bar{H}_\nu^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}} \right)^{\frac{k}{r}} =$$

$$= \sup_{\nu \geq r} \left\{ \frac{\|\bar{H}_\nu^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\left\|\bar{H}_\nu^{(r)}\right\|^{\frac{2k}{r}}_{2,e^{-t^2}}} \right\} \|x\|^{2\left(1-\frac{k}{r}\right)}_{2,e^{-t^2}} \left\|x^{(r)}\right\|^{2\frac{k}{r}}_{2,e^{-t^2}}.$$

Найдем

$$\sup_{\nu \geq r} \left\{ \frac{\|\bar{H}_\nu^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\left\|\bar{H}_\nu^{(r)}\right\|^{\frac{2k}{r}}_{2,e^{-t^2}}} \right\} = \sup_{\nu \geq r} \frac{2^k \varphi_k(\nu)}{(2^r \varphi_r(\nu))^{\frac{k}{r}}} = \sup_{\nu \geq r} \frac{\varphi_k(\nu)}{(\varphi_r(\nu))^{\frac{k}{r}}} =$$

$$= \sup_{\nu \geq r} \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1)}{(\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1)(\nu-k)\dots(\nu-r))^{\frac{k}{r}}} =$$

$$= \sup_{\nu \geq r} \frac{(\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1))^{1-\frac{k}{r}}}{((\nu-k)\dots(\nu-r))^{\frac{k}{r}}}.$$

Рассмотрим

$$f(\nu) = \log \frac{(\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1))^{1-\frac{k}{r}}}{((\nu-k)\dots(\nu-r))^{\frac{k}{r}}} =$$

$$= \frac{(r-k)}{r} \sum_{i=0}^{k-1} \log(\nu-i) - \frac{k}{r} \sum_{i=k}^{r-1} \log(\nu-i).$$

Имеем

$$f'(\nu) = \frac{(r-k)}{r} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\nu-i} - \frac{k}{r} \sum_{i=k}^{r-1} \frac{1}{\nu-i}.$$

Так как любое слагаемое в первой сумме не больше любого слагаемого во второй сумме, то $f'(\nu) < 0$, и, следовательно,

$$\sup_{\nu \geq r} \left\{ \frac{\|\bar{H}_\nu^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}}{\left\|\bar{H}_\nu^{(r)}\right\|^{\frac{2k}{r}}_{2,e^{-t^2}}} \right\} = \frac{\varphi_k(r)}{(\varphi_r(r))^{\frac{k}{r}}} = \frac{(r!)^{1-\frac{k}{r}}}{(r-k)!}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.5.5. *Для любой функции* $x \in L^r_{2,e^{-t^2}}(\mathbf{R}, r)$

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{2,e^{-t^2}} \leq \frac{(r!)^{1-\frac{k}{r}}}{(r-k)!} \|x\|^{2\left(1-\frac{k}{r}\right)}_{2,e^{-t^2}} \left\|x^{(r)}\right\|^{2\frac{k}{r}}_{2,e^{-t^2}}.$$

Неравенство точное и обращается в равенство для $x = \bar{H}_r$.

Отметим, что это неравенство является аналогом неравенства (5.3.2).

5.6. Аддитивные неравенства типа Харди–Литлвуда–Полиа на конечном интервале

Будем использовать обозначения из § 5.3.

В настоящем параграфе для класса функций $L^r_{2,r}([-1,1])$ будет исследована следующая задача: для данного $A > 0$ найти точную нижнюю грань таких констант $B > 0$, что неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{I_{2,k}} \leq A \|x\|^2_{I_{2,0}} + B \left\|x^{(r)}\right\|^2_{I_{2,r}} \tag{5.6.1}$$

выполняется для всех функций $x \in L^r_{2,r}([-1,1])$. Обозначим эту нижнюю грань символом $\Phi([-1,1]; r, k; A)$. Будет исследована также аналогичная задача для функций $x \in L^r_{2,r}([-1,1])$ с ограничениями на спектр.

Если $x \in L^r_{2,r}([-1,1])$, то

$$x(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(x) X_\nu(t)$$

и

$$\|x\|^2_{I_{2,0}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c^2_\nu(x).$$

Тогда (см. (5.3.3)) для любого $k \le r$ имеем

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} = \sum_{\nu=k}^{\infty} c^2_\nu(x) \frac{(\nu+k)!}{(\nu-k)!}.$$

Рассмотрим полином $x \in \pi_n$. Тогда

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} \le \max_{k \le \nu \le n} \frac{(\nu+k)!}{(\nu-k)!} \sum_{\nu=k}^{n} c^2_\nu(x) \le \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \|x\|^2_{I_{2,0}} ,$$

и получаем для $x \in \pi_n$ следующее неравенство типа Маркова–Бернштейна:

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} \le \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \|x\|^2_{I_{2,0}}. \tag{5.6.2}$$

Константа $\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}$ в (5.6.2) неулучшаема, так как для $x = X_n$ имеем равенство.

Поскольку $\pi_{r-1} \subset L^r_{2,r}([-1,1])$, то из точности (5.6.2) следует, что не существует константы $B \ge 0$, такой, что неравенство (5.6.1) выполняется для всех функций $x \in L^r_{2,r}([-1,1])$ в случае $A < < (r+k-1)!/(r-k-1)!$. Поэтому пусть

$$A \ge \frac{(r+k-1)!}{(r-k-1)!}. \tag{5.6.3}$$

Тогда для $x \in L^r_{2,r}([-1,1])$ получим

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} = \sum_{\nu=k}^{\infty} c^2_\nu(x) \frac{(\nu+k)!}{(\nu-k)!} =$$

$$= A\sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu^2(x) + \sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu^2(x)\left[\frac{(\nu+k)!}{(\nu-k)!} - A\right].$$

Ввиду (5.6.3) $(\nu+k)!/(\nu-k)! - A \le 0$, если $\nu < r$. Поэтому

$$\|x^{(k)}\|_{I_{2,k}}^2 \le$$

$$\le A\sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu^2(x) + \sum_{\nu=r}^{\infty} c_\nu^2(x)\left[\frac{(\nu+k)!}{(\nu-k)!} - A\right]\frac{(\nu-r)!}{(\nu+r)!}\frac{(\nu+r)!}{(\nu-r)!} \le$$

$$\le A\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2(x) +$$

$$+ \max_{r\le\nu\le\infty}\left\{\frac{(\nu-r)!}{(\nu+r)!}\left[\frac{(\nu+k)!}{(\nu-k)!} - A\right]\right\}\sum_{\nu=r}^{\infty} c_\nu^2(x)\frac{(\nu+r)!}{(\nu-r)!} \le$$

$$\le A\|x\|_{I_{2,0}}^2 + \max_{r\le\nu\le\infty}\left\{\frac{(\nu-r)!}{(\nu+r)!}\left[\frac{(\nu+k)!}{(\nu-k)!} - A\right]\right\}\|x^{(r)}\|_{I_{2,r}}^2.$$

Итак, доказано неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{I_{2,k}}^2 \le A\|x\|_{I_{2,0}}^2 + \max_{r\le\nu\le\infty}\varphi(A,\nu)\|x^{(r)}\|_{I_{2,r}}^2,$$

где

$$\varphi(A,\nu) := \frac{(\nu-r)!}{(\nu+r)!}\left[\frac{(\nu+k)!}{(\nu-k)!} - A\right].$$

Вычислим

$$\max_{r\le\nu\le\infty}\varphi(A,\nu).$$

Для $\nu \ge r+1$ рассмотрим разность

$$\delta_\nu = \varphi(A,\nu) - \varphi(A,\nu-1).$$

Легко проверить, что

$$\delta_\nu = \left(\frac{(\nu-1-r)!}{(\nu-1+r)!} - \frac{(\nu-r)!}{(\nu+r)!}\right)(A - \psi(\nu)),$$

где

$$\psi(\nu) = \frac{(\nu - 1 + k)!\nu(r-k)}{(\nu - 1 - k)!r(\nu - k)},$$

и, следовательно, $\operatorname{sgn} \delta_\nu = \operatorname{sgn}\,(A - \psi(\nu))$. Заметим, что

$$\psi(r) = \frac{(r+k-1)!}{(r-k-1)!}, \quad \psi(\nu) < \psi(\nu+1) \ \text{ для } \ \nu \geq r$$

и $\psi(\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$.

Аналогично теореме 5.5.1 можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.6.1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. *Тогда для любого* $A \geq \dfrac{(r+k-1)!}{(r-k-1)!}$ *и для любой функции* $x \in L^r_{2,r}([-1,1])$ *выполнено неравенство*

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} \leq A\|x\|^2_{I_{2,0}} + \varphi(A,\nu_0)\|x^{(r)}\|^2_{I_{2,r}}, \tag{5.6.4}$$

если A такое, что $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0+1)$. *Для данного A константа* $\varphi(A,\nu_0)$ *в этом неравенстве неулучшаема, т. е.*

$$\Phi([-1,1]; r, k; A) = \varphi(A, \nu_0), \tag{5.6.5}$$

если $\psi(\nu_0) \leq A \leq \psi(\nu_0+1)$. *В этом случае неравенство* (5.6.4) *обращается в равенство для* $x(t) = X_{\nu_0}(t)$.

Отметим, что функция $\Phi([-1,1]; r, k; A)$, определенная равенством (5.6.5), непрерывна на промежутке $[\psi(r), +\infty)$, линейна на каждом интервале $[\psi(\nu), \psi(\nu+1)]$ и

$$\Phi([-1,1]; r, k; \psi(\nu)) = \frac{(\nu+k)!(\nu+1-r)!k}{(\nu+r)!(\nu+1-r)!r}$$

для любого $\nu \geq r$.

Пусть теперь $x \in \pi_n$ и $k < r < n$. Согласно (5.6.2) неравенство (5.6.1) выполняется для любого полинома $x \in \pi_n$ с $B = 0$, если $A \geq (n+k)!/(n-k)!$ Пусть

$$\frac{(r+k-1)!}{(r-k-1)!} \leq A < \frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \tag{5.6.6}$$

Аналогично теореме 5.5.2 может быть доказана следующая теорема.

Теорема 5.6.2. *Пусть $k, r, n \in \mathbf{N}$, $k < r < n$. Тогда для любого A, удовлетворяющего* (5.6.6), *и для любого полинома $x \in \pi_n$ выполнено неравенство*

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} \le A\|x\|^2_{I_{2,0}} + \varphi(A, \nu_0)\|x^{(r)}\|^2_{I_{2,r}}, \tag{5.6.7}$$

если A такое, что $\psi(\nu_0) \le A \le \psi(\nu_0 + 1)$ и $r \le \nu_0 \le n - 1$. Для данного A константа $\varphi(A, \nu_0)$ в (5.6.7) *неулучшаема, так как неравенство обращается в равенство для $x = X_{\nu_0}$.*

Если

$$\psi(n) \le A \le \frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

то для любого полинома $x \in \pi_n$ справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} \le A\|x\|^2_{I_{2,0}} + \varphi(A, n)\|x^{(r)}\|^2_{I_{2,r}} =$$

$$= A\|x\|^2_{I_{2,0}} + \frac{(n-r)!}{(n+r)!}\left[\frac{(n+k)!}{(n-k)!} - A\right]\|x^{(r)}\|^2_{I_{2,r}}. \tag{5.6.8}$$

Для данного A константа $\varphi(A, n)$ в этом неравенстве неулучшаема и неравенство обращается в равенство для $x = X_n$.

Неравенство (5.6.8) является уточнением неравенства (5.6.2).

Рассмотрим теперь множество $L^r_{2,r}([-1, 1]; n)$ функций $x \in$ $\in L^r_{2,r}([-1, 1])$, для которых $c_\nu(x) = 0$ при $\nu \le n$. Для таких функций справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} \le \frac{(n-r)!}{(n+r)!}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\|x^{(r)}\|^2_{I_{2,r}}. \tag{5.6.9}$$

Таким образом, для функций $x \in L^r_{2,r}([-1, 1]; n)$ выполнено неравенство (5.6.1) с $A = 0$ и $B = \dfrac{(n-r)!}{(n+r)!}\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}$. Пусть $A \ge 0$. Можно также доказать следующее утверждение.

Теорема 5.6.3. *Пусть $k, r, n \in \mathbf{N}$, $k < r$. Тогда для любого $A \ge 0$ и для любой функции $x \in L^r_{2,r}([-1, 1]; n)$ справедливо неравенство*

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} \le A\|x\|^2_{I_{2,0}} + \varphi(A, \nu_0)\|x^{(r)}\|^2_{I_{2,r}}, \tag{5.6.10}$$

если A такое, что $\psi(\nu_0) \le A \le \psi(\nu_0+1)$ и $\nu_0 \ge n+1$. Для данного A константа $\varphi(A,\nu_0)$ в (5.6.10) *неулучшаема и* (5.6.10) *обращается в равенство для $x = X_{\nu_0}$.*

Если $0 \le A \le \psi(n+1)$, то для любой функции $x \in$ $\in L^r_{2,r}([-1,1];n)$ выполнено неравенство

$$\|x^{(k)}\|^2_{I_{2,k}} \le A\|x\|^2_{I_{2,0}} + \varphi(A,n)\|x^{(r)}\|^2_{I_{2,r}}. \tag{5.6.11}$$

Для данного A константа $\varphi(A,n)$ в этом неравенстве неулучшаема и неравенство обращается в равенство для $x = X_{n+1}$.

Неравенство (5.6.11) уточняет неравенство (5.6.9).

5.7. Неравенство Тайкова

Пусть $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $k < r$. Нам потребуются следующие интегралы, которые заменой переменной $t^{2r} = u$ сводятся к B-функции и вычисляются с помощью формул приведения и дополнения:

$$a := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u^k}{1+u^{2r}} \right)^2 du \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{r-k-1/2}{2r^2 \sin \pi \dfrac{2k+1}{2r}} \right\}^{1/2},$$

$$b := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u^{k+r}}{1+u^{2r}} \right)^2 du \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{k+1/2}{2r^2 \sin \pi \dfrac{2k+1}{2r}} \right\}^{1/2}.$$

Теорема 5.7.1. *Для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R})$ и для любых целых чисел k и r, $0 \le k \le r-1$, справедливо неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \left\{ \frac{1}{2\sin \pi \dfrac{2k+1}{2r}} \left(\frac{1}{r-k-1/2} \right)^{(r-k-1/2)/r} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{(k+1/2)} \right)^{(k+1/2)/r)} \right\}^{1/2} \|x\|^{(r-k-1/2)/r}_{L_2} \|x^{(r)}\|^{(k+1/2)/r}_{L_2}, \tag{5.7.1}$$

где знак равенства достигается на функциях

$$x(t) = \delta X_\mu(t), \quad \mu \neq 0,$$

$$X_\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u^k}{1+(\mu u)^{2r}} e^{itu} du.$$

Доказательство. Пусть $\hat{x}(u)$ — преобразование Фурье функции $x \in L_2(\mathbf{R})$. На основании теоремы Планшереля $\|x\|_{L_2} = \|\hat{x}\|_{L_2}$ и в смысле сходимости в L_2 справедливо равенство

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(u) e^{itu} du.$$

Пусть $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R})$. Так как $x^{(r-1)}$ — локально абсолютно непрерывная функция и $x^{(r)} \in L_2(\mathbf{R})$, то, как известно,

$$x^{(k)}(t) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(u) e^{itu} du,$$

причем функции $u^k \hat{x}(u)$, $u^r \hat{x}(u)$ принадлежат $L_2(\mathbf{R})$. Для заданного $N = ah^{-k-1/2}$, $h > 0$, рассмотрим оператор

$$\Delta(x,t) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u^k}{1+(hu)^{2r}} \hat{x}(u) e^{itu} du : \ L_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}.$$

Покажем, что $\|\Delta\| = N$. В самом деле, согласно неравенству Коши–Буняковского и теореме Планшереля

$$\|\Delta(x,t)\|_C \leq ah^{-k-1/2} \|\hat{x}\|_{L_2} = N \|x\|_{L_2}. \tag{5.7.2}$$

Если $\|x^{(r)}\|_{L_2} = \|t^{(r)}\hat{x}(t)\|_{L_2} \le 1$, то, снова применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\|x^{(k)} - \Delta(x)\|_C \le \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{t^k - \dfrac{t^k}{1+(ht)^{2r}}}{t^r} \right]^2 dt \right\}^{1/2} = bh^{r-k-1/2}. \tag{5.7.3}$$

Используя (5.7.2) и (5.7.3), доказываем теперь неравенство (5.7.1). Имеем

$$\|x^{(k)}\|_C \le \|x^{(k)} - \Delta(x)\|_C + \|\Delta(x)\|_C \le$$
$$\le bh^{r-k-1/2}\|x^{(r)}\|_{L_2} + ah^{-k-1/2}\|x\|_{L_2}. \tag{5.7.4}$$

Минимизируя величину (5.7.4) по $h > 0$, получаем

$$\|x^{(k)}\|_C \le \left(\frac{ar}{r-k-1/2}\right)^{(r-k-1/2)r} \left(\frac{br}{k+1/2}\right)^{(k+1/2)r} \times$$
$$\times \|x\|_{L_2}^{(r-k-1/2)/r} \left\|x^{(r)}\right\|_{L_2}^{(k+1/2)/r}.$$

Подставляя сюда численные значения a и b, получаем (5.7.1). Его точность проверяется непосредственно.

5.8. Аналог неравенства Тайкова для периодических функций

Для $r \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{Z}_+,\ k < r$, положим

$$\beta_{r,k} := \left(\frac{2r}{2k+1}\right)^{(2k+1)/(4r)} \left(\frac{2r}{2r-2k-1}\right)^{(2r-2k-1)/(4r)},$$

$$A_{r,k}(t) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}n^{2k}}{1+t^{2r}n^{2r}} \right\}^{1/2}, \quad A_{r,k} = \sup_{t>0} A_{r,k}(t).$$

Теорема 5.8.1. *Пусть* $x \in L_2^r(\mathbf{T})$, $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $0 \le k \le r-1$, *и, если* $k = 0$, *то* $\int\limits_0^{2\pi} x(t)dt = 0$. *Тогда верно точное неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \gamma_{r,k} \|x\|_2^{\frac{r-k-1/2}{r}} \left\|x^{(r)}\right\|_2^{\frac{k+1/2}{r}}, \tag{5.8.1}$$

где

$$\gamma_{r,k} = \pi^{-1/2} \beta_{r,k} A_{r,k}, \tag{5.8.2}$$

$$\pi^{-1/2} \le \gamma_{r,k} \le 1. \tag{5.8.3}$$

Замечание. Соотношение (5.8.1) аналогично неравенству (5.7.1) для функций, заданных на прямой, с той лишь разницей, что в случае прямой в выражении (5.8.2) для точной константы $\gamma_{r,k}$ вместо интегральной суммы $A_{r,k}$ стоит интеграл

$$\left\{\int\limits_0^\infty \frac{t^{2k}}{1+t^{2r}} dt\right\}^{1/2} = \lim_{t\to 0} A_{r,k}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(r \sin \frac{2k+1}{2r}\right)^{-1/2}.$$

Пусть далее $x(t) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n \cos(nt + b_n)$. Тогда

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \sum_{n=1}^\infty n^k |a_n|,$$

$$\|x\|_2^2 = \pi \sum_{n=0}^\infty a_n^2, \quad \|x^{(r)}\|_2^2 = \pi \sum_{n=1}^\infty n^{2r} a_n^2,$$

и оценка (5.8.1) будет следовать из неравенства

$$\sum_{n=1}^\infty n^k a_n \le \pi^{1/2} \gamma_{r,k} \left\{\sum_{n=1}^\infty a_n^2\right\}^{\frac{r-k-1/2}{2r}} \left\{\sum_{n=1}^\infty n^{2r} a_n^2\right\}^{\frac{k+1/2}{2r}}. \tag{5.8.4}$$

При $k = 0,\ r = 1$ и $\gamma_{1,0} = 1$ это — известное неравенство Карлсона (см. [327, с. 367]).

Доказательство. Для произвольного $t > 0$ с помощью неравенства Коши–Буняковского выводим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \{t^{-(2k+1)} + t^{2r-(2k+1)} n^{2r}\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{n^{2k}}{t^{-(2k+1)} + t^{2r-(2k+1)} n^{2r}} \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \Big(t^{-(2k+1)} + t^{2r-(2k+1)} n^{2r} \Big) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1} n^{2k}}{1 + t^{2r} n^{2r}} \right\}^{1/2} =$$

$$= \pi^{-1/2} \Big\{ t^{-(2k+1)} \|x\|_2^2 + t^{2r-(2k+1)} \|x^{(r)}\|_2^2 \Big\}^{1/2} A_{r,k}(t). \quad (5.8.5)$$

При $\tau = \tau^* = \left\{ \dfrac{2k+1}{2r-(2k+1)} \right\}^{1/2r}$ функция $\beta(\tau) = \tau^{-(2k+1)} + \tau^{2r-(2k+1)}$ принимает минимальное значение, равное $\beta_{r,k}^2$. Положим в (5.8.5)

$$t = t^* := \tau^* \left\{ \frac{\|x\|_2}{\|x^{(r)}\|_2} \right\}^{1/r}. \quad (5.8.6)$$

Тогда получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n \leq \pi^{-1/2} \beta_{r,k} A_{r,k}(t^*) \|x\|_2^{\frac{r-(k-1/2)}{r}} \|x^{(r)}\|_2^{\frac{k+1/2}{r}}, \quad (5.8.7)$$

и тем самым (5.8.4), а значит, и (5.8.1) установлены.

Покажем, что оценка (5.8.1) точна. Для $t > 0$ возьмем

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{1 + t^{2r} n^{2r}} \cos\left(nt + \frac{\pi k}{2} \right). \quad (5.8.8)$$

Тогда из тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k} n^{2r}}{(1+t^{2r}n^{2r})^2} = t^{-2r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n^{2k}}{1+t^{2r}n^{2r}} - \frac{n^{2k}}{(1+t^{2r}n^{2r})^2} \right\}$$

следует

$$\pi^{-1}\|x^{(r)}\|_2^2 = t^{-2r}\Big\{\|x^{(k)}\|_\infty - \pi^{-1}\|x\|_2^2\Big\},$$

или

$$\pi\|x^{(k)}\|_\infty = t^{2r}\|x^{(r)}\|_2^2 + \|x\|_2^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{\pi\|x^{(k)}\|_\infty}{\|x\|_2^{2-\frac{2k+1}{r}}\|x^{(r)}\|_2^{\frac{2k+1}{r}}} = t^{2r}\left\{\frac{\|x^{(r)}\|_2}{\|x\|_2}\right\}^{2-\frac{2k+1}{r}} + \left\{\frac{\|x\|_2}{\|x^{(r)}\|_2}\right\}^{\frac{2k+1}{r}} =$$

$$= t^{2k+1}\Big\{\tau^{2r-(2k+1)} + \tau^{-(2k+1)}\Big\} \geq t^{2k+1}\beta_{r,k}^2,$$

где $\tau = t\left\{\|x^{(r)}\|_2\|x\|_2^{-1}\right\}^{1/r}$. Если умножить левую и правую части этого неравенства на $\|x^{(k)}\|_\infty$, то с учетом (5.8.8) получим

$$\frac{\|x^{(k)}\|_\infty^2}{\|x\|_2^{2-\frac{2k+1}{r}}\|x^{(r)}\|_2^{\frac{2k+1}{r}}} \geq$$

$$\geq \pi^{-1}\beta_{r,k}^2 t^{2k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k}}{1+t^{2r}n^{2r}} = \pi^{-1}\beta_{r,k}^2 A_{r,k}^2(t).$$

Остается в (5.8.8) задать t так, чтобы $A_{r,k}(t) \to A_{r,k}$, и точность оценки (5.8.1) доказана.

Верхняя граница $\gamma_{r,k}$ в (5.8.3) вычисляется с помощью неравенства Карлсона, которое можно записать в виде

$$\|x^{(k)}\|_\infty \leq \|x^{(k)}\|_2^{1/2}\|x^{(k+1)}\|_2^{1/2}.$$

При этом надо применить к каждому множителю в правой части неравенство Харди–Литлвуда–Полиа:

$$\|x^{(l)}\|_2 \le \|x\|_2^{1-l/r}\|x^{(r)}\|_2^{l/r}.$$

Оценка $\gamma_{r,k} \ge \pi^{-1/2}$ получается, если взять $x(t) = \sin t$. Теорема доказана.

5.9. Оценка $\|x^{(k)}\|_2$ через $\|x\|_p$ и $\|x^{(2k)}\|_{p'}$ на оси и окружности

В гл. 1 было установлено (см. (1.5.14)), что для функций $x \in L^2_{p,p'}(\mathbf{R})$ выполняется неравенство

$$\left\|x'\right\|_2 \le \|x\|_p^{1/2}\left\|x''\right\|_{p'}^{1/2}. \tag{5.9.1}$$

Следующая теорема содержит обобщение неравенства (5.9.1).

Теорема 5.9.1. *Пусть $k \in \mathbf{N},\ 1 < p < \infty,\ 1/p + 1/p' = 1$. Для функций $x \in L^{2k}_{p,p'}(\mathbf{R})$ справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le \|x\|_p^{1/2}\left\|x^{(2k)}\right\|_{p'}^{1/2}. \tag{5.9.2}$$

Справедливость неравенства (5.9.2) устанавливается так же, как и неравенств (1.5.8) и (1.5.10) (интегрированием по частям и последующим применением неравенства Гельдера):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x^{(k)}(t)\right)^2 dt = (-1)^k\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)x^{(2k)}(t)dt \le$$

$$\le \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x^{(2k)}(t)|^{p'}dt\right)^{1/p'}, \tag{5.9.3}$$

причем условие равенства имеет вид

$$x^{(2k)}(t) = \lambda|x(t)|^{p-1}\mathrm{sgn}x(t) \tag{5.9.4}$$

при некоторой постоянной λ.

Доказательство теоремы было бы закончено, если бы мы указали ненулевую функцию $x \in L^{2k}_{p,p'}(\mathbf{R})$, удовлетворяющую уравнению (5.9.4). Однако такой путь, вообще говоря, невозможен, поскольку в $L^{2k}_{p,p'}(\mathbf{R})$ может и не быть таких функций. Следующая лемма показывает, что достаточно указать периодическую функцию, удовлетворяющую условию (5.9.4).

Лемма 5.9.1. *Если существует ненулевая периодическая* $2k$ *раз дифференцируемая функция* $x_0(t)$, *удовлетворяющая условию* (5.9.4), *то неравенство* (5.9.2) *неулучшаемо.*

Доказательство. Пусть T — период функции $x_0(t)$. Образуем последовательность функций по следующему правилу:

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0(t), & \text{если } -nT \le t \le nT, \\ y_1(t+nT), & \text{если } t < -nT, \\ y_2(t-nT), & \text{если } t > nT, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где y_1 и y_2 — финитные функции, определенные при $t < 0$ и $t > 0$ соответственно и при образовании x_n сглаживающие x_0 к нулю слева и справа. На любом отрезке, кратном периоду, x_0 удовлетворяет равенству

$$\left\| x_0^{(k)} \right\|_2 = \|x_0\|_p^{1/2} \left\| x_0^{(2k)} \right\|_{p'}^{1/2}.$$

Действительно, интегрирование по частям, аналогичное (5.9.3), не дает на рассматриваемом отрезке внеинтегральных членов, а условие (5.9.4) обеспечивает равенство в неравенстве Гельдера. Отсюда следует, что

$$\left\| x_n^{(k)} \right\|_2 \|x_n\|_p^{-1/2} \left\| x_n^{(2k)} \right\|_{p'}^{-1/2} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для доказательства существования функции, удовлетворяющей условиям леммы 5.9.1, исследуем следующую экстремальную задачу.

Задача. *Минимизировать функционал*

$$J(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt \tag{5.9.5}$$

при условиях

$$I_1(x) = \int_0^1 |x^{(k)}(t)|^2 dt \leq 1, \tag{5.9.6}$$

$$I_2(x) = \int_0^1 |x(t)|^{p-1} \mathrm{sgn} x(t) dt = 0 \tag{5.9.7}$$

на пространстве L_2^k периодических (с периодом 1) k раз дифференцируемых функций $x(t)$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные более низких порядков и удовлетворяют условию $x(0) = 0$.

Отметим, что L_2^k является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^1 x^{(k)}(t) y^{(k)}(t) dt.$$

Лемма 5.9.2. *В рассматриваемой задаче существует экстремальная функция.*

Доказательство леммы 5.9.2 опирается на следующую лемму.

Лемма 5.9.3. *На любом подмножестве функций из L_2^k, ограниченном по норме ($\|x\| = \sqrt{(x, x)}$) общей константой, топологии, индуцированные слабой и равномерной топологиями пространства, эквивалентны.*

Доказательство. 1. Из равномерной сходимости следует слабая сходимость к тому же элементу.

Пусть последовательность x_n равномерно сходится к нулю. Достаточно установить, что $(x_n, z) \to 0$ для всех элементов z некоторого множества U, плотного в L_2^k (в сильной топологии). Одним из таких множеств является совокупность периодически продолженных

бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителем на $[0,1]$. Для каждого $z \in U$ справедливо равенство

$$(x_n, z) = \int\limits_0^1 x_n^{(k)}(t) z^{(k)}(t) dt = (-1)^k \int\limits_0^1 x_n(t) z^{(2k)}(t) dt,$$

откуда $(x_n, z) \to 0$, если x_n — равномерно сходящаяся к нулю последовательность, что и требовалось доказать.

2. Множество функций, ограниченных по норме общей константой, компактно в равномерной топологии.

Пусть $\|x\| \le M$. Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_0^1 |x^{(k)}(t)| dt \le \|x\| \le M.$$

Из периодичности и гладкости рассматриваемых функций x следует, что сама функция и все ее производные $x^{(i)}$ до $(k-1)$-го порядка имеют на отрезке $[0,1]$ хотя бы один нуль t_i. Интегрируя, получаем

$$|x^{(k-1)}(t)| = \left| \int\limits_{t_{k-1}}^{t} x^{(k)}(u) du \right| \le \int\limits_0^1 |x^{(k)}(u)| du \le M.$$

Аналогичные оценки показывают, что $|x^{(i)}(t)| \le M$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, откуда по теореме Арцела следует компактность в равномерной топологии.

3. Из слабой сходимости следует равномерная сходимость.

Пусть последовательность y_n сходится к нулю слабо, но не равномерно, т. е. из нее можно выделить подпоследовательность y_{n_k}, такую, что при некотором $\varepsilon > 0$ для каждой функции y_{n_k} найдется точка t_k, в которой $|y_{n_k}(t_k)| > \varepsilon$.

Используя компактность и переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что y_{n_k} сходится равномерно. Но из п. 1 следует, что ее пределом является нуль, и, таким образом, получаем противоречие со способом выбора y_{n_k}.

Доказательство леммы 5.9.2. Условие (5.9.6) выделяет в L_2^k слабый компакт — замкнутый единичный шар гильбертова пространства. Функционалы J и I_2, очевидно, непрерывны в равномерной, а по лемме 5.9.4 и в слабой топологии. Отсюда следует, что подмножество, выделяемое условием (5.9.7) в единичном шаре, слабо замкнуто и экстремум рассматриваемой задачи существует по теореме о непрерывной функции на компакте.

Лемма 5.9.4. *Экстремальная функция $x_0(t)$ рассматриваемой задачи имеет производную порядка $2k$ и удовлетворяет условию*

$$x_0^{(2k)}(t) = \lambda |x_0(t)|^{p-1} \mathrm{sgn} x_0(t).$$

Доказательство. Определенные выше функционалы J, I_1, I_2, как показывает непосредственная проверка, дифференцируемы по Фреше в пространстве L_2^k; их производные в точке x_0 имеют вид (с точностью до положительной мультипликативной константы)

$$\delta J(x_0, h) = \int\limits_0^1 |x_0(t)|^{p-1} \mathrm{sgn} x_0(t) h(t) dt,$$

$$\delta I_1(x_0, h) = \int\limits_0^1 |x_0^{(k)}(t)| h^{(k)}(t) dt,$$

$$\delta I_2(x_0, h) = \int\limits_0^1 |x_0(t)|^{p-2} h(t) dt,$$

где $h(t)$ — приращение (напомним, что $h \in L_2^k$).

Линейная независимость функционалов $\delta I_1(x_0, h), \delta I_2(x_0, h)$ позволяет применить для отыскания экстремальной точки x_0 метод множителей Лагранжа. Необходимое условие экстремума имеет вид

$$L(h) = \int\limits_0^1 \Big[\Big(|x_0(t)|^{p-1} \mathrm{sgn} x_0(t) + \mu_1 |x_0(t)|^{p-2} \Big) h(t) +$$

$$+\mu_2 \left| x_0^{(k)}(t) \right| h^{(k)}(t) \Big] \, dt = 0$$

для любой функции $h(t)$ при некоторых постоянных $\mu_1,\ \mu_2$.

Рассматривая функции $h(t)$, все производные которых до порядка $k-1$ равны нулю при $t=0$ (и $t=1$, и преобразуя $L(h)$ многократным интегрированием по частям, получаем

$$L(h) = \int\limits_0^1 \left[(-1)^k \int\limits_0^t d\tau_k \int\limits_0^{\tau_k} \cdots \int\limits_0^{\tau_2} z_0(\tau_1) d\tau_1 + \mu_2 x_0^{(k)}(t) \right] h^{(k)}(t) dt,$$

где

$$z_0(t) = |x_0(t)|^{p-1} \mathrm{sgn} x_0(t) + \mu_1 |x_0(t)|^{p-2}.$$

Ввиду произвольности h из условия $L(h)=0$ следует, что

$$(-1)^k \int\limits_0^t d\tau_k \int\limits_0^{\tau_k} \cdots \int\limits_0^{\tau_2} z_0(\tau_1) d\tau_1 + \mu_2 x_0^{(k)}(t) = P_{k-1}(t),$$

где $P_{k-1}(t)$ — полином степени не выше $k-1$. Последнее равенство позволяет заключить, что производная $x_0^{(k)}(t)$ дифференцируема k раз (или $\mu_2 = 0$), и

$$(-1)^k \left[\mu_2 x_0^{(k)}(t) \right]^{(k)} + \mu_1 |x_0(t)|^{p-2} + |x_0(t)|^{p-1} \mathrm{sgn} x_0(t) = 0. \tag{5.9.8}$$

Интегрируя (5.9.8) с учетом периодичности и условия (5.9.7), получим $\mu_1 = 0$. Кроме того, $\mu_2 \neq 0$, иначе $x_0 \equiv 0$, что, очевидно, не реализует максимума в рассматриваемой задаче. Следовательно, существует $x_0^{(2k)}(t)$, причем

$$(-1)^k x_0^{(2k)}(t) = -\frac{1}{\mu_2} |x_0(t)|^{p-1} \mathrm{sgn} x_0(t).$$

Таким образом, экстремальная функция $x_0(t)$ удовлетворяет условию леммы 5.9.1, и теорема 5.9.1 доказана.

5.10. Неравенство Габушина на полуоси

Докажем аналог точного неравенства Тайкова (см. (5.7.1)) для функций, заданных на полуоси.

Сначала изложим вспомогательный материал, необходимый для построения экстремальных функций.

Пусть $k, r \in \mathbf{N},\ 0 \le k < r$,

$$\phi_n = (r+1)\pi/2r + n\pi/r, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1;$$

$$\lambda_n = \exp(i\phi_n).$$

Выберем коэффициенты $c_n = c_n(k, r)$ так, чтобы они удовлетворяли системе линейных уравнений

$$\sum_{n=0}^{r-1} c_n(-\lambda_n)^{-m-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = k, \\ 0, & \text{если } m \ne k,\ m = 0, 1, \ldots, r-1. \end{cases} \tag{5.10.1}$$

Положим

$$A_k = \left\{ -\sum_{m=0}^{r-1} \sum_{n=0}^{r-1} c_m c_n / (\lambda_m + \lambda_n) \right\}^{1/2}, \tag{5.10.2}$$

$$B_k = \left\{ \sum_{m=0}^{r-1} \sum_{n=0}^{r-1} (-1)^{r+m+n} c_m c_n / (\lambda_m + \lambda_n) \right\}^{1/2}, \tag{5.10.3}$$

и для $N > 0$

$$a := (N/A_k)^{1+1/(2k+1)}, \quad b := (N/A_k)^{2/(2k+1)}. \tag{5.10.4}$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты c_n выбраны так, чтобы при $0 \le m \le r-1$ было

$$\int_0^\infty a y_k(bt) t^m dt = \int_0^\infty a b^{m-1} y_k(t) t^m dt =$$

$$= \int_0^\infty y_k(t)t^m dt = \sum_{n=0}^{r-1} c_n \int_0^\infty e^{\lambda_n t} t^m dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{r-1} c_n (-\lambda)^{-m-1} m! = \begin{cases} k!, & \text{если } m = k, \\ 0, & \text{если } m \neq k, \end{cases} \tag{5.10.5}$$

где функция $y_k(t)$ определена равенством

$$y_k(t) = \sum_{n=0}^{r-1} c_n \exp(\lambda_n t), \quad t \geq 0.$$

При этом

$$\|y_k\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = A_k, \quad \|y_k^{(r)}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = B_k. \tag{5.10.6}$$

Лемма 5.10.1. *Функция y_k — действительнозначная.*

Доказательство. Поскольку $\pi - \phi_n = \phi_{r-1-n} - \pi$, то

$$\lambda_n^{-1} = \overline{\lambda}_n = \lambda_{r-1-n}, \qquad \overline{\exp(\lambda_n t)} = \exp(\lambda_{r-1-n} t). \tag{5.10.7}$$

Таким образом, чтобы установить , что y — действительнозначная функция, достаточно показать, что $\overline{c_n} = c_{r-1-n}$. По правилу Крамера, $c_n = \Delta_n/\Delta$, где Δ — определитель системы (5.10.5), а Δ_n получается из Δ заменой n-го столбца на столбец из свободных членов. По свойствам комплексных чисел для произвольного определителя $D = \|a_{m,n}\|$, $m,n = 0, 1, \ldots, r-1$, имеем $\bar{D} = \|\overline{a}_{m,n}\|$, где $\bar{D}$ и $\bar{a}_{m,n}$ — комплексно сопряженные к D и $a_{m,n}$ соответственно. Из (5.10.7) следует, что

$$\overline{\Delta} = (-1)^{r(r+1)/2}\Delta, \quad \overline{\Delta_n} = (-1)^{r(r+1)/2}\Delta_{r-1-n}, \quad \overline{c_n} = c_{r-1-n}$$

и, следовательно, y_k — действительнозначная функция. Лемма доказана.

Положим

$$y_{a,b}(t) := a y_k(bt), \tag{5.10.8}$$

где a и b определены в (5.10.4). Согласно выбору чисел a и b

$$\|y_{a,b}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = N. \tag{5.10.9}$$

Заметим, что для функции $e^{\lambda t}$ с $\mathrm{Re}\lambda < 0$ справедливо соотношение

$$\int\limits_u^\infty e^{\lambda t}(t-u)^m dt = m!(-\lambda)^{-m-1}e^{\lambda u}, \;\; u > 0,$$

в частности,

$$\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}t^m dt = m!(-\lambda)^{-m-1}.$$

Отсюда следует, что функция y_k является решением уравнения

$$(r-1)!x^{(r)}(u) = \int\limits_u^\infty x(t)(t-u)^{r-1}dt,$$

а функция $y_{a,b}$ — решением уравнения

$$(r-1)!x^{(r)}(u) = -b^{-2r}\int\limits_u^\infty x(t)(t-u)^{r-1}dt. \tag{5.10.10}$$

Теорема 5.10.1. *При* $0 \le k < r$ *для функций* x *класса* $L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$ *выполняется неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbf{R}_+)} \le K\|x\|^\alpha_{L_2(\mathbf{R}_+)}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_2(\mathbf{R}_+)}, \tag{5.10.11}$$

где

$$\alpha = 1 - (2k+1)/2r,$$

точная константа K *имеет вид*

$$K = (A_k^2 + B_k^2)A_k^{-\alpha}B_k^{-1+\alpha}$$

и числа A_k *и* B_k *определяются формулами* (5.10.2) *и* (5.10.3).

Доказательство. Фиксируем $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$. Очевидно, можно считать, что $\|x^{(k)}\|_\infty = x^{(k)}(0)$. Рассмотрим оператор

$$\mathrm{V}_0 x(t) := \int\limits_0^\infty y_{a,b}(u)x(t+u)du.$$

Для $x^{(k)}(0)$ имеем оценку

$$|x^{(k)}(0)| \le |x^{(k)}(0) - \mathrm{V}_0 x(0)| + |\mathrm{V}_0 x(0)|. \tag{5.10.12}$$

Оценим каждое слагаемое в (5.10.12). Для $|\mathrm{V}_0 x(0)|$ имеем с учетом (5.10.9)

$$|\mathrm{V}_0 x(0)| \le \|y_{a,b}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}\|x\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = N\|x\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}. \tag{5.10.13}$$

Чтобы оценить $|x^{(k)}(0) - \mathrm{V}_0 x(0)|$, представим x по формуле Тейлора в виде $x(t) = Q(t) + R(t)$, где

$$Q(t) := \sum_{m=0}^{r-1} \frac{1}{m!} x^{(m)}(0)t^m, \quad R(t) := \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^t x^{(r)}(u)(t-u)^{r-1}du. \tag{5.10.14}$$

Тогда с помощью (5.10.5) получим

$$x^{(k)}(0) - \mathrm{V}_0 x(0) = -\int\limits_0^\infty y_{a,b}(t)(x(t) - Q(t))dt = \int\limits_0^\infty y_{a,b}(t)R(t)dt.$$

Отсюда, учитывая (5.10.14) и пользуясь теоремой Фубини, получаем

$$|x^{(k)}(0) - \mathrm{V}_0 x(0)| = \left|\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^\infty y_{a,b}(t)\int\limits_0^t x^{(r)}(u)(t-u)^{r-1}dudt\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^\infty x^{(r)}(u)\int\limits_u^\infty y_{a,b}(t)(t-u)^{r-1}dtdu\right| \le$$

$$\leq \|\Psi\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}\|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}, \tag{5.10.15}$$

где

$$\Psi(u) := \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_u^\infty y_{a,b}(t)(t-u)^{r-1}dt.$$

Из (5.10.12), (5.10.13) и (5.10.15) получаем оценку для $x^{(k)}(0)$:

$$|x^{(k)}(0)| \leq N\|x\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \|\Psi\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}\|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}. \tag{5.10.16}$$

Покажем, что для $x = y_{a,b}$ (5.10.16) обращается в равенство. Поскольку $y_{a,b}$ удовлетворяет уравнению (5.10.10), то для $x = y_{a,b}$ неравенство (5.10.15) обращается в равенство, т. е.

$$y_{a,b}^{(k)}(0) - \mathrm{V}_0 y_{a,b}(0) = \|\Psi\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}\|y_{a,b}^{(r)}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}. \tag{5.10.17}$$

Отсюда с учетом определения V_0 и равенства (5.10.9) имеем

$$y_{a,b}^{(k)}(0) = N\|y_{a,b}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \|\Psi\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}\|y_{a,b}^{(r)}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}, \tag{5.10.18}$$

т. е. $y_{a,b}$ обращает (5.10.16) в равенство.

Докажем, наконец, неравенство (5.10.11). По-прежнему можем считать, что $\|x\|_C = x^{(k)}(0)$. Заметим, что для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$

$$\|ax^{(j)}(b\,\cdot)\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = ab^{j-1/2}\|x^{(j)}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}. \tag{5.10.19}$$

Отсюда следует, что если $x_0(t)$ является экстремальной в (5.10.11), т. е.

$$K = \|x_0^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbf{R}_+)}\|x_0\|^{-\alpha}_{L_2(\mathbf{R}_+)}\|x_0^{(r)}\|^{-1+\alpha}_{L_2(\mathbf{R}_+)},$$

то функция $ax_0(bt)$ также является экстремальной. Из этого замечания и по определению точной константы следует, что x_0 является экстремальной тогда и только тогда, когда

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbf{R}_+)} = \sup_{x\in M}\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbf{R}_+)}, \tag{5.10.20}$$

где M — класс функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, для которых

$$\|x\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = \|x_0\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}, \quad \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = \|x_0^{(r)}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}.$$

Из формул (5.10.16) и (5.10.18) следует, что для функции $y_{a,b}$ осуществляется равенство (5.10.20) и поэтому $y_{a,b}$ является экстремальной функцией. Из определения Ψ и того факта, что $y_{a,b}$ удовлетворяет уравнению (5.10.10), следует равенство

$$\Psi(t) = y_{a,b}(t)/b^{2r}.$$

С помощью этого равенства и соотношений (5.10.8), (5.10.6), (5.10.19) и (5.10.4) получим

$$\|\Psi\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = \|y^{(r)}_{a,b}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}/b^{2r} =$$

$$= ab^{-r-1/2}\|y_k\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = B_k(N/A_k)^{2[(r-k)+1]/(2k+1)}.$$

Выбирая $N = A_k$, отсюда и из соотношения (5.10.17) имеем

$$y^{(k)}_{a,b}(0) = A_k^2 + B_k^2.$$

Но тогда с помощью соотношений (5.10.6), (5.10.8) и (5.10.19) получаем

$$K = (A_k^2 + B_k^2)A_k^{-\alpha}B_k^{-1+\alpha}.$$

Теорема доказана.

5.11. Асимптотика для точных констант в неравенстве Габушина

В предыдущем параграфе дан метод нахождения наилучшей константы Q_{rk} в неравенстве типа Колмогорова на полуоси

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R}_+)} \le Q_{r,k}\,\|x\|^{1-\frac{2k+1}{2r}}_{L_2(\mathbf{R}_+)}\left\|x^{(r)}\right\|^{\frac{2k+1}{2r}}_{L_2(\mathbf{R}_+)} \tag{5.11.1}$$

для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$.

Однако при нахождении констант этим методом представляется затруднительным получение каких-либо сведений о поведении величин Q_{rk} в зависимости от r и k.

В настоящем параграфе предложен другой способ, принадлежащий Н.П. Купцову, построения Q_{rk} (теорема 5.11.1), который позволяет довольно просто доказать свойство $Q_{rk} = Q_{r,r-k-1}$ (теорема 5.11.2) и установить асимптотику Q_{rk} при фиксированном k и $r \to \infty$ (теорема 5.11.3), а при малых значениях k и r — дать явные выражения для Q_{rk}.

В аддитивной формулировке задача о точной константе в (5.11.1) сводится к отысканию наилучшей константы в неравенстве

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{L_\infty(\mathbf{R}_+)} \le \mu_{rk}\left\{\|x\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \left\|x^{(r)}\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)}\right\}, \qquad (5.11.2)$$

причем величины Q_{rk} и μ_{rk} связаны соотношением

$$Q^2_{rk} = \mu_{rk}\left\{\left(\frac{2r-2k-1}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2r}} + \left(\frac{2k+1}{2r-2k-1}\right)^{1-\frac{2k+1}{2r}}\right\}.$$

Учитывая это равенство, теоремы 5.11.1, 5.11.2 и 5.11.3, которые приведены ниже, будем формулировать только для μ_{rk}.

Вычисление μ_{rk} можно свести к такой вариационной задаче: найти

$$\frac{1}{\mu_{rk}} = \inf\left[\|x\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \|x^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)}\right]$$

при условиях $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$ и $x^{(k)}(0) = 1$. Соответствующее уравнение Эйлера и условия трансверсальности имеют вид

$$(-1)^r x^{(2r)} + x = 0, \qquad (5.11.3)$$

$$x^{(r)}(0) = ... = x^{(2r-k-2)}(0) = x^{(2r-k)}(0) = ... = x^{(2r-1)}(0) = 0. \qquad (5.11.4)$$

Корнями характеристического уравнения для (5.11.3) являются числа $z_\nu = ie^{i\pi(\nu-1/2)r}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2r)$. Построим многочлен $p_r(z)$,

корнями которого будут те z_ν, которые расположены в левой полуплоскости:

$$p_r(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_r) = \omega_0 + \omega_1 z + \dots + \omega_r z^r.$$

В дальнейшем для удобства записи будем полагать $\omega_\nu = 0$ при $\nu = -1, -2, \dots$ и $\nu = r+1, r+2, \dots$ Очевидно, что $\omega_0 = \omega_r = 1$, $\omega_j = \omega_{r-j}$, и для $p_r(z)$ верно равенство

$$p_r(z)p_r(-z) = (-1)^r z^{2r} + 1. \tag{5.11.5}$$

Последовательным интегрированием по частям можно для любой пары функций $x, y \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$ получить равенство

$$\int\limits_0^\infty \left[y(t)x(t) + y^{(r)}(t)x^{(r)}(t) \right] dt =$$

$$= -y^{(r-1)}(0)x^{(r)}(0) + y^{(r-2)}(0)x^{(r+1)}(0) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{r-k} y^{(k)}(0)x^{(2r-k-1)}(0) + \dots + (-1)^r y(0)x^{(2r-1)}(0) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty y(t) \left[x(t) + (-1)^r x^{(2r)}(t) \right] dt. \tag{5.11.6}$$

Отсюда для $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера (5.11.3) и условиям трансверсальности (5.11.4), следует

$$\|x\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \left\| x^{(r)} \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} = (-1)^{r-k} y^{(k)}(0)x^{(2r-k-1)}(0). \tag{5.11.7}$$

Поставим задачу: найти $y^{(k)}(0)$ для функции $y \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, подчиняющейся уравнению (5.11.3), условию (5.11.4) и требованию $y^{(2r-k-1)}(0) = 1$.

Очевидно, $y(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{r} a_\nu e^{z_\nu t}$, где $a_1, \ldots, a_r$, $y^{(k)}(0)$ удовлетворяют системе уравнений

$$a_1 z_1^r + ... + a_r z_r^r = 0,$$

$$.....$$

$$a_1 z_1^{2r-k-2} + ... + a_r z_r^{2r-k-2} = 0,$$

$$-y^{(k)}(0) + a_1 z_1^k + ... + a_r z_r^k = 0,$$

$$a_1 z_1^{2r-k-1} + ... + a_r z_r^{2r-k-1} = 1,$$

$$.....$$

$$a_1 z_1^{2r-1} + ... + a_r z_r^{2r-1} = 0.$$

Определитель этой системы отличен от нуля и, следовательно,

$$y^{(k)}(0) = \frac{\det \begin{Vmatrix} z_1^r & ... & ... & z_r^r \\ ... & ... & ... & ... \\ z_1^{2r-k-2} & ... & ... & z_r^{2r-k-2} \\ z_1^k & ... & ... & z_r^k \\ z_1^{2r-k} & ... & ... & z_r^{2r-k} \\ ... & ... & ... & ... \\ z_1^{2r-1} & ... & ... & z_r^{2r-1} \end{Vmatrix}}{\det \begin{Vmatrix} z_1^r & ... & ... & z_r^r \\ ... & ... & ... & ... \\ z_1^{2r-k-2} & ... & ... & z_r^{2r-k-2} \\ z_1^{2r-k-1} & ... & ... & z_r^{2r-k-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ z_1^{2r-1} & ... & ... & z_r^{2r-1} \end{Vmatrix}}. \qquad (5.11.8)$$

Из соотношения (5.11.7), примененного к $y(t)$, следует $y^{(k)}(0) \neq 0$. Введем функцию $y_0(t) = y(t)/y^{(k)}(0)$. Очевидно, функция $y_0 \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$ удовлетворяет уравнению (5.11.3), условиям (5.11.4) и

$$y_0^{(2r-k-1)}(0) = \frac{1}{y^{(k)}(0)}, \quad y_0^{(k)}(0) = 1.$$

Используя (5.11.6) и (5.11.7), для всякой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, удовлетворяющей условию $x^{(k)}(0) = 1$, можно получить равенство

$$(-1)^{r-k} y_0^{(2r-k-1)}(0) + \|x - y_0\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \|x^{(r)} - y_0^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} =$$

$$= \|x\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \|x^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)}.$$

Отсюда следует, что для всех $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, подчиняющихся требованию $x^{(k)}(0) = 1$, справедливо неравенство

$$1 = \left[x^{(k)}(0)\right]^2 \le (-1)^{r-k} y^{(k)}(0) \left[\|x\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \|x^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)}\right],$$

которое при $x(t) = y_0(t)$ обращается в равенство. Это означает

$$\mu_{rk} = (-1)^{r-k} y^{(k)}(0). \tag{5.11.9}$$

Уравнения $p_r(z_s) = 0$ $(s = 1, \ldots, r)$ позволяют записать систему линейных уравнений для отыскания $z_s^k, z_s^{k+1}, \ldots, z_s^{r-1}$:

$$\omega_0 z_s^k + \omega_1 z_s^{k+1} + \ldots + \omega_{r-k-1} z_s^{r-1} = -\omega_{r-k} z_s^r - \ldots - \omega_r z_s^{r+k},$$

$$\omega_0 z_s^{k+1} + \ldots + \omega_{r-k-2} z_s^{r-1} = -\omega_{r-k-1} z_s^r - \ldots - \omega_r z_s^{r+k+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega_0 z_s^{r-1} = -\omega_1 z_s^r - \ldots - \omega_r z_s^{2r-1}.$$

Решая эту систему, находим

$$z_s^k = \det \begin{Vmatrix} \omega_{r-k} z_s^r + \ldots + \omega_r z_s^{r+k} & \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{r-k-1} \\ \omega_{r-k-1} z_s^r + \ldots + \omega_r z_s^{r+k+1} & \omega_0 & \omega_1 & \ldots & \omega_{r-k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \omega_1 z_s^r + \ldots + \omega_r z_s^{2r-1} & 0 & 0 & \ldots & \omega_0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \sum_{\nu=r}^{2r-1} c_\nu z_s^\nu, \tag{5.11.10}$$

где c_ν не зависят от s. В дальнейшем будет использована лишь одна из величин c_ν :

$$c_{2r-k-1} = \det \begin{Vmatrix} \omega_{2r-k-1} & \omega_1 & \dots & \omega_{r-k-1} \\ \omega_{2r-k-2} & \omega_0 & \dots & \omega_{r-k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{r-k} & 0 & \dots & \omega_0 \end{Vmatrix} =$$

$$= -\left[\omega_{2r-2k-1}\Delta_0 - \omega_{2r-2k-2}\Delta_1 + \dots + (-1)^{r-k+1}\omega_{r-k}\Delta_{r-k-1}\right],$$

где $\Delta_0 = \omega_0$, $\Delta_1 = \omega_1$,

$$\Delta_2 = \det \begin{Vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_0 & \omega_1 \end{Vmatrix}, \dots, \ \Delta_j = \det \begin{Vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_j \\ \omega_0 & \omega_1 & \dots & \omega_{j-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_1 \end{Vmatrix}, \dots$$

— миноры элементов первого столбца. Легко показать, что $\omega_j = \Delta_j$ при $j = 0, \dots, 2r-1$. Для этого достаточно разложить в степенной ряд $1/p_r(z)$:

$$\frac{1}{p_r(z)} = \Delta_0 - \Delta_1 z + \Delta_2 z^2 - \dots$$

и использовать соотношение (5.11.5). Следовательно,

$$c_{2r-k-1} = (-1)^{r-k} \sum_{\nu=1}^{r-k-1} (-1)^\nu \omega_{r-k+\nu}\omega_{r-k-\nu-1}.$$

Подставляя вместо $z_1^k, \dots, z_r^k$ их выражения (5.11.10) в определитель из (5.11.8), находим

$$y^{(k)}(0) = c_{2r-k-1},$$

и, стало быть,

$$\mu_{rk} = (-1)^{r-k} y^{(k)}(0) = \sum_{\nu=1}^{r-k-1} (-1)^\nu \omega_{r-k+\nu}\omega_{r-k-\nu-1}.$$

Используя свойства $\omega_j = \omega_{r-j}$ и $\omega_j = 0$ при $j < 0$, имеем

$$\mu_{rk} = \sum_{\nu=0}^{r-k-1} (-1)^\nu \omega_{k-\nu}\omega_{k+\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \omega_{k-\nu}\omega_{k+\nu+1}.$$

Теорема 5.11.1. *Пусть*

$$S_\nu = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu \text{ — четно;} \\ (-1)^{(\nu+1)/2} / \sin \dfrac{\pi\nu}{2r}, & \text{если } \nu \text{ — нечетно,} \end{cases} \tag{5.11.11}$$

$$\omega_\nu = \begin{cases} \dfrac{(-1)^\nu}{\nu!} \det \begin{Vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\nu-1} & s_{\nu-2} & s_{\nu-3} & \dots & \nu-2 \\ s_\nu & s_{\nu-1} & s_{\nu-2} & \dots & S_1 \end{Vmatrix}, & \text{если } \nu = 1, \dots, 2r-1; \\ 1, & \text{если } \nu = 0. \end{cases} \tag{5.11.12}$$

Тогда

$$\mu_{rk} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \omega_{k-\nu} \omega_{k+\nu+1}. \tag{5.11.13}$$

Доказательство. Положим $S_\nu = \sum\limits_{j=1}^{r} z_j^\nu$ $(\nu = 1, \dots, r)$. Тогда прямыми вычислениями можно доказать справедливость соотношений (5.11.11). Равенства (5.11.12) при $\nu = 1, \dots, 2r-1$ есть следствие известных уравнений Ньютона, связывающих степенные суммы S_j корней многочлена и его коэффициенты.

При небольших значениях k теорема 5.11.1 позволяет получить явные выражения для μ_{rk}. Приведем для примера следующие формулы:

$$\mu_{r0} = \sin^{-1} \frac{\pi}{2r}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

$$\mu_{r1} = \frac{1}{3} \left[\sin^{-3} \frac{\pi}{2r} + \sin^{-1} \frac{3\pi}{2r} \right], \quad r = 2, 3, \dots,$$

$$\mu_{r2} = \frac{1}{20} \left[\sin^{-5} \frac{\pi}{2r} + 4 \sin^{-1} \frac{5\pi}{2r} \right], \quad r = 3, 4, \dots$$

Теорема 5.11.2. *Для всех $r = 1, 2, \dots$ и $k = 0, \dots, r-1$ справедливы равенства*

$$\mu_{rk} = \mu_{r,r-k-1}.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулой (5.11.13) и свойством $\omega_j = \omega_{r-j}$:

$$\mu_{r,r-k-1} = \sum_{\nu=0}^{r-(r-k-1)-1} \omega_{r-k-1-\nu}\omega_{r-k+\nu}(-1)^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} \omega_{k+\nu+1}\omega_{k-\nu}(-1)^\nu = \mu_{rk}.$$

Теорема 5.11.3. *Для фиксированного значения k при $r \to \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\mu_{rk} = \frac{1}{(2k+1)(k!)^2\left(\sin\dfrac{\pi}{2r}\right)^{2k+1}} + O(r^{2k-1}). \qquad (5.11.14)$$

Доказательство. По индукции нетрудно убедиться, что для фиксированного ν верны соотношения

$$\omega_\nu = \frac{(-1)^\nu S_1^\nu}{\nu!} + O(r^{\nu-2}) = \frac{1}{\nu!\left(\sin\dfrac{\pi}{2r}\right)^\nu} + O(r^{\nu-2}).$$

Следовательно,

$$\mu_{rk} = \frac{1}{\left(\sin\dfrac{\pi}{2r}\right)^{2k+1}}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{(k-\nu)!(k+\nu+1)!}\right) + O(r^{2k-1}) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\left(\sin\dfrac{\pi}{2r}\right)^{2k+1}}\left(\sum_{\nu=0}^{k} C_{2k+1}^\nu(-1)^\nu\right) + O(r^{2k-1}) =$$

$$= \frac{C_{2k}^k}{(2k+1)!\left(\sin\dfrac{\pi}{2r}\right)^{2k+1}} + O(r^{2k-1}).$$

Отсюда вытекает соотношение (5.11.14). Теорема доказана.

5.12. Неравенства типа Харди–Литлвуда–Полиа на полуоси

В данном параграфе для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, $r \in \mathbf{N}$, будет получено точное неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le M_{r,k} \|x\|_2^{\frac{r-k}{r}} \left\|x^{(r)}\right\|_2^{\frac{k}{r}}, \tag{5.12.1}$$

которое эквивалентно (см. § 1.7) точному неравенству

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 \le \frac{1}{\gamma_{r,k}} \left\{ \|x\|_2^2 + \left\|x^{(r)}\right\|_2^2 \right\}, \tag{5.12.2}$$

причем неулучшаемые константы $M_{r,k}$ и $\gamma_{r,k}^{-1}$ связаны соотношением

$$M_{r,k}^2 = \frac{1}{\gamma_{r,k}} \left\{ \left(\frac{r-k}{k}\right)^{\frac{k}{r}} + \left(\frac{k}{r-k}\right)^{\frac{r-k}{r}} \right\}.$$

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Бесконечную в обе стороны последовательность действительных чисел $\{\omega_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ будем называть гурвицевой порядка r, если $\omega_0 = \omega_r = 1$, $\omega_j = 0$ для $j \ne 0, 1, \ldots, r$ и все корни многочлена

$$p(\lambda) = \omega_0 + \omega_1\lambda + \ldots + \omega_r\lambda^r = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega_j \lambda^j \tag{5.12.3}$$

лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Лемма 5.12.1. *Пусть заданы натуральные числа r и k ($r = 2, 3, \ldots$, $k = 1, \ldots, r-1$). Каково бы ни было действительное число $\gamma \in \left(0, \dfrac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}}\right) := G_{r,k}$, существует одна и только одна гурвицева последовательность $\{\omega_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ порядка r, обладающая свойством*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu \omega_{j-\nu}\omega_{j+\nu} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \ne 0, k, r, \\ 1, & \text{если } j = 0, r, \\ -\gamma, & \text{если } j = k. \end{cases} \tag{5.12.4}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен $q(\lambda) = (-1)^r\lambda^{2r} - -\gamma(-1)^k\lambda^{2k} + 1$. Подсчитывая минимум $q(it)$ для $t \in (-\infty, \infty)$, получаем

$$q(ix) = x^{2r} - \gamma x^{2k} + 1 \geq 1 - \gamma^{\frac{r}{r-k}} \frac{k^{\frac{k}{r-k}}(r-k)}{r^{\frac{r}{r-k}}}.$$

Следовательно, при $\gamma \in G_{rk}$ многочлен $q(\lambda)$ не имеет чисто мнимых корней. Обозначим корни $q(\lambda)$ через $-z_1, -z_2, \ldots, -z_r, z_1, z_2, \ldots, z_r$ ($\mathrm{Re}\, z_j > 0$ для $j = 1, 2, \ldots, r$), и положим

$$p(\lambda) = (\lambda + z_1)(\lambda + z_2)...(\lambda + z_r) = \lambda^r + \omega_{r-1}\lambda^{r-1} + ... + \omega_1\lambda + \omega_0. \tag{5.12.5}$$

Тогда

$$q(\lambda) = p(\lambda)p(-\lambda) = (-1)^r\lambda^{2r} - \gamma(-1)^k\lambda^{2k} + 1. \tag{5.12.6}$$

Отсюда следует $\omega_0^2 = 1$. Учитывая положительность $\omega_0 = z_1 z_2 ... z_r$, получаем $\omega_0 = 1$.

Набор чисел $1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-1}, 1$ дополним нулями до бесконечной в обе стороны последовательности $\{\omega_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$. Из построения вытекает, что эта последовательность гурвицева порядка r.

Равенство (5.12.6) дает

$$(-1)^r\lambda^{2r} - \gamma(-1)^k\lambda^{2k} + 1 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j+s=\nu} \omega_j\omega_s(-1)^s \right) \lambda^\nu.$$

Сравнивая коэффициенты левой и правой частей, получаем

$$\sum_{j+s=\nu} \omega_j\omega_s(-1)^s = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu \neq 0, 2k, 2r, \\ 1, & \text{если } \nu = 0, \\ -\gamma(-1)^k, & \text{если } \nu = 2k, \\ (-1)^n, & \text{если } \nu = 2r. \end{cases}$$

Отсюда вытекает (5.12.4). Существование для $\gamma \in G_{rk}$ гурвицевой последовательности порядка r, обладающей свойством (5.12.4), установлено.

Пусть теперь $\{\tilde{\omega}_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — гурвицева последовательность порядка r, обладающая свойством (5.12.4). Положим $\tilde{p}(\lambda) = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}_j \lambda^j$. Тогда на основании (5.12.4) легко заключаем

$$\tilde{p}(\lambda)\tilde{p}(-\lambda) = (-1)^r \lambda^{2r} - \gamma(-1)^k \lambda^{2k} + 1 = q(\lambda). \qquad (5.12.7)$$

Отсюда следует, что $\tilde{p}(\lambda)$ строится по корням многочлена $q(\lambda)$ таким же способом, как $p(\lambda)$, а, стало быть, $\omega_j = \tilde{\omega}_j$ для целых j. Лемма доказана.

Лемма 5.12.2. *Если* $x \in L_{2,2}^r(\mathbf{R}_+)$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x'(t) = ... = \lim_{t\to\infty} x^{(r-1)}(t) = 0.$$

Лемма непосредственно следует из неравенства (5.10.11).

Ниже нам придется иметь дело с конечными наборами чисел $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$. Договоримся всякий раз считать этот набор продолженным нулями до бесконечной в обе стороны последовательности $\{\omega_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$.

По заданному набору чисел $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$ построим числа:

$$\Gamma_j = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu \omega_{j-\nu}\omega_{j+\nu}, \qquad (5.12.8)$$

$$q_{js} = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \omega_{j+\nu}\omega_{s-\nu-1}, & \text{если } 1 \le s \le j \le r, \\ q_{sj}, & \text{если } 1 \le j < s \le r. \end{cases} \qquad (5.12.9)$$

Из чисел q_{js} образуем симметричную матрицу

$$Q = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1r} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{r1} & q_{r2} & \cdots & q_{rr} \end{Vmatrix}.$$

Если задан вектор $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, то через Q_r будем обозначать вектор $b = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$, координаты которого задаются

формулами $b_\nu = \sum\limits_{j=1}^{r} q_{\nu j} a_j$ $(\nu = 1, \ldots, r)$. Через (a, b), как обычно, обозначатся скалярное произведение векторов a, b из $\mathbf{R}^r$.

Лемма 5.12.3. *Если* $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, *то* $x'(t), x''(t), \ldots, x^{(r-1)}(t)$ *принадлежат* $L_2(\mathbf{R}_+)$ *и для любого набора действительных чисел* $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{r} \omega_j x^{(j)}(t) \right)^2 dt = \sum_{j=0}^{r} \Gamma_j \int\limits_0^\infty [x^{(j)}(t)]^2 dt - (Qx_0, x_0), \tag{5.12.10}$$

где

$$x_0 = \{x(0), x'(0), \ldots, x^{(r-1)}(0)\}.$$

Доказательство. Пусть $T > 0$. Тогда

$$\int\limits_0^T \left(\sum_{j=0}^{r} \omega_j x^{(j)}(t) \right)^2 dt = \sum_{j=0}^{r} \omega_j^2 \int\limits_0^T [x^{(j)}(t)]^2 dt +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{s=0}^{j-1} \omega_j \omega_s \int\limits_0^T x^{(j)}(t) x^{(s)}(t) dt. \tag{5.12.11}$$

Интегрированием по частям получаем при $j > s$

$$\int\limits_0^T x^{(j)}(t) x^{(s)}(t) dt =$$

$$= \begin{cases} \Big[x^{(2\nu+s-1)} x^{(s)} - x^{(2\nu+s-2)} x^{(s+1)} + \ldots + (-1)^{\nu-1} \times \\ \times x^{(\nu+s)} x^{(\nu+s-1)} \Big]_0^T + (-1)^\nu \int\limits_0^T \Big[x^{(s+\nu)}(t) \Big]^2 dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } j - s = 2\nu, \\ \Big[x^{(2\nu+s)} x^{(s)} - x^{(2\nu+s-1)} x^{(s+1)} + \ldots + (-1)^{\nu-1} x^{(\nu+s+1)} \times \\ \times x^{(\nu+s-1)} + \dfrac{1}{2} (-1)^\nu x^{(s+\nu)} x^{(s+\nu)} \Big]_0^T, \quad \text{если } j - s = 2\nu + 1. \end{cases} \tag{5.12.12}$$

Векторы $\{x(0), x'(0), \ldots, x^{(r-1)}(0)\}$ и $\{x(T), x'(T), \ldots, x^{(r-1)}(T)\}$ обозначим соответственно x_0 и x_T. Тогда (5.12.12) можно записать $(j > s)$ так:

$$\int\limits_0^T x^{(j)}(t)x^{(s)}(t)dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}(P_{js}x_T, x_T) - \dfrac{1}{2}(P_{js}x_0, x_0) + (-1)^\nu \displaystyle\int\limits_0^T [x^{(s+\nu)}(t)]^2 dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } j = s + 2\nu, \\ \dfrac{1}{2}(P_{js}x_T, x_T) - \dfrac{1}{2}(P_{js}x_0, x_0), \qquad \text{если } j = s + 2\nu + 1, \end{cases}$$

где матрица P_{js} имеет вид

$$P_{js} = \left\| \begin{matrix} & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & \end{matrix} \right\|$$

Тогда (5.12.11) принимает вид

$$\int\limits_0^T \left(\sum_{j=0}^r \omega_j x^{(j)}(t) \right)^2 dt = \sum_{j=0}^r \omega_j^2 \int\limits_0^T [x^{(j)}(t)]^2 dt +$$

$$+ 2\sum_{\substack{j=1\\ s-j}}^{r}\sum_{s=0}^{j-1}\omega_j\omega_s(-1)^{\frac{s-j}{2}}\int\limits_0^T\left[x^{(\frac{j+s}{2})}(t)\right]^2(t)dt +$$

$$+ (Px_T, x_T) - (Px_0, x_0), \qquad (5.12.13)$$

где

$$P = \sum_{j=1}^{r}\sum_{s=0}^{j-1}\omega_j\omega_s P_{js}. \qquad (5.12.14)$$

Так как

$$2\sum_{\substack{j=1\\ s-j}}^{r}\sum_{s=0}^{j-1}\omega_j\omega_s(-1)^{\frac{s-j}{2}}\int\limits_0^T\left[x^{\left(\frac{j+s}{2}\right)}(t)\right]^2(t)dt =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{r-1}\int\limits_0^T[x^{(\nu)}(t)]^2dt\sum_{j=\nu+1}^{2\nu}\omega_j\omega_{2\nu-j}(-1)^{j-\nu} = \sum_{\nu=1}^{r-1}\int\limits_0^T[x^{(\nu)}(t)]^2dt\times$$

$$\times\left\{\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\omega_{\nu+j}\omega_{\nu-j} + \sum_{j=-1}^{-\nu}(-1)^j\omega_{\nu+j}\omega_{\nu-j}\right\} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r-1}(\Gamma - \omega_\nu^2)\int\limits_0^T[x^{(\nu)}(t)]^2dt,$$

то формула (5.12.13) принимает вид

$$\int\limits_0^T\left(\sum_{j=0}^{r}\omega_j x^{(j)}(t)\right)^2dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{r}\Gamma_j\int\limits_0^T[x^{(j)}(t)]^2dt + (Px_T, x_T) - (Px_0, x_0). \qquad (5.12.15)$$

Чтобы доказать принадлежность функций $x'(t), x''(t), \ldots, x^{(r-1)}(t)$ пространству $L_2(\mathbf{R}_+)$, воспользуемся произволом в выборе чисел $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$. Пусть k — любое из чисел $1, 2, \ldots, r-1$, а γ — произвольное число из интервала $\left(0, \dfrac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}}\right)$.

На основании леммы 5.12.1 построим гурвицеву последовательность порядка r, обладающую свойством (5.12.4). Тогда из (5.12.15) получаем

$$\int\limits_0^T x^2(t)dt - \gamma \int\limits_0^T [x^{(k)}(t)]^2 dt + \int\limits_0^T [x^{(r)}(t)]^2 dt +$$

$$+ (\hat{P}x_T, x_T) - (\hat{P}x_0, x_0) \geq 0. \qquad (5.12.16)$$

По лемме 5.12.2 при $T \to \infty$ имеем $(\hat{P}x_T, x_T) \to 0$. Переходя в (5.12.16) к пределу при $T \to \infty$, получаем $x^{(k)} \in L_2(\mathbf{R}_+)$ для $k = 1, 2, \ldots, r-1$.

Вновь возвращаемся к формуле (5.12.15) при произвольном выборе чисел $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$. Устремив T к ∞, получим

$$\int\limits_0^\infty \left(\sum_{j=0}^r \omega_j x^{(j)}(t)\right)^2 dt = \sum_{j=0}^r \Gamma_j \int\limits_0^\infty [x^{(j)}(t)]^2 dt - (Px_0, x_0). \qquad (5.12.17)$$

Чтобы завершить доказательство леммы, достаточно установить равенство $P = Q$.

Матрица P симметрична, так как симметричны все матрицы P_{js}. Найдем элементы матрицы P. Для этого заметим, что из всех матриц $P_{k,j}$ ненулевые элементы в j-й строке и s-м столбце $(j \geq s)$ будут иметь лишь $P_{j,s-1}, P_{j+1,s-2}$... При этом $P_{j,s-1}$ имеет на указанном месте число $+1$, $P_{j+1,s-2}$ число -1 и т.д. Это означает, что при $j \geq s$ матрица P имеет в j-й строке и s-м столбце следующее число:

$$\sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \omega_{j+\nu}\omega_{s-\nu-1},$$

т. е. $P = Q$. Лемма доказана.

Положим при $r = 2, 3, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots, r-1$

$$\gamma_{rk} = \inf_{x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)} \frac{\|x\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)} + \|x^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)}}{\|x^{(k)}\|^2_{L_2(\mathbf{R}_+)}}.$$

Лемма 5.12.4. *Справедливы неравенства*

$$0 < \gamma_{rk} < \frac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}}. \tag{5.12.18}$$

Доказательство. Вместо $\|x\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}$ будем писать для краткости $\|x\|$. Пусть γ — произвольное положительное число. Из леммы 5.12.3 при $\omega_0 = \lambda$, $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 1/\lambda$ следует для всякой функции из $L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$

$$\left\|\lambda x + x' + \frac{1}{\lambda}x''\right\|^2 =$$

$$= \lambda^2\|x\|^2 - \|x'\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|x''\|^2 - \left[\sqrt{\lambda}x(0) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}x'(0)\right]^2.$$

Отсюда

$$\|x'\|^2 \le \lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|x''\|^2.$$

При $\lambda = \sqrt{\dfrac{\|x''\|}{\|x\|}}$ из этого неравенства вытекает

$$\|x'\|^2 \le 2\|x\|\|x''\|.$$

Следовательно, для всякой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$ справедливы неравенства:

$$\|x'\|^2 \le 2\|x\|\|x''\|,$$

$$\|x''\|^2 \le 2\|x'\|\|x'''\|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\|x^{(r-1)}\|^2 \le 2\|x^{(r-2)}\|\|x^{(r)}\|.$$

Отсюда, полагая

$$p_1 = \frac{r-k}{r}, \quad p_2 = 2\frac{r-k}{r}, \ldots, \quad p_k = k\frac{r-k}{r},$$

$$p_{k+1} = \frac{k}{r}(r-k-1), \quad p_{k+2} = \frac{k}{r}(r-k-2), \ldots, \quad p_{r-1} = \frac{k}{r},$$

получаем

$$\|x'\|^{2p_1}\|x''\|^{2p_2}\ldots\|x^{(r-1)}\|^{2p_{r-1}} \leq$$

$$\leq 2^{p_1+\ldots+p_{r-1}}\|x\|^{p_1}\|x'\|^{p_2}\|x''\|^{p_1+p_3}\ldots\|x^{(k)}\|^{p_{k-1}+p_{k+1}}\ldots$$

$$\ldots\|x^{(r-1)}\|^{p_{r-2}}\|x^{(r)}\|^{p_{r-1}},$$

или

$$\|x^{(k)}\|^{2p_k-p_{k-1}-p_{k+1}} \leq 2^{p_1+\ldots+p_{r-1}}\|x\|^{p_1}\|x^{(r)}\|^{p_{r-1}}.$$

Окончательно

$$\|x^{(k)}\|^2 \leq 2^{k(r-k)}\|x\|^{2\frac{r-k}{r}}\|x^{(r)}\|^{2\frac{k}{r}}.$$

Используя неравенство $1 \leq C_\beta\left(y^\beta + y^{\frac{1}{2-\beta}}\right)$ (для $y > 0$, $0 < \beta < 2$, C_β не зависит от y), можно записать

$$\|x^{(k)}\| \leq$$

$$\leq 2^{k(r-k)}C_\beta\|x\|^{2\frac{r-k}{r}}\|x^{(r)}\|^{2\frac{k}{r}}\left[\left(\frac{\|x\|}{\|x^{(r)}\|}\right)^{2\frac{k}{r}} + \left(\frac{\|x^{(r)}\|}{\|x\|}\right)^{2\frac{r-k}{r}}\right] \leq$$

$$\leq 2^{k(r-k)}C_\beta\left[\|x\|^2 + \|x^{(r)}\|^2\right].$$

Следовательно, $\gamma_{rk} \geq \dfrac{1}{C_\beta}2^{-k(r-k)} > 0$. Перейдем к оценке γ_{rk} сверху. С этой целью рассмотрим функцию

$$x(t) = e^{i\Phi - zt} + e^{-i\Phi - \overline{z}t},$$

где $z = e^{i\theta}$, $\Phi = \pi/2 + \pi/(r+1)$, $\theta = \pi/(r+1)$. Имеем

$$\int\limits_0^\infty [x^{(s)}(t)]^2 dt = \frac{1}{2} e^{2i\Phi} z^{2s-1} + \frac{1}{2} e^{-2i\Phi} \overline{z}^{2s-1} + \frac{2}{z+\overline{z}} =$$

$$= \cos\left(2\Phi + (2s-1)\theta\right) + \frac{1}{\cos\theta} =$$

$$= \frac{\cos(2\Phi + 2s\theta) + \cos(2\Phi + 2(s-1)\theta) + 2}{2\cos\theta} =$$

$$= \frac{\cos^2(\Phi + s\theta) + \cos^2(\Phi + (s-1)\theta)}{\cos\theta}.$$

Отсюда

$$\frac{\|x\|^2 + \|x^{(r)}\|^2}{\|x^{(k)}\|^2} =$$

$$= \frac{\cos^2\Phi + \cos^2(\theta - \Phi) + \cos^2(\Phi + r\theta) + cos^2(\Phi + (r-1)\theta)}{\cos^2(\Phi + k\theta) + \cos^2(\Phi + (k-1)\theta)} =$$

$$= \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{r+1}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi r}{r+1}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi(k+1)}{r+1}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi k}{r+1}\right)} =$$

$$= \frac{2\sin^2 \dfrac{\pi}{r+1}}{\sin^2 \dfrac{\pi(k+1)}{r+1} + \sin^2 \dfrac{\pi k}{r+1}} \le 1,$$

так как $\sin \dfrac{\pi k}{r+1} \ge \sin \dfrac{\pi}{r+1}$ при $k = 1, 2, \ldots, r$. Таким образом, доказано, что $\gamma_{rk} \le 1$. Остается показать, что $\dfrac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}} > 1$. В самом деле,

$$\frac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}} \ge \inf_{\frac{1}{r} \le \theta \le 1 - \frac{1}{r}} \frac{1}{\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta}} =$$

$$= \inf_{\frac{1}{r} \le \theta \le 1-\frac{1}{r}} e^{-[\theta \ln \theta + (1-\theta)\ln(1-\theta)]} > 1.$$

Лемма доказана.

Перейдем к изложению основного результата.

Ввиду (5.12.2) для $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$ имеем

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2^2 \le \frac{1}{\gamma_{r,k}} \left\{ \|x\|_2^2 + \left\| x^{(r)} \right\|_2^2 \right\},$$

где $1/\gamma_{rk}$ — неуменьшаемая константа.

Сейчас будет указан способ отыскания величин γ_{rk}. Пусть γ — произвольное число из интервала $\left(0, \dfrac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}}\right)$. Обозначим $\omega_j(\gamma)$ — элементы гурвицевой последовательности $\{\omega_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ порядка r, обладающей свойством (5.12.4). Положим далее

$$D(\gamma) = \det \begin{Vmatrix} q_{11}(\gamma) & q_{12}(\gamma) & \dots & q_{1r} \\ q_{21}(\gamma) & q_{22}(\gamma) & \dots & q_{2r}(\gamma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{r1}(\gamma) & q_{r2}(\gamma) & \dots & q_{rr}(\gamma) \end{Vmatrix}, \tag{5.12.19}$$

где $q_{js}(\gamma) = q_{sj}(\gamma) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \omega_{j+s}(\gamma)\omega_{s-\nu-1}(\gamma)$ при $\gamma \ge s$.

Теорема 5.12.1. *Число γ_{rk} является наименьшим положительным корнем уравнения $D(\gamma) = 0$.*

Доказательство. Подставив в (5.12.10) вместо ω_j числа $\omega_j(\gamma)$, получим для $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$

$$\|\sum_{j=0}^{r} \omega_j(\gamma) x^{(j)}(t)\|^2 = \|x\|^2 + \|x^{(r)}\|^2 - \gamma\|x^{(r)}\|^2 - (Qx_0, x_0). \tag{5.12.20}$$

Здесь матрица Q зависит от γ, а поэтому вместо Q будем писать $Q(\gamma)$.

Пусть $0 < \gamma < \gamma_{rk}$ (существование таких γ вытекает из леммы 5.12.4), а x — произвольный ненулевой вектор с координатами $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$. Решим задачу Коши

$$\sum_{j=0}^{r} \omega_j(\gamma) y^{(j)}(t) = 0,$$

$$y^{(j)}(0) = x_j \quad (j = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Решение этой задачи вместе со всеми своими производными до порядка $r-1$ принадлежит $L_2(\mathbf{R}_+)$, так как $\{\omega_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — гурвицева последовательность. Применив соотношение (5.12.20) к функции y, получим

$$\|y\|^2 + \|y^{(r)}\|^2 - \gamma\|y^{(k)}\|^2 = (Q(\gamma)x, x) > 0.$$

Это означает, что минимальное собственное значение матрицы $Q(\gamma)$ положительно при $\gamma < \gamma_{rk}$. Отсюда следует, что $D(\gamma) = \det Q(\gamma) \neq$ $\neq 0$ при $\gamma \in (1, \gamma_{rk})$.

Пусть теперь $\gamma_{rk} < \gamma < \dfrac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}}$ (существование таких γ вытекает из леммы 5.12.4). Тогда для всякой функции $x \in$ $\in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$ имеем (см. (5.12.20))

$$\|x\|^2 + \|x^{(r)}\|^2 - \gamma\|x^{(k)}\|^2 \geq (Q(\gamma)x_0, x_0). \tag{5.12.21}$$

Из определения γ_{rk} следует существование такой функции $y \in L^r_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, что $\|y\|^2 + \|y^{(r)}\|^2 - \gamma\|y^{(k)}\|^2 < 0$. Неравенство (5.12.21), примененное к $y(t)$, дает $(Q(\gamma)y_0, y_0) < 0$, где $y_0 = \{y(0), y'(0), \ldots, y^{(r-1)}(0)\}$. Это означает, что минимальное собственное число матрицы $Q(\gamma)$ отрицательно при всех $\gamma \in$ $\in \left(\gamma_{rk}, \dfrac{r}{k^{k/r}(r-k)^{(r-k)/r}}\right)$. Следовательно, при $\gamma = \gamma_{rk}$ минимальным собственным значением матрицы $Q(\gamma)$ является нуль и $D(\gamma) = \det Q(\gamma) = 0$. Теорема доказана.

Следствие 5.12.1. *При всех $r = 2, 3, \ldots$ и всех $k = 1, \ldots, r-1$ справедливо равенство $\gamma_{rk} = \gamma_{r,r-k}$.*

Доказательство. Пусть $\{\omega_j(\gamma)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — последовательность, построенная по лемме 5.12.1 для заданных натуральных чисел r и k ($r = 2, 3, \ldots,\ k = 1, \ldots, r-1$). Рассмотрим последовательность $\{\tilde{\omega}_j(\gamma)\}_{j=-\infty}^{\infty}$, где $\tilde{\omega}_j(\gamma) = \omega_{r-j}(\gamma)$. Она, очевидно, является гурвицевой порядка r и

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} \tilde{\omega}_{j-\nu}(\gamma)\tilde{\omega}_{\nu+j}(\gamma) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} \omega_{r+\nu-j}(\gamma)\omega_{r-\nu-j}(\gamma) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } r-j \neq 0, k, r, \\ 1, & \text{если } r-j = 0, r, \\ -\gamma, & \text{если } r-j = k. \end{cases}$$

Это означает, что $\{\tilde{\omega}_j(\gamma)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ является последовательностью, построенной в соответствии с леммой 5.12.1 для натуральных чисел r и $r-k$.

Положим при $j \geq s$ $\quad \tilde{q}_{js}(\gamma) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \tilde{\omega}_{j+\nu}(\gamma)\tilde{\omega}_{s-\nu-1}(\gamma)$. Тогда

$$\tilde{q}_{js}(\gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \omega_{r-\nu-j}(\gamma)\omega_{r-s+\nu+1}(\gamma) = q_{r-s+1,r-j+1}(\gamma).$$

Отсюда

$$\tilde{Q}(\gamma) = \left\| \begin{matrix} \tilde{q}_{11}(\gamma) & \tilde{q}_{12}(\gamma) & \ldots & \tilde{q}_{1r} \\ \tilde{q}_{21}(\gamma) & \tilde{q}_{22}(\gamma) & \ldots & \tilde{q}_{2r}(\gamma) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{q}_{r1}(\gamma) & \tilde{q}_{r2}(\gamma) & \ldots & \tilde{q}_{rr}(\gamma) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} q_{rr}(\gamma) & q_{r-1,r}(\gamma) & \ldots & q_{1r} \\ q_{r,r-1}(\gamma) & q_{r-1,r-1}(\gamma) & \ldots & q_{1,r-1}(\gamma) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{r1}(\gamma) & q_{r-1,1}(\gamma) & \ldots & q_{11}(\gamma) \end{matrix} \right\|.$$

Это означает, что $\det\tilde{Q}(\gamma) = \det Q(\gamma)$. На основании теоремы 5.12.1 отсюда заключаем: $\gamma_{r,r-k} = \gamma_{rk}$. Следствие 5.12.1 доказано.

Следствие 5.12.2. *Справедливы следующие утверждения:*

а) $\gamma_{21} = 1$;

б) $\gamma_{31} = \gamma_{32} = \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$;

в) γ_{41} (*а следовательно, и* γ_{43}) *является наименьшим положительным корнем уравнения*

$$\gamma^8 - 6\gamma^4 - 8\gamma^2 + 1 = 0;$$

г) γ_{42} *является наименьшим положительным корнем уравнения*

$$\gamma^4 - 2\gamma^2 - 4\gamma + 1 = 0.$$

Доказательство. В случае $r = 2,\ k = 1$ имеем из (5.12.4) $\omega_1^2 - 2 = -\gamma$ и из (5.12.19) $D(\gamma) = \omega_1^2 - \gamma$. Поэтому $\gamma_{21} = 1$ и "а" доказано. В случае $n = 3$, $k = 1$ (5.12.4) имеет вид

$$\omega_1^2 - 2\omega_2 = -\gamma, \qquad \omega_2^2 - 2\omega_1 = 0,$$

а $D(\gamma) = 1 - \gamma\omega_2$.

Отсюда без труда получаем утверждение "б". Для отыскания γ_{41} имеем систему

$$\omega_1^2 - 2\omega_2 = -\gamma, \quad \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_3 + 2 = 0,$$

$$\omega_3^2 - 2\omega_2 = 0, \quad \gamma(\omega_1^2 - \omega_2) = 1.$$

Отсюда следует утверждение "в". Утверждение "г" может быть получено из системы

$$\omega_1^2 - 2\omega_2 = 0, \quad \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_3 + 2 = -\gamma, \quad \omega_3^2 - 2\omega_2 = 0,$$

$$\gamma^2 + (2 - \omega_1\omega_3)\gamma + 1 = 0.$$

Наконец, отметим следующее утверждение: *все* γ_{rk} *являются алгебраическими числами.*

Можно получить другое представление для определителя $D(\gamma)$ и с помощью этого представления изучить асимптотическое поведение величин γ_{rk}. Сформулируем эти результаты без доказательств.

Теорема 5.12.2. *Число γ_{rk} является наименьшим положительным решением уравнения*

$$D(\gamma) = \det \begin{Vmatrix} \tilde{\Delta}_{r-k+1} & \tilde{\Delta}_{r-k+2} & \dots & \tilde{\Delta}_r \\ \tilde{\Delta}_{r-k+2} & \tilde{\Delta}_{r-k+3} & \dots & \tilde{\Delta}_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\Delta}_r & \tilde{\Delta}_{r+1} & \dots & \tilde{\Delta}_{r+k-1} \end{Vmatrix} = 0,$$

где

$$\tilde{\Delta}_{r-j} = \sum_{\nu=1}^{2k} \varepsilon_\nu^{-j} \exp\left[\frac{r}{i\varepsilon_\nu \pi k} \int\limits_0^\gamma \eta^{\frac{1}{2k}-1} \Psi_\nu(\eta) d\eta\right],$$

$$\Psi_\nu(\eta) = \int\limits_0^\infty \frac{1 - s^{2k}\eta}{\left(s^2\eta^{\frac{1}{k}} - \bar{\varepsilon}_\nu^2\right)\left(s^{2r} - \eta s^{2k} + 1\right)} ds,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2k}$ — *корни степени* $2k$ *из* 1.

Теорема 5.12.3. *Величины γ_{r1} являются минимальными положительными корнями уравнения*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma^{\nu+\frac{1}{2}}}{2\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2r}\right)\Gamma\left(1+\nu-\frac{2\nu+1}{2r}\right)}{\nu!} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Следствие 5.12.3. *Для величин γ_{r1} справедливы следующие асимптотические формулы* (*при* $r \to \infty$):

$$\gamma_{r1} = \frac{\pi^4}{16r^2}\left[1 - \frac{\pi^2}{12r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right],$$

$$\frac{1}{\gamma_{r1}} = \frac{16r^2}{\pi^4} + \frac{4}{3\pi^3} + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Теорема 5.12.4. *Для величин γ_{rk} при фиксированном k справедливы следующие асимптотические формулы* (*при* $r \to \infty$):

$$\gamma_{rk} = \frac{\lambda_1(k)\pi^{2k}}{4^k r^{2k}} + O\left(\frac{1}{r^{2k+2}}\right),$$

$$\frac{1}{\gamma_{rk}} = \frac{4^k r^{2k}}{\lambda_1(k)\pi^{2k}} + O\left(r^{2k-2}\right),$$

где $\lambda_1(k)$ — *минимальное собственное значение следующей краевой задачи на отрезке* $[0,1]$:

$$(-1)^k F^{(2k)}(t) = \lambda F(t),$$

$$F^{(k)}(0) = F^{(k+1)}(0) = ... = F^{(2k-1)}(0) = 0,$$

$$F(1) = F'(1) = ... = F^{(k-1)}(1) = 0.$$

Комментарии к главе 5

По объему это самая большая глава. Здесь представлены результаты о точных константах в неравенствах типа Колмогорова в ситуациях, когда среди параметров q, p, s есть параметры, равные 2. Это позволяет использовать для изучения задачи средства, специфические для гильбертовых пространств, которых нет в других нормированных пространствах. В § 5.1 приводим несколько достаточно простых обобщений неравенства Харди–Литлвуда–Полиа для функций, заданных на окружности или на всей числовой оси. Для степеней вполне непрерывного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве оказывается возможным, благодаря наличию теоремы Гильберта–Шмидта, фактически повторить приведенное в § 1.6 доказательство неравенства Харди–Литлвуда–Полиа для функций, заданных на окружности, и получить неулучшаемое неравенство

$$\|A^k x\| \le \|x\|^{r-k/r} \|A^k x\|^{k/r}.$$

Далее для степеней нормального оператора приводится чисто “алгебраическое” доказательство неравенства типа Харди–Литлвуда–Полиа. Основной целью данного параграфа является выяснение того, моделью какой общей ситуации являются операторы дифференцирования на полуоси. Здесь, в частности, показано, что оператор дифференцирования на полуоси является сопряженным к максимальному симметрическому несамосопряженному оператору в пространстве

$L_2([0,+\infty))$ комплекснозначных функций. Далее излагается результат Ю.И. Любича [245] о точной константе в неравенстве для степеней таких операторов (доказательства не приводятся, поскольку их изложение потребовало бы привлечения материала, выходящего за рамки того математического минимума, на который мы ориентировались). Оказалось, что упомянутая константа не зависит от оператора (она одна и та же для всех таких операторов). Найти для нее явное и достаточно компактное выражение вряд ли возможно. Ю.И. Любич дает (см. также § 5.12) алгоритм для ее отыскания, сводящий задачу к решению системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами.

К вопросу об отыскании точной константы в L_2 на полуоси (уже для вещественнозначных функций) возвращаемся в § 5.12. Здесь изложен подход Н.П. Купцова [228] к этой задаче. Если Любич развивает "метод квадратичных функционалов" доказательства неравенства Харди–Литлвуда на полуоси, то Купцов развивает другой метод, основанный на наборе тождеств типа (1.5.3). Чисто вариационный метод доказательства неравенства Харди–Литлвуда на полуоси был развит А.П. Буслаевым, который рассмотрел более общую задачу (см. раздел "Дополнительные результаты к гл. 5").

В § 5.2 приведены принадлежащие Л.В. Тайкову уточнения неравенства Харди–Литлвуда–Полиа для функций, заданных на всей оси. В § 5.3–5.5 рассматриваем задачу о неравенствах для производных периодических функций, а также в весовых пространствах L_2 для функций, заданных на отрезке или всей оси. В § 5.3 приведено неравенство Рафальсона [285]. Результаты, изложенные в § 5.4–5.5, получены в работе [88]. Здесь основное внимание уделяется аддитивным неравенствам. Смысл полученных результатов состоит в том, что описывается семейство касательных (см. § 1.7) к графику модуля непрерывности оператора d^k/dt^k, который в этих случаях уже не имеет вида $\omega(\delta) = K\delta^\alpha$. Изложенные в этих двух пунктах результаты уточняют и существенно дополняют результаты работ [117, 130].

§ 5.7 и 5.8 посвящены неравенствам, оценивающим L_∞-норму промежуточной производной через L_2-нормы самой функции и

старшей производной. В § 5.7 приведено неравенство Л.В. Тайкова [310] для функций, заданных на всей оси, в § 5.8 — неравенство А.Ю. Шадрина [341] для периодических функций, а в § 5.10 — неравенство В.Н. Габушина [134] для функций, заданных на полуоси. В § 5.11 приведены результаты Н.П. Купцова [229] об асимптотическом поведении точных констант в неравенстве Габушина. Отметим, что неравенства, оценивающие L_∞-норму промежуточной производной через L_2-нормы самой функции и старшей производной, оказались наиболее поддающимися изучению (они уступают в этом смысле разве что неравенствам, в которых присутствуют только L_2-нормы). Здесь в полной мере и наиболее прозрачно удается применить общие методы теории экстремальных задач, что с успехом продемонстрировано в работах Г.Г. Магарил-Ильяева и В.М. Тихомирова [251], где соответствующие неравенства получены для дробных производных, а также А.П. Буслаева и В.М. Тихомирова [129], где изучены многомерные задачи.

В § 5.9 изложено принадлежащее Соляру [294] обобщение неравенства (1.5.10) из § 1.5, которое оценивает L_2-норму производной порядка k через L_p-норму функции и $L_{p'}$-норму производной порядка $2k$. Отметим, что ряд многомерных обобщений этого неравенства получен в работе [57] (см. раздел “Дополнительные результаты”).

В заключение отметим, что многомерные обобщения неравенств для L_2-норм производных изучались в работах [251, 129]. Ряд дополнительных возможностей, которые предоставляет наличие L_2-нормы в неравенстве для производных в периодическом случае, будет проиллюстрирован в гл. 6.

Дополнительные результаты к главе 5

1. Магарил-Ильяев и Тихомиров [251] изучили задачу о точных константах в неравенствах вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le K \left\|x^{(k)}\right\|_2^\alpha \left\|x^{(k)}\right\|_2^{1-\alpha}$$

для дробных значений k и r.

2. Буслаев и Тихомиров [129] получили многомерные аналоги неравенств Тайкова и Габушина.

3. В работе [57] приведена общая схема получения точных неравенств вида

$$\|\mathcal{D}^\alpha x\|^2_{L_2(\mathbf{R}^m)} \le \|x\|_{L_p(\mathbf{R}^m)} \left\|\mathcal{D}^{2\alpha} x\right\|^2_{L_{p'}(\mathbf{R}^m)},$$

где $\mathcal{D}^\alpha$ — обобщенная производная порядка α, $p' = p/(p-1)$, и представлены обобщения такого типа неравенств на разностные операторы. С помощью этой общей схемы и одномерного неравенства Лигуна (см. § 6.2) для гладких периодических функций двух переменных получены точные неравенства вида

$$\|\mathcal{D}^\gamma x\|_{L_2(\mathbf{T}^2)} \le$$

$$\le \frac{\left\|\varphi_{r-|\gamma|}\right\|_{L_2(\mathbf{T}^2)}}{\|\varphi_r\|^{1-\lambda-\mu}_{L_\infty(\mathbf{T}^2)}} \|x\|^{1-\lambda-\mu}_{L_\infty(\mathbf{T}^2)} \|\mathcal{D}^\alpha x\|^\lambda_{L_\infty(\mathbf{T}^2)} \left\|\mathcal{D}^\beta x\right\|^\mu_{L_\infty(\mathbf{T}^2)},$$

где наборы векторов $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}^2_+$ таковы, что $\gamma = \lambda\alpha + \mu\beta$, $\lambda, \mu \ge 0$, $\lambda + \mu < 1$.

4. В работе [363] получено неравенство типа (5.9.1) для функций $x \in L_{p,p'}(\mathbf{R}_+)$. А именно, доказано следующее неравенство:

$$\|x'\|^2_2 \le K\|x\|_p \|x''\|_{p'},$$

где $p \in (1, \infty)$, $p' = p/(1-p)$. Авторы установили, что константа K не зависит от x, но зависит от выбора p и привели некоторую характеризацию наилучшей константы в этом неравенстве.

5. Пусть непрерывные на полуоси функции f и g таковы, что: 1) $f(t) > 0$ для $t > 0$; 2) $g(t) \ge -d$ для $t \ge 0$, где $d \ge 0$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $M(x) := -(fx')' + gx$ и класс $\Delta(M)$ функций $x \in L_2(\mathbf{R})$, у которых x' локально абсолютно непрерывна и $M(x) \in L_2(\mathbf{R})$.

В работе [360] рассмотрены неравенства вида

$$\left|\int_0^\infty (f(t)x'(t)^2 + g(t)x(t)^2)dt\right|^2 \le$$

$$\leq K(f,g)\left(\int\limits_0^\infty x(t)^2dt\right)\left(\int\limits_0^\infty M(x(t))^2dt\right). \qquad (Д.5.1)$$

Доказано, что неравенство (Д.5.1) с некоторой константой $K(f,g)$ справедливо для всех функций $x \in \Delta(M)$, если и только если существует константа $C > 0$, такая, что

$$\int\limits_0^\infty \left[\rho^2 x(t)^2 - C\rho(f(t)x'(t)^2 + g(t)x(t)^2) + M(x)^2\right] dt \geq 0$$

для всех $x \in \Delta(M)$ и всех $\rho \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Более того, в этом случае $K(f,g) = 4C^{-2}$, причем $K(f,g) \geq 4$. Отметим, что если $g(t) \geq 0$, но не равна тождественно нулю, то $K(f,g) = \infty$.

Неравенства типа (Д.5.1) рассматривались также в [104].

6. Несколько примеров неравенств вида (Д.5.1) приведены в [360, § 17] и [361, с. 13–14]. В частности, в [361] доказано неравенство

$$\left(\int\limits_0^\infty (x'(t)^2 + \mu x(t)^2)dt\right)^2 \leq K(\mu)\int\limits_0^\infty x(t)^2dt\int\limits_0^\infty [x''(t) - \mu x(t)]^2dt \qquad (Д.5.2)$$

для функций $x \in L_{2,2}(\mathbf{R}_+)$, где $K(\mu) = 4$, если $\mu \in (-\infty, 0]$ и $K(\mu) = \infty$, если $\mu > 0$ (по поводу неравенства (Д.5.2) см. также [119]).

Для функций $x \in L_2(a,\infty)$, $a > 0$, таких, что $(t^r x')' \in L_2(a,\infty)$ в [361] доказано также неравенство

$$\left(\int\limits_a^\infty t^r x'(t)^2dt\right)^2 \leq K(r)\int\limits_a^\infty x(t)^2dt\int\limits_a^\infty [(t^r x'(t))']^2dt,$$

где $K(r) = 4$, если $r \in (-\infty, 0]$, $K(r) = [\cos[(3-r)^{-1}\pi]]^{-2}$, если $r \in [0,1)$ и $K(r) = \infty$, если $r \geq 1$.

7. В [363] рассмотрены неравенства вида

$$A\|(fx')'\|^2_{L_2(a,b)} + B\|(fg)^{1/2}x'\|^2_{L_2(a,b)} + C\|gx\|^2_{L_2(a,b)} \leq$$

$$\leq D\|x\|^2_{L_2(a,b)} + \|M(x)\|^2_{L_2(a,b)},$$

где $M(x)$ — линейный дифференциальный оператор вида $M(x) = -(fx')' + gx$.

8. В [120] найдена точная константа $M_{r,k}$ в неравенстве (5.12.1) при $r = 4, k = 2$. А именно, доказано, что $M_{4,2} = 2k_1^{-1}$, где k_1 — меньший из двух положительных корней уравнения $k^4 - 2k^2 - 4k + 1 = 0$. Отметим, что $8,87 < M_{4,2} < 8,88$.

9. Во многих работах (см., например, [358]) рассматривались весовые аналоги неравенства (Д.5.1) вида

$$\left(\int_a^b (f(t)x'(t)^2 + g(t)x(t)^2)dt\right)^2 \leq$$

$$\leq K\int_a^b w(t)x(t)^2dt\int_a^b w(t)|w^{-1}M(x(t))|^2dt. \qquad (\text{Д}.5.3)$$

10. В [103] и [359] рассмотрен следующий вариант неравенства (Д.5.3) для комплекснозначных функций:

$$\left(\int_0^\infty (|x'(t)|^2 - t|x(t)|^2)dt\right)^2 \leq K\int_0^\infty |x(t)|^2dt\int_0^\infty |x''(t) + tx(t)|^2dt.$$

11. Пусть f, g — непрерывные на $[a, b]$ функции, причем f' также непрерывна на $[a, b]$. Пусть далее x, y — дважды непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции, такие, что $x(a) = x(b) = y(a) = y(b) = 0$. В [261] получено следующее неравенство:

$$\left(\int_a^b (f(t)x'(t)y'(t) + g(t)x(t)y(t))dt\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\left(\int_a^b x(t)^2dt\right)\left(\int_a^b M(x(t))^2dt\right)\right. \times$$

$$\times \left(\int_a^b y(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b M(y(t))^2 dt \right) \Bigg)^{1/2}, \qquad (Д.5.4)$$

где $M(x) = -(fx')' + gx$. В [261] доказан также дискретный аналог неравенства (Д.5.4). Частный случай неравенства (Д.5.4) рассмотрен ранее в [277].

12. Пусть G и K — непрерывные 2π-периодические функции. Будем говорить, что G обладает свойством B ($G \in B$), если для любого набора $0 \le y_1 < \ldots < y_m < 2\pi$ ($m \ge 1$) подпространство

$$X_m(G) := \left\{ b + \sum_{j=1}^m b_j G(\cdot - y_j) : b \in \mathbf{R},\ \sum_{j=1}^m b_j = 0 \right\}$$

имеет размерность m и является (при нечетном m) слабым пространством Хаара на $\mathbf{T}$. Напомним, что m-мерное пространство $\mathbf{Z}_m = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_m\}$ называется слабым пространством Хаара на $\mathbf{T}$, если $\det(u_i(t_j))_{i,j=1}^m$ не меняет знак (т.е. неотрицателен или неположителен) при любом выборе $0 \le t_1 < \ldots < t_m < 2\pi$.

Будем говорить также, что K — невырожденное, не увеличивающее осцилляцию ядро ($K \in NCVD$), если для любого набора $0 \le y_1 < \ldots < y_m < 2\pi$ ($m \ge 1$) подпространство $Y_m :=$ $:= \operatorname{span}\{K(\cdot - y_1), \ldots, K(\cdot - y_m)\}$ имеет размерность m и является слабым подпространством Хаара для нечетных m.

Понятия о $NCVD$-свойствах и B-свойстве рассмотрены в [280, с. 126–129]. Для заданного $p \in [1, \infty]$ положим $\tilde{K}_\rho(K) := \{K * h : \|h\|_p \le 1\}$, $\tilde{B}(G) := \{a + G * h : a \in \mathbf{R},\ h \perp 1,\ \|h\|_p \le 1$, где $(K * h)(t) = \int_0^{2\pi} K(t-u)h(u)du$, $\|h\|_p = \|h\|_{L_p(\mathbf{T})}$ и $h \perp 1$ означает, что $\int_0^{2\pi} h(t)dt = 0$.

Теорема 1 [304]. *Пусть G_1, $G_2 \in B$ и $G := G_1 * G_2 \in B$. Если для $x \in L_\infty(\mathbf{T})$, $\|x\|_\infty \le 1$, $x \perp 1$, $a \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство*

$$\|a + G * x\|_\infty \le \|G * \varphi_{0,n}\|_\infty,$$

то

$$\|G_2 * x\|_\infty \le \|G_2 * \varphi_{0,n}\|_\infty.$$

Теорема 2 [304]. *Пусть* G_1, G_2, $G_1 * G_2 \in B$ *и* $p \in [1, \infty)$. *Если для* $x \in L_p(\mathbf{T})$, $\|x\|_p \le 1$, $x \perp 1$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, *справедливо неравенство*

$$\|a + G * x\|_p \le \|G * \varphi_{0,n}\|_\infty,$$

то

$$\|G_2 * x\|_p \le \|G_2 * \varphi_{0,n}\|_\infty.$$

При $p = 1$ *последнее неравенство неулучшаемо.*

Аналогичные результаты для $K \in NCVD$ получены в [303].

В [305] сформулировано следующее предположение.

Предположение А. *Пусть* $G_1, G_2 \in B$ *и* $G = G_1 * G_2 \in B$. *Если для некоторой функции* $x \in L_2(\mathbf{T})$, *такой, что* $\|x\|_2 \le 1$, $x \perp 1$, *и чисел* $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ *справедливо неравенство*

$$\|a + G * x\|_2 \le |a_n^{(1)} a_n^{(2)}|,$$

то

$$\|G_2 * x\|_2 \le |a_n^{(2)}|,$$

где $a_n^{(j)} = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} G_j(t) e^{-int} dt \quad (j = 1, 2)$.

В случае, когда $G_2 = B_{r-k}$ и $G_1 = B_k$, справедливость предположения А вытекает из неравенства Харди–Литлвуда–Полиа (см. § 1.6).

Теперь пусть для $r \ge 2$ $P_r(\lambda) = \prod\limits_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)$, $\lambda_j \in \mathbf{R}$. Обобщенное ядро Бернулли, ассоциированное с дифференциальным оператором $P_r(D)$ $(D = d/dt)$, определяется соотношением

$$B^{(P_r)}(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i\nu t}}{P_r(i\nu)},$$

где $\sum'$ берется по всем $\nu \in \mathbf{Z}$, таким, что $P_r(i\nu) \neq 0$. Известно, что $B^{P_r} \in B$, если $P_r(0) = 0$, и $B^{(P_r)} \in NCVD$, если $P_r(0) \neq 0$. Чахкиев [334] предложил следующее определение.

Определение. *Будем говорить, что непрерывная 2π-периодическая функция $\psi(\cdot)$ принадлежит классу RA_c, если существует последовательность полиномов $\{P_{r_j}(\lambda)\}_{j=1}^m$, такая, что*

$$P_{r_j}(\lambda) = \prod_{s=1}^{r_j}(\lambda - \lambda_s^{(r_j)}), \quad \lambda_s^{(r_j)} \in \mathbf{R},$$

и

$$\lim_{j\to\infty} \|\psi(\cdot) - B^{(P_{r_j})}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbf{T})} = 0.$$

Легко видеть, что $\psi(\cdot) \in B$, если $\psi \perp 1$, и $\psi(\cdot) \in NCVD$ в противном случае. В [305] отмечено, что аналогично [337] может быть доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $r \geq 2$, $P_r(\lambda) = \prod\limits_{j=1}^{r}(\lambda - \lambda_j)$, $\lambda_j \in \mathbf{R}$. Пусть также $P_k(\lambda)$ — делитель полинома P_r степени k, $0 \leq \leq k \leq r$. Тогда для любой 2π-периодической функции x, такой, что $\|P_r(D)x\| < \infty$, справедливо неравенство*

$$\|P_k(D)x\|_2 \leq \|x\|_2 \phi_k \circ \phi_r^{-1}\left(\frac{\|P_r(Dx)\|_2}{\|x\|_2}\right),$$

где $\phi_k(t) = |P_k(it)|$, $1 \leq k \leq r$.

Из теоремы 3 легко следует такая теорема [305].

Теорема 4. *Пусть G_1,$G_2 \in RA_c$ и $G = G_1 * G_2$. Если $G \perp 1$, то $G \in B$, и если для $x \in L_2(\mathbf{T})$, $\|x\|_2 \leq 1$, $x \perp 1$, $a \in \mathbf{R}$,*

$$\|a + G * x\|_2 \leq |a_n^{(1)} a_n^{(2)}|,$$

то

$$\|G_2 * x\|_2 \leq |a_n^{(2)}|.$$

Теоремы 3 и 4 подтверждают предположение А. Однако класс $B \cup NCVD$ существенно шире класса RA_c.

13. В данном пункте представлено обобщение неравенства Шадрина (5.8.2) на случай произвольных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Пусть $\mathcal{P}$ и Q — алгебраические многочлены степени r и k ($k < r$) соответственно, вещественные на вещественной оси, и такие, что если $Q(in) \neq 0$ для некоторого $n \in \mathbf{Z}$, то и $\mathcal{P}(in) \neq 0$. Будем рассматривать дифференциальные операторы $\mathcal{P}(D)$, где $D = d/dt$.

Положим

$$\beta_{r,k} = \left(\frac{2r}{2k+1}\right)^{(2k+1)/(4r)} \left(\frac{2r}{2r-2k-1}\right)^{(2r-2k-1)/(4r)},$$

$$A_{p,Q}(t) = \left\{ \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z} \\ Q(in)\neq 0}} \frac{t^{2k+1}|Q(in)|^2}{1+t^{2r}|\mathcal{P}(in)|^2} \right\}^{1/2}, \quad A_{p,Q} = \sup_{t>0} A_{p,Q}(t).$$

Отметим, что при сделанных предположениях имеем $A_{p,Q} < \infty$.

Теорема 5 [290]. *Для любой функции* $x \in L_{2,2}(\mathbf{T})$

$$\|Q(D)x\|_\infty \leq (2\pi)^{-1}\beta_{r,k}A_{p,Q}\|x\|_2^{(r-k-1/2)/r}\|\mathcal{P}(D)x\|_2^{(k+1/2)/r}.$$

Глава

6

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

6.1. Теоремы сравнения перестановок производных

Теорема 6.1.1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$. *Если для функции* $x \in W^r_\infty(\mathbf{T})$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что*

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty, \tag{6.1.1}$$

то при любом $t > 0$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^t r(|x'|, u)du \le \lambda^{-(r-1)} \int\limits_0^t r(|\varphi_{r-1}|, u)du. \tag{6.1.2}$$

Доказательство. Так как перестановка функции инвариантна относительно сдвига аргумента и $x'(t)$ имеет нули, то, не ограничивая общности, можем считать, что $x'(0) = 0$.

Пусть

$$\delta(t) := \lambda^{-(r-1)} r(|\varphi_{r-1}|, t) - r(|x'|, t).$$

Для каждого $\xi \in (0, 2\pi]$, для которого $\delta(\xi) = 0$, положим

$$z := r(|x'|, \xi) = \lambda^{-(r-1)} r(|\varphi_{r-1}|, \xi).$$

Тогда

$$\int\limits_0^\xi r(|x'|, u)du = \int\limits_{E_z} |x'(u)|du,$$

где $E_z := \{t : |x'(t)| > z,\ t \in [0, 2\pi]\}$.

Для продолжения доказательства теоремы обозначим (t_k, τ_k) – составляющие интервалы открытого множества E_z. Оценку сверху числа этих интервалов дает следующая лемма.

Лемма 6.1.1. *Пусть точка $\xi \in (0, 2\pi]$ такая, что $\delta(\xi) = 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$\delta(t) < 0 \quad (t \in (\xi - \varepsilon, \xi)).$$

Тогда число составляющих интервалов множества E_z не превосходит 2λ.

Доказательство. Предположим противное, т.е. допустим, что существует $m > 2\lambda$ интервалов $(t_k, \tau_k) \subset E_z \subset (0, 2\pi)$, таких, что

$$\lambda^{-(r-1)} r(|\varphi_{r-1}|, \xi) = r(|x'|, \xi) = |x'(t_k)| = |x'(\tau_k)| \quad (k = 1, ..., m),$$

$$|x'(t)| > z \quad (t \in (t_k, \tau_k), \ \ k = 1, ..., m). \tag{6.1.3}$$

Выберем число $h > 0$ настолько малым, чтобы множество E_{z+h} состояло из интервалов $(t'_k, \tau'_k) \subset (t_k, \tau_k)$ и при этом выполнялось условие: если

$$r(|x'|, \xi - \gamma) = z + h,$$

то

$$\delta(t) < 0 \quad (t \in (\xi - \gamma, \xi)). \tag{6.1.4}$$

Тогда

$$|x'(t'_k)| = |x'(\tau'_k)| = z + h \quad (k = 1, 2, ..., m) \tag{6.1.5}$$

и вследствие (6.1.4), если

$$\lambda^{-(r-1)} r(\varphi_{r-1}, \xi - \gamma_0) = z + h, \tag{6.1.6}$$

то

$$\gamma < \gamma_0. \tag{6.1.7}$$

Кроме того,

$$\gamma = \sum_{k=1}^{m} \left(|t'_k - t_k| + |\tau'_k - \tau_k| \right).$$

Символами α_1 и α_2 обозначим такие точки из $[0, \pi/2]$, что $\lambda^{-(r-1)}\varphi_{r-1}(\alpha_1) = \varphi_{\lambda,r-1}(\alpha_1/\lambda) = z$ и $\lambda^{-(r-1)}\varphi_{r-1}(\alpha_2) = \varphi_{\lambda,r-1}(\alpha_2/\lambda) = z + h$. Тогда $4|\alpha_2 - \alpha_1| = \gamma_0$. Из неравенства (6.1.1) и следствия 2.2.1 из теоремы сравнения Колмогорова вытекает, что $\|x'\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-1}\|_\infty$, т.е. x' удовлетворяет условиям следствия 2.2.2 из теоремы сравнения Колмогорова. Применяя п. 2 этого следствия, приходим к выводу, что $|\alpha_2 - \alpha_1|/\lambda \le |t'_k - t_k|$ и $|\alpha_2 - \alpha_1|/\lambda \le |\tau'_k - \tau_k|$. Это позволяет согласно предположению $m > 2\lambda$ записать

$$\gamma = \sum_{k=1}^{m} \left(|t'_k - t_k| + |\tau'_k - \tau_k| \right) \ge 2m|\alpha_2 - \alpha_1|/\lambda = 2m\frac{\gamma_0}{4\lambda} >$$

$$> 4\lambda\frac{\gamma_0}{4\lambda} = \gamma_0, \tag{6.1.8}$$

что противоречит неравенству (6.1.7). Лемма доказана.

Продолжение доказательства теоремы. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Это означает, что

$$\min_t \int_0^t \delta(u)du = \int_0^\xi \delta(u)du < 0. \tag{6.1.9}$$

При этом точка ξ будет такой, что $\delta(\xi) = 0$, и для некоторого $\varepsilon > 0$ будет выполняться неравенство $\delta(t) < 0 \quad (t \in (\xi - \varepsilon, \xi))$, т.е. точка ξ будет удовлетворять условиям леммы 6.1.1. Согласно этой лемме, если $(a_i, b_i) \quad (i = 1, ..., n)$ – все составляющие интервалы множества $E_0 = \{t : |x'(t)| > 0, \ \ t \in (0, 2\pi)\}$, содержащие по крайней мере по одному из интервалов (t_k, τ_k), то

$$n \le m \le 2\lambda. \tag{6.1.10}$$

Как уже отмечалось, функция $x'(t)$ удовлетворяет условиям следствия 2.2.2. В силу п. 1 этого следствия имеем

$$\int\limits_{(a_i,b_i)\setminus E_z} |x'(t)|dt \geq \frac{1}{2}\int\limits_{L_z} |\varphi_{\lambda,r-1}(t)|dt,$$

где $L_z := \{t : |\varphi_{\lambda,r-1}(t)| < z,\ t \in (0, 2\pi/\lambda)\}$. Ясно, что

$$\int\limits_{L_z} |\varphi_{\lambda,r-1}(t)|dt = \lambda^{-r}\int\limits_{\xi}^{2\pi} |\varphi_{r-1}(t)|dt$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{(a_i,b_i)\setminus E_z} |x'(t)|dt \geq \frac{\lambda^{-r}}{2}\int\limits_{\xi}^{2\pi} |\varphi_{r-1}(t)|dt.$$

Кроме того, из неравенства (6.1.1) следует

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} |x'(t)|dt = |x(b_i) - x(a_i)| \leq 2\|x\|_\infty \leq 2\lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty =$$

$$= \frac{\lambda^{-r}}{2}\|\varphi_{r-1}\|_1 = \frac{\lambda^{-r}}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} r(|\varphi_{r-1}|, t)dt.$$

Поэтому

$$\int\limits_{0}^{\xi} r(|x'|, u)du = \int\limits_{E_z} |x'(t)|dt = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{t_k}^{\tau_k} |x'(t)|dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{a_i}^{b_i} |x'(t)|dt - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{(a_i,b_i)\setminus E_z} |x'(t)|dt \leq$$

$$\leq n\frac{\lambda^{-r}}{2}\int\limits_0^{2\pi} r(|\varphi_{r-1}|,t)dt - n\frac{\lambda^{-r}}{2}\int\limits_\xi^{2\pi} r(|\varphi_{r-1}|,t)dt =$$

$$= n\frac{\lambda^{-r}}{2}\int\limits_0^{\xi} r(|\varphi_{r-1}|,t)dt.$$

Отсюда согласно (6.1.10) имеем

$$\int\limits_0^{\xi} r(|x'|,u)du \leq \lambda^{-(r-1)}\int\limits_0^{\xi} r(|\varphi_{r-1}|,t)dt,$$

что противоречит неравенству (6.1.9). Теорема доказана.

Из теорем 6.1.1 и 10.2.4 вытекает такое следствие.

Следствие 6.1.1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r > 1$, *и для функции* $x \in W^r_\infty(\mathbf{T})$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что* $\|x\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$. *Тогда для всех* $q \in [1,\infty]$ *выполняется неравенство* $\|x'\|_q \leq \lambda^{-(r-1)}\|\varphi_{r-1}\|_q$.

Ниже представлен “несимметричный” аналог теоремы 6.1.1.

Напомним, что символом $W^r_{\infty;\alpha,\beta}(\mathbf{T})$ обозначается класс функций $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$, таких, что

$$\|x^{(r)}\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leq 1,$$

где

$$\|x\|_{\infty;\alpha,\beta} := \|\alpha x_+ + \beta x_-\|_\infty.$$

Теорема 6.1.2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$; $\alpha,\beta > 0$. *Если для функции* $x \in W^r_{\infty;\alpha,\beta}(\mathbf{T})$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что*

$$E_0(x)_\infty \leq E_0(\varphi_{\lambda,r}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty, \tag{6.1.11}$$

то при любом $t > 0$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^{t} r(x'_\pm,u)du \leq \lambda^{-(r-1)}\int\limits_0^{t} r(\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm,u)du. \tag{6.1.12}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 6.1.1, можем считать, что $x'(0) = 0$.

Пусть

$$\delta_\pm(t) := \lambda^{-(r-1)} r(\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm, t) - r(x'_\pm, t).$$

Для каждого $\xi_\pm \in (0, 2\pi]$, для которого $\delta(\xi_\pm) = 0$, положим

$$z_\pm := r(x'_\pm, \xi_\pm) = \lambda^{-(r-1)} r(\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm, \xi_\pm).$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\xi_\pm} r(x'_\pm, u)du = \int\limits_{E_z^\pm} x'_\pm(u)du,$$

где $E_z^\pm := \{t : x'_\pm(t) > z,\ t \in [0, 2\pi]\}$.

Для продолжения доказательства теоремы обозначим $(t_k^\pm, \tau_k^\pm)$ – составляющие интервалы множества $E_z^\pm$ и докажем следующую лемму.

Лемма 6.1.2. *Пусть точка $\xi_\pm \in (0, 2\pi]$ такая, что $\delta_\pm(\xi_\pm) = 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$\delta_\pm(t) < 0 \quad (t \in (\xi_\pm - \varepsilon, \xi_\pm)).$$

Тогда число составляющих интервалов множества $E_z^\pm$ не превосходит λ.

Доказательство. Предположим противное: существуют интервалы $(t_k^\pm, \tau_k^\pm) \subset E_z^\pm \subset (0, 2\pi),\ k = 1, ..., m_\pm$ (причем выполнено хотя бы одно из неравенств $m_\pm > \lambda$), такие, что

$$\lambda^{-(r-1)} r(\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm, \xi_\pm) = r(x', \xi) = x'_\pm(t_k^\pm) = x'_\pm(\tau_k^\pm)$$

$$(k = 1, ..., m_\pm),$$

$$x'_\pm(t) > z \quad (t \in (t_k^\pm, \tau_k^\pm),\ \ k = 1, ..., m), \tag{6.1.13}$$

при этом

$$x'_{\pm}(t_k^{\pm}) \geq 0, \quad x'_{\pm}(\tau_k^{\pm}) \leq 0.$$

Пусть, например, $m_+ > \lambda$.

Выберем число $h > 0$ настолько малым, чтобы множество E_{z+h}^+ состояло из интервалов $(t_{k,1}^+, \tau_{k,1}^+) \subset (t_k^+, \tau_k^+)$ и при этом выполнялось условие: если

$$r(x'_+, \xi_+ - \gamma) = z_+ + h,$$

то

$$\delta_+(t) < 0 \quad (t \in (\xi_+ - \gamma, \xi_+)). \tag{6.1.14}$$

Тогда

$$x'_+(t_{k,1}^+) = x'_+(\tau_{k,1}^+) = z_+ + h \quad (k = 1, 2, ..., m_+), \tag{6.1.15}$$

при этом

$$x'_+(t_{k,1}^+) \geq 0, \quad x'_+(\tau_{k,1}^+) \leq 0,$$

и вследствие (6.1.14), если

$$\lambda^{-(r-1)} r(\varphi_{r-1}(\cdot; \alpha, \beta)_+, \xi_+ - \gamma_0) = z_+ + h, \tag{6.1.16}$$

то

$$\gamma < \gamma_0. \tag{6.1.17}$$

Кроме того,

$$\gamma = \sum_{k=1}^{m_+} \left(|t_{k,1}^{\pm} - t_k^{\pm}| + |\tau_{k,1}^{\pm} - \tau_k^{\pm}| \right).$$

Пусть ν_1 и ν_2 – какие-либо два соседних нуля функции $\varphi_{r-1}(\cdot; \alpha, \beta)$ ($\nu_1 < \nu_2$), таких, что $\varphi_{r-1}(t; \alpha, \beta) > 0$ на (ν_1, ν_2). Символами a_i и b_i ($i = 1, 2$) обозначим такие точки из $[\nu_1, \nu_2]$, что

$$\lambda^{-(r-1)} \varphi_{r-1}(a_i; \alpha, \beta)_{\pm} = \varphi_{\lambda, r-1}(a_i/\lambda; \alpha, \beta)_{\pm} = z_{\pm}$$

и

$$\lambda^{-(r-1)} \varphi_{r-1}(b_i; \alpha, \beta)_{\pm} = \varphi_{\lambda, r-1}(b_i/\lambda; \alpha, \beta)_{\pm} = z_{\pm} + h,$$

причем

$$\mathrm{sgn}\varphi'_{r-1}(a_i;\alpha,\beta)=\mathrm{sgn}\varphi'_{r-1}(b_i;\alpha,\beta)=(-1)^{i+1}.$$

Тогда $|a_1-a_2|+|b_1-b_2|=\gamma_0$. Из условия (6.1.11) и следствия 2.8.1 из теоремы сравнения 2.8.1 вытекает, что $E_0(x')_\infty\le$ $\le E_0(\varphi_{\lambda,r-1}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty$, т. е. x' удовлетворяет условиям следствия 2.8.2 из этой теоремы. Применяя п. 2 этого следствия, приходим к выводу, что $|a_2-a_1|/\lambda\le|t^{\pm}_{k,1}-t^{\pm}_k|$ и $|b_2-b_1|/\lambda\le|\tau^{\pm}_{k,1}-\tau^{\pm}_k|$. Это позволяет согласно предположению $m_+>\lambda$ записать

$$\gamma=\sum_{k=1}^{m_+}\Big(|t^{\pm}_{k,1}-t^{\pm}_k|+|\tau^{\pm}_{k,1}-\tau^{\pm}_k|\Big)\ge$$

$$\ge m_+(|a_2-a_1|+|b_2-b_1|)/\lambda=m_+\frac{\gamma_0}{\lambda}>\lambda\frac{\gamma_0}{\lambda}=\gamma_0, \qquad (6.1.18)$$

что противоречит неравенству (6.1.17). Лемма доказана.

Продолжение доказательства теоремы. Предположим, что (6.1.12) неверно (например, для положительных частей функций). Это означает, что

$$\min_t\int_0^t\delta_+(u)du=\int_0^{\xi_+}\delta_+(u)du<0. \qquad (6.1.19)$$

При этом точка ξ_+ будет такой, что $\delta(\xi_+)=0$ и для некоторого $\varepsilon>0$ будет выполняться неравенство $\delta_+(t)<0\quad(t\in(\xi_+-\varepsilon,\xi_+))$, т.е. точка ξ_+ будет удовлетворять условиям леммы 6.1.2. Согласно этой лемме, если $(a_i,b_i)\quad(i=1,...,n)$ – все составляющие интервалы множества $E_0=\{t:x'_+(t)>0,\quad t\in(0,2\pi)\}$, содержащие по крайней мере по одному из интервалов (t^+_k,τ^+_k), то

$$n\le m\le\lambda. \qquad (6.1.20)$$

Как уже отмечалось, функция $x'(t)$ удовлетворяет условиям следствия 2.8.2. Согласно п. 1 этого следствия

$$\int\limits_{(a_i,b_i)\setminus E^+_z}x'_+(t)dt\ge\int\limits_{L^+_z}\varphi_{\lambda,r-1}(t;\alpha,\beta)_+dt,$$

где $L_z^+ := \{t : \varphi_{\lambda,r-1}(t;\alpha,\beta)_+ < z,\ t \in (0, 2\pi/\lambda)\}$. Ясно, что

$$\int\limits_{L_z^+} \varphi_{\lambda,r-1}(t;\alpha,\beta)_+ dt = \lambda^{-r} \int\limits_{\xi_+}^{2\pi} \varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+ dt$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{(a_i,b_i)\setminus E_z^+} x'_+(t)dt \geq \lambda^{-r} \int\limits_{\xi_+}^{2\pi} \varphi_{r-1}(t;\alpha,\beta)_+ dt.$$

Кроме того, из условия (6.1.11) следует

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} x'_+(t)dt \leq \int\limits_{a_i}^{b_i} |x'(t)|dt = |x(b_i) - x(a_i)| \leq 2E_0(x)_\infty \leq$$

$$\leq 2\lambda^{-r} E_0(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta))_\infty = \frac{\lambda^{-r}}{2} \|\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)\|_1 =$$

$$= \lambda^{-r} \int\limits_0^{2\pi} r(\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+, t)dt.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{\xi_+} r(x'_+, u)du = \int\limits_{E_z^+} x'_+(t)dt = \sum_{k=1}^{m_+} \int\limits_{t_k^+}^{\tau_k^+} x'_+(t)dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i}^{b_i} x'_+(t)dt - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(a_i,b_i)\setminus E_z^+} x'_+(t)dt \leq$$

$$\leq n\lambda^{-r} \int\limits_0^{2\pi} r(\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+, t)dt - n\lambda^{-r} \int\limits_{\xi_+}^{2\pi} r(\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+, t)dt =$$

$$= n\lambda^{-r} \int\limits_0^{\xi_+} r(\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+, t)dt.$$

Отсюда согласно (6.1.20) имеем

$$\int\limits_0^{\xi_+} r(x'_+, u)du \le \lambda^{-(r-1)} \int\limits_0^{\xi_+} r(\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_+, t)dt,$$

что противоречит неравенству (6.1.19). Теорема доказана.

Из теорем 6.1.2, 10.2.4 и 10.2.5 вытекает такое следствие.

Следствие 6.1.2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r > 1$, $\alpha, \beta > 0$, *и для функции* $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}(\mathbf{T})$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что* $E_0(x)_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}(\cdot;\alpha,\beta)\|_\infty$. *Тогда для всех* $q \in [1,\infty]$ *выполняются неравенства*

$$\|x'_\pm\|_q \le \lambda^{-(r-1)} \|\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\|_q$$

и

$$\|x'\|_q \le \lambda^{-(r-1)} \|\varphi_{r-1}(\cdot;\alpha,\beta)\|_q.$$

6.2. Неравенство Лигуна и его несимметричные аналоги

Теорема 6.2.1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, *и* $q \in [1,\infty)$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ *выполнено неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}. \tag{6.2.1}$$

Неравенство (6.2.1) *обращается в равенство для функций вида* $x(t) = a\varphi_r(nt + c)$, $a, c \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$. Учитывая однородность неравенства (6.2.1), можем считать, что

$$\left\|x^{(r)}\right\|_\infty = 1. \tag{6.2.2}$$

Тогда $x \in W^r_\infty(\mathbf{T})$. Выберем λ так, чтобы

$$\|x\|_\infty = \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty = \lambda^{-r}\left\|\varphi_r\right\|_\infty. \tag{6.2.3}$$

Если $k > 1$, то согласно следствию 2.2.1 из теоремы сравнения Колмогорова получим

$$\left\|x^{(k-1)}\right\|_\infty \le \left\|\varphi_{\lambda,r-k+1}\right\|_\infty. \tag{6.2.4}$$

Из (6.2.4) (в случае $k > 1$) или (6.2.3) (в случае $k = 1$) согласно следствию 6.1.1 имеем

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \lambda^{-(r-k)}\left\|\varphi_{r-k}\right\|_q \tag{6.2.5}$$

для всех $q \in [1,\infty]$. Комбинируя (6.2.5) и (6.2.3), получаем

$$\frac{\left\|x^{(k)}\right\|_q}{\|x\|_\infty^{1-k/r}} \le \frac{\lambda^{-(r-k)}\left\|\varphi_{r-k}\right\|_q}{\left(\lambda^{-r}\left\|\varphi_r\right\|_\infty\right)^{1-k/r}} = \frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_q}{\left(\left\|\varphi_r\right\|_\infty\right)^{1-k/r}}.$$

Отсюда из (6.2.2) следует (6.2.1).

Точность неравенства очевидна. Теорема доказана.

Ниже приведен несимметричный аналог неравенства (6.2.1).

Теорема 6.2.2. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $\alpha, \beta > 0$ и $q \in [1,\infty)$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ выполнено точное неравенство*

$$\left\|x^{(k)}_\pm\right\|_q \le \frac{\left\|\varphi_{r-k}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\right\|_q}{E_0\left(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\right)^{1-k/r}_\infty} E_0\left(x\right)^{1-k/r}_\infty \left\|x^{(r)}\right\|^{k/r}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}. \tag{6.2.6}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$. Учитывая однородность неравенства (6.2.6), можем считать, что

$$\left\|x^{(r)}\right\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1. \tag{6.2.7}$$

Тогда $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}(\mathbf{T})$. Выберем λ так, чтобы

$$E_0(x)_\infty = E_0\left(\varphi_{\lambda,r}(\cdot;\alpha,\beta)\right)_\infty = \lambda^{-r} E_0\left(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta)\right)_\infty. \tag{6.2.8}$$

Если $k > 1$, то согласно следствию 2.8.1 из теоремы сравнения 2.8.1

$$E_0\left(x^{(k-1)}\right)_\infty \le E_0\left(\varphi_{\lambda,r-k+1}\right)_\infty. \tag{6.2.9}$$

Из (6.2.9) (в случае $k > 1$) или (6.2.8) (в случае $k = 1$) согласно следствию 6.1.2 имеем

$$\left\|x_\pm^{(k)}\right\|_q \le \lambda^{-(r-k)} \left\|\varphi_{r-k}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\right\|_q \tag{6.2.10}$$

для всех $q \in [1,\infty]$. Комбинируя (6.2.10) и (6.2.8), получаем

$$\frac{\left\|x_\pm^{(k)}\right\|_q}{E_0\left(x\right)_\infty^{1-k/r}} \le \frac{\lambda^{-(r-k)} \left\|\varphi_{r-k}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\right\|_q}{\left(\lambda^{-r} E_0\left(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta)\right)_\infty\right)^{1-k/r}} =$$

$$= \frac{\left\|\varphi_{r-k}(\cdot;\alpha,\beta)_\pm\right\|_q}{\left(E_0\left(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta)\right)_\infty\right)^{1-k/r}}.$$

Отсюда из (6.2.7) следует (6.2.6).

Точность неравенства (6.2.6) очевидна. Теорема доказана.

6.3. Неравенство Лигуна, учитывающее число перемен знака производных

Пусть $l(f)$ – число локальных максимумов функции $f \in C_{2\pi}$ на периоде. При этом отрезок $[\alpha,\beta]$, на котором функция достигает локального максимума, считаем за один локальный максимум.

Лемма 6.3.1. *Для любой функции $f \in C_{2\pi}$, для которой $l(f)$ конечно, найдется разложение функции $|f(t)|$ в сумму не более чем $l(|f|)$ простых функций* (*см.* § 10.3).

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $f(0) = 0$ и $f(t) \ge 0$, $0 \le t \le 2\pi$. В случае $l(f) = 1$ достаточно положить $f_1(t) = f(t)$, $t \in (0, 2\pi)$.

Предположим, что $n > 1$ и утверждение леммы верно при $l(f) \leq n-1$, а функция f такая, что $l(f) = n$. Обозначим α – тот из локальных минимумов функции $f(t)$ (если он не один, то берем любой из них), в котором функция $f(t)$ принимает наибольшее значение, а (β, γ) – любой из составляющих интервалов множества

$$E = \{t: \ t \in (0, 2\pi), \ \ f(t) > f(\alpha)\},$$

и положим $f_1(t) = f(t) - f(\alpha)$, если $t \in (\beta, \gamma)$, $f_1(t) = 0$, если $t \notin (\beta, \gamma)$, и $g(t) := f(t) - f_1(t)$. Тогда $l(g) \leq n-1$ и, следовательно, по предположению индукции, найдутся простые функции $\{f_k(t)\}_{k=2}^{n_1}$ $(n_1 \leq n)$, такие, что $f_k'(t) = g'(t) = f'(t)$ всюду, где $f_k'(t)$ существует, отлична от нуля и

$$g(t) = \sum_{k=2}^{n_1} f_k(t).$$

Но тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n_1} f_k(t)$$

и лемма доказана.

Лемма 6.3.2. *Пусть разложение функции $|f(t)|$ в сумму простых функций состоит из m простых функций. Тогда*

$$\int_0^t R(f,u)du \leq \int_0^{mt} r(f,u)du, \ \ t \in [0, \infty),$$

где $R(f,u)$ – Σ-перестановка функции f (см. § 10.3).

Доказательство. Пусть

$$|f(t)| = \sum_{k=1}^{m} f_k(t) + d, \ \ d = \min\{|f(t)| : t \in \mathbf{R}\},$$

есть разложение функции $|f(t)|$ в сумму простых функций. Тогда для любого $t > 0$ найдутся интервалы (η_k, θ_k), $k = 1, 2, \ldots$, такие, что $\theta_k - \eta_k = t$ и

$$\int_0^t r(f_k, u)du = \int_{\eta_k}^{\theta_k} f_k(u)du.$$

Поэтому

$$\int_0^t R(f, u)du = td + \sum_{k=1}^m \int_0^t r(f_k, u)du = td + \sum_{k=1}^m \int_{\eta_k}^{\theta_k} f_k(u)du =$$

$$= \int_{E_t} \{d + \sum_{k=1}^m f_k(u)\}du = \int_{E_t} f(u)du,$$

где

$$E_t = \bigcup_{k=1}^m (\eta_k, \theta_k).$$

Отсюда и из теоремы 10.2.2 окончательно получаем

$$\int_0^t R(f, u)du \le \int_0^{\operatorname{mes} E_t} r(f, u)du \le \int_0^{mt} r(f, u)du.$$

Из лемм 6.3.1 и 6.3.2 получаем такое следствие.

Следствие 6.3.1. *Для любой функции $f \in C(\mathbf{T})$*

$$\int_0^t R(f, u)du \le \int_0^{t\nu(f')} r(f, u)du, \quad t \in [0, \infty),$$

где $\nu(g)$ – число перемен знака функции $g \in C(\mathbf{T})$ на периоде.

Теорема 6.3.1. *Пусть* $r, k \in \mathbf{N},\ k < r;\ p \in [1, \infty]$. *Тогда для любой функции* $x \in L_1^r(\mathbf{T})$ *выполняется точное на* $L_1^r(\mathbf{T})$ *неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|g_{r-k}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_1^{1-\alpha}, \qquad (6.3.1)$$

где $\alpha = \dfrac{r-k}{r-1+1/p}$, *а для любой функции* $x \in L_V^r(\mathbf{T})$ *справедливо точное на* $L_V^r(\mathbf{T})$ *неравенство*

$$\bigvee_0^{2\pi}\left(x^{(k)}\right) \le \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} \left(4\|x\|_p\right)^\alpha \left[\bigvee_0^{2\pi}\left(x^{(r)}\right)\right]^{1-\alpha}, \qquad (6.3.2)$$

где $\alpha = \dfrac{r-k}{r+1/p}$.

Доказательство. Докажем сначала неравенство (6.3.2). Фиксируем $x \in L_V^r(\mathbf{T})$ и положим

$$y(t) := \frac{x(t)}{\bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})}.$$

Выберем число $a > 0$, удовлетворяющее условию

$$R(y, 0) = R_{a,r}(0).$$

Тогда в силу теоремы 10.3.1 сравнения Σ-перестановок будет

$$R(y, t) \ge R_{a,r}(t), \quad t \ge 0.$$

Следовательно, применяя лемму 6.3.2 и учитывая равенство $\nu(y') = \nu(x')$, имеем

$$\int_0^t r(y,u)du \ge \int_0^{t/\nu(x')} R(y,u)du \ge \int_0^{t/\nu(x')} R_{a,r}(u)du =$$

$$= \frac{1}{\nu(x')} \int_0^t R_{a,r}\left(\frac{u}{\nu(x')}\right) du.$$

Отсюда согласно теореме 10.2.4 получаем

$$\|y\|_p = \|r(y,\cdot)\|_{L_p[0,\infty)} \geq \frac{1}{\nu(x')} \left\|R_{a,r}\left(\cdot/\nu(x')\right)\right\|_{L_p[0,\infty)}. \quad (6.3.3)$$

Учитывая далее, что согласно (10.3.2)

$$R_{a,r}(t) = \theta^r R_{a/\theta,r}(t/\theta), \quad (6.3.4)$$

и в силу (10.3.3)

$$R_{\pi,r}(t) = \frac{1}{4}R(\varphi_r,t) = \frac{1}{2}r(\overline{\varphi}_r,t), \quad (6.3.5)$$

где $\overline{\varphi}_r$ – сужение φ_r на $[0,\pi]$, находим

$$R_{a,r}\left(\frac{t}{\nu(x')}\right) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^r R_{\pi,r}\left(\frac{\pi t}{a\nu(x')}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^r r\left(\overline{\varphi}_r, \frac{\pi t}{a\nu(x')}\right).$$

Поэтому из (6.3.3) (с учетом равенства $\|\overline{\varphi}_r\|_p = 2^{-1/p}\|\varphi_r\|_p$) выводим

$$\|y\|_p \geq \frac{1}{\nu(x')}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^r \left\|r\left(\overline{\varphi}_r, \frac{\pi(\cdot)}{a\nu(x')}\right)\right\|_{L_p[0,\infty)} =$$

$$= \frac{1}{2\nu(x')}\left(\frac{a}{\pi}\right)^r \left\{\int\limits_0^\infty r^p\left(\overline{\varphi}_r, \frac{\pi t}{a\nu(x')}\right)dt\right\}^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{2\nu(x')}\left(\frac{a}{\pi}\right)^r \left\{\int\limits_0^\infty r^p\left(\overline{\varphi}_r, t\right)dt\right\}^{1/p} \left(\frac{a\nu(x')}{\pi}\right)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{r+1/p}\left[\nu(x')\right]^{1/p-1}\|\overline{\varphi}_r\|_p =$$

$$= \frac{[\nu(x')]^{1-1/p}}{2^{1+1/p}}\left(\frac{a\nu(x')}{\pi}\right)^{r+1/p}\|\varphi_r\|_p,$$

или

$$\frac{a}{\pi} \leq \left[2^{1+1/p}\left[\nu(x')\right]^{1-1/p}\frac{\|y\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right]^{\frac{1}{r+1/p}}. \quad (6.3.6)$$

Снова применяя (6.3.4) и (6.3.5), имеем

$$R_{a,r}(0) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^r R_{\pi,r}(0) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^r \frac{1}{2} r(\overline{\varphi}_r, 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^r \|\varphi_r\|_\infty.$$

Учитывая, что согласно свойству 3) Σ-перестановок (см. § 10.3) и выбору числа a выполнены соотношения

$$\bigvee_0^{2\pi}(y) \le 2R(y,0) = 2R_{a,r}(0),$$

и применяя (6.3.6), получаем

$$\frac{\bigvee_0^{2\pi}(y)}{\|\varphi_r\|_\infty} \le \left(\frac{a}{\pi}\right)^r = \left[2^{1+1/p}\left[\nu(x')\right]^{1-1/p}\frac{\|y\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right]^{\frac{r}{r+1/p}}.$$

Отсюда, применяя неравенство Стейна (2.6.12), записанное в форме

$$\bigvee_0^{2\pi}\left(y^{(k)}\right) \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{\bigvee_0^{2\pi}(y)}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{1-k/r} \left(\bigvee_0^{2\pi}\left(y^{(r)}\right)\right)^{k/r},$$

выводим

$$\frac{\bigvee_0^{2\pi}(y^{(k)})}{\|\varphi_{r-k}\|_\infty} \le \left[2^{1+1/p}\left[\nu(x')\right]^{1-1/p}\frac{\|y\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right]^{\frac{r-k}{r+1/p}},$$

что равносильно (6.3.2).

Точность неравенства (6.3.2) следует из того, что оно обращается в равенство для $x(t) = \varphi_r(nt+b),\ a, b \in \mathbf{R}.\ n \in \mathbf{N}$.

Докажем теперь (6.3.1). Фиксируем $x \in L_1^r(\mathbf{T})$. Ясно, что $x \in$ $\in L_V^{r-1}(\mathbf{T})$. Применяя (6.3.2), имеем

$$\bigvee_0^{2\pi}\left(x^{(k-1)}\right) \le$$

$$\leq \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_{r-1}\|_p^\alpha} \left(4\|x\|_p\right)^\alpha \left[\bigvee_0^{2\pi}\left(x^{(r-1)}\right)\right]^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r-k}{r-1+1/p}$. Отсюда следует (6.3.1), если учесть, что

$$\|\varphi_{r-k}\|_\infty = \frac{1}{4}\bigvee_0^{2\pi}(\varphi_{r-k}) = \bigvee_0^{2\pi}(g_{r-k+1}) = \|g_{r-k}\|_1 .$$

Точность (6.3.1) можно проверить при помощи семейства функций Стеклова $(g_r)_h$, полагая $h \to 0$. Теорема доказана.

6.4. Неравенства для функций с существенно ограниченной старшей производной

Теорема 6.4.1. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, и $p \in [1, \infty)$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}} . \tag{6.4.1}$$

Неравенство (6.4.1) *обращается в равенство для функций $x(t) = a\varphi_r(t+c)$, $a, c \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$. Без ограничения общности можем считать, что x меняет знак на периоде. Учитывая однородность неравенства (6.4.1), можем считать также, что

$$\left\|x^{(r)}\right\|_\infty = 1. \tag{6.4.2}$$

Пусть λ удовлетворяет условию

$$\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty = \lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty = E_0(x)_\infty . \tag{6.4.3}$$

Такое λ должно быть не меньше 1, так как $E_0(x)_\infty \leq \|\varphi_r\|_\infty$. Это следует из неравенства Бора–Фавара (см., например, [214, гл. 6]).

Используя теорему сравнения Колмогорова 2.2.1 и (6.4.3), получаем неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le \lambda^{-r+k}\left\|\varphi_{r-k}\right\|_\infty . \tag{6.4.4}$$

Докажем неравенство

$$\|x\|_p \ge \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{L_p[0,\frac{2\pi}{\lambda}]} . \tag{6.4.5}$$

Обозначим $c(x)$ – константу наилучшего равномерного приближения функции x, и для $\tau \in \mathbf{R}$ положим $\Psi_\tau(t) := \varphi_{\lambda,r}(t+\tau)+c(x)$. В силу (6.4.3) для произвольного $\tau \in \mathbf{R}$ имеем

$$\left\|(\Psi_\tau)_+\right\|_\infty = \|x_+\|_\infty , \quad \left\|(\Psi_\tau)_-\right\|_\infty = \|x_-\|_\infty . \tag{6.4.6}$$

Из (6.4.2) и (6.4.6) следует, что функции x и Ψ_τ удовлетворяют условиям теоремы сравнения Колмогорова для произвольного τ.

Пусть точки $t_1, t_2 \in [-\pi,\pi)$, такие, что $\max\limits_t x(t) = x(t_1)$, $\min\limits_t x(t) = x(t_2)$. Выберем точки τ_1, τ_2 так, что $\Psi_{\tau_1}(t_1) = x(t_1)$, $\Psi_{\tau_1}(t_2) = x(t_2)$. Обозначим ξ_i, η_i, $\xi_i < \eta_i$, $i = 1,2$, – точки из $[t_i - \pi/\lambda, t_i + \pi/\lambda]$, такие, что $\Psi_{\tau_i}(\xi_i) = \Psi_{\tau_i}(\eta_i) = 0$. Ясно, что $\eta_1 - \xi_1 + \eta_2 - \xi_2 = 2\pi/\lambda$.

Из теоремы сравнения Колмогорова вытекает, что $x(t) \ge \Psi_{\tau_1}(t)$, если $|t - t_1| \le \pi/\lambda$ и $x(t) \le \Psi_{\tau_2}(t)$, если $|t - t_2| \le \pi/\lambda$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi} |x(t)|^p dt \ge \int\limits_{\xi_1}^{\eta_1} |x(t)|^p dt + \int\limits_{\xi_2}^{\eta_2} |x(t)|^p dt \ge$$

$$\ge \int\limits_{\xi_1}^{\eta_1} |\Psi_{\tau_1}(t)|^p dt + \int\limits_{\xi_2}^{\eta_2} |\Psi_{\tau_2}(t)|^p dt = \int\limits_0^{2\pi/\lambda} |\Psi_{\tau_1}(t)|^p dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi/\lambda} |\varphi_{\lambda,r}(t) + c(x)|^p dt \ge \int\limits_0^{2\pi/\lambda} |\varphi_{\lambda,r}(t)|^p dt$$

(последнее неравенство справедливо, так как ноль является константой наилучшего приближения функции $\varphi_{\lambda,r}$ в $L_p[0, 2\pi/\lambda]$). Таким образом, неравенство (6.4.5) доказано.

Учитывая определение $\varphi_{\lambda,r}$, имеем

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|^p_{L_p[0,\frac{2\pi}{\lambda}]} = \int\limits_0^{2\pi/\lambda} |\varphi_{\lambda,r}(t)|^p dt = \lambda^{-rp} \int\limits_0^{2\pi/\lambda} |\varphi_r(\lambda t)|^p dt =$$

$$= \lambda^{-rp-1} \int\limits_0^{2\pi} |\varphi_r(t)|^p dt,$$

и поэтому

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,\frac{2\pi}{\lambda}]} = \lambda^{-r-1/p} \|\varphi_r\|_p . \tag{6.4.7}$$

Вследствие (6.4.4), (6.4.5) и (6.4.7) имеем

$$\frac{\left\|x^{(k)}\right\|_\infty}{\|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \le \frac{\lambda^{-r+k} \|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\left(\lambda^{-r-1/p} \|\varphi_r\|_p\right)^{\frac{r-k}{r+1/p}}} = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}}.$$

Неравенство (6.4.1) доказано. Точность (6.4.1) очевидна. Теорема доказана.

Теорема 6.4.1 может быть обобщена следующим образом.

Теорема 6.4.2. *Для произвольной функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$, произвольных $\alpha, \beta > 0$, $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$ и $p \in [1, \infty]$ выполняется неравенство*

$$\|x^{(k)}_\pm\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \|x^{(r)}\|^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}. \tag{6.4.8}$$

В частности,

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)\|_\infty}{E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \|x^{(r)}\|^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \tag{6.4.9}$$

и

$$E_0(x^{(k)})_\infty \le \frac{E_0(\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_\infty}{E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \|x^{(r)}\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}. \tag{6.4.10}$$

Если разность $r-k$ нечетная, то

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \frac{E_0(\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_\infty}{E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \|x^{(r)}\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}. \tag{6.4.11}$$

Доказательство. Пусть $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$. Как и при доказательстве теоремы 6.4.1, без ограничения общности можем считать, что функция x имеет перемену знака. Учитывая однородность (6.4.8), считаем также, что

$$\left\|x^{(r)}\right\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1. \tag{6.4.12}$$

Пусть $\lambda > 0$ удовлетворяет условию $E_0(\varphi_{\lambda,r}(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_\infty = E_0(x)_\infty$. Использовав теорему сравнения 2.8.1 вместо теоремы сравнения Колмогорова 2.2.1, как и при доказательстве теоремы 6.4.1, получим неравенства

$$\|x_\pm^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty \tag{6.4.13}$$

и

$$\|x\|_p \ge \|\varphi_{\lambda,r}(\,\cdot\,;\alpha,\beta) + c_1\|_{L_p([0,2\pi/\lambda])}, \tag{6.4.14}$$

где c_1 удовлетворяет условиям

$$\max_t x(t) = \max_t \varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta) + c_1$$

и

$$\min_t x(t) = \min_t \varphi_{\lambda,r}(\,t;\alpha,\beta) + c_1.$$

Пусть $c(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta))$ является константой наилучшего приближения функции $\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta)$ в L_p-метрике. Используя неравенства (6.4.13) и (6.4.14), получаем

$$\frac{\|x_\pm^{(k)}\|_\infty}{\|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,r}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm - c_1\|_{L_p([0,2\pi/\lambda])}^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \le$$

$$\le \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{E_0(\varphi_{\lambda,r}(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_{L_p([0,2\pi/\lambda])}^{\frac{r-k}{r+1/p}}} =$$

$$= \frac{\lambda^{-(r-k)}\|\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{\left(\int\limits_0^{2\pi/\lambda} |\lambda^{-r}\left(\varphi_r(\lambda t;\alpha,\beta) - c(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta))\right)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}\frac{r-k}{r+1/p}}} =$$

$$= \frac{\lambda^{-(r-k)}\|\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{\left(\lambda^{-r-\frac{1}{p}} E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p\right)^{\frac{r-k}{r+1/p}}} = \frac{\|\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty}{E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}}.$$

Ввиду (6.4.12) неравенство (6.4.8) доказано. Неравенства (6.4.9)–(6.4.11) сразу следуют из (6.4.8). При этом необходимо учесть, что функция $\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)$ нечетная, когда $r-k$ нечетно. Теорема доказана.

Используя теорему 6.4.2, получаем следующий усиленный вариант теоремы 6.4.1.

Теорема 6.4.3. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, и $p \in [1,\infty)$. Тогда для функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$*

$$E_0\left(x^{(k)}\right)_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} E_0\left(x^{(r)}\right)_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}. \qquad (6.4.15)$$

Если $r-k$ четно, то

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} E_0\left(x^{(r)}\right)_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}. \qquad (6.4.16)$$

Неравенства (6.4.15) *и* (6.4.16) *становятся равенствами для функций* $x(t) = a\varphi_r(t+b), \quad a, b \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Учитывая однородность (6.4.15), считаем, что

$$E_0\left(x^{(r)}\right)_\infty = 1. \tag{6.4.17}$$

Для функции x, которая удовлетворяет этому условию, существуют числа $\alpha, \beta > 0$, такие, что $\alpha+\beta = 2$ и $\|x^{(r)}\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1$. Поэтому, используя неравенство (6.4.10), имеем

$$E_0(x^{(k)})_\infty \le \frac{E_0\left(\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\right)_\infty}{E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}. \tag{6.4.18}$$

Докажем, что

$$\frac{E_0(\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_\infty}{E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}}. \tag{6.4.19}$$

Используя неравенство Лигуна (6.3.2), получаем

$$E_0(\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_\infty = \frac{1}{4}\bigvee_0^{2\pi}(\varphi_{r-k}(\,\cdot\,;\alpha,\beta)) \le$$

$$\le \frac{1}{4}\frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}}\left(4E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p\right)^{\frac{r-k}{r+1/p}} 4^{\frac{k+1/p}{r+1/p}} =$$

$$= \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} E_0(\varphi_r(\,\cdot\,;\alpha,\beta))_p^{\frac{r-k}{r+1/p}},$$

и неравенство (6.4.19) доказано.

Сравнивая неравенства (6.4.18) и (6.4.19), получаем

$$E_0(x^{(k)})_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}.$$

Неравенство (6.4.15) доказано.

Используя неравенство (6.4.11) вместо неравенства (6.4.10), аналогично доказываем (6.4.16). Теорема доказана.

6.5. Неравенства для функций с интегрируемой старшей производной

С помощью теоремы 6.4.3 устанавливаются следующие неравенства.

Теорема 6.5.1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, *и* $p \in [1, \infty]$. *Тогда для произвольной функции* $x \in L_1^r(\mathbf{T})$

$$E_0\left(x^{(k)}\right)_\infty \le \frac{\|g_{r-k}\|_\infty}{\|g_r\|_p^{\frac{r-k-1}{r-1+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k-1}{r-1+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_1^{\frac{k+1/p}{r-1+1/p}}. \qquad (6.5.1)$$

Если $r - k$ *четно, то*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\|g_{r-k}\|_\infty}{\|g_r\|_p^{\frac{r-k-1}{r-1+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k-1}{r-1+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_1^{\frac{k+1/p}{r-1+1/p}}. \qquad (6.5.2)$$

Постоянные $\|g_{r-k}\|_\infty / \|g_r\|_p^{\frac{r-k-1}{r-1+1/p}}$ *в неравенствах* (6.5.1) *и* (6.5.2) *неулучшаемы.*

Доказательство. Применяя неравенство (6.4.15), имеем

$$E_0\left(x^{(k)}\right)_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k-1}\|_\infty}{\|\varphi_{r-1}\|_p^{\frac{r-k-1}{r-1+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k-1}{r-1+1/p}} E_0\left(x^{(r-1)}\right)_\infty^{\frac{k+1/p}{r-1+1/p}}.$$

Скомбинировав это неравенство с очевидным неравенством

$$E_0\left(x^{(r-1)}\right)_\infty \le \frac{1}{4}\left\|x^{(r)}\right\|_1, \quad x \in L_1^1(\mathbf{T}),$$

получим (6.5.1). Аналогично доказывается (6.5.2) с использованием неравенства (6.4.16) вместо неравенства (6.4.15).

Точность неравенств (6.5.1) и (6.5.2) проверяется с помощью семейства функций $F_h(u) = (2h)^{-1} \int\limits_{u-h}^{u+h} g_r(t)dt$ при $h \to 0$.

Теорема 6.5.2. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $r/2 < k < r$, *и* $p \in [1, \infty]$. *Тогда для произвольной функции* $x \in L_1^r(\mathbf{T})$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le \frac{\|g_{r-k}\|_2}{\|g_r\|_p^{\frac{r-k-1/2}{r-1+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r-k-1/2}{r-1+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_1^{\frac{k-1/2+1/p}{r-1+1/p}}. \qquad (6.5.3)$$

Постоянная $\|g_{r-k}\|_2 / \|g_r\|_p^{\frac{r-k-1/2}{r-1+1/p}}$ *в неравенстве* (6.5.3) *неулучшаема.*

Доказательство. Обозначим $c = c(x^{(2k-r)})$ – константу наилучшего равномерного приближения функции $x^{(2k-r)}$. Интегрируя по частям, имеем

$$\|x^{(k)}\|_2^2 = \int\limits_0^{2\pi} x^{(k)}(t)x^{(k)}(t)dt = \left|\int\limits_0^{2\pi} x^{(r)}(t)\left[x^{(2k-r)}(t) - c\right]dt\right| \le$$

$$\le \|x^{(r)}\|_1 E_0\left(x^{(2k-r)}\right)_\infty.$$

Оценивая $E_0\left(x^{(2k-r)}\right)_\infty$ с помощью неравенства (6.5.1), получаем

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 \le \left\|x^{(r)}\right\|_1 \frac{\left\|g_{2(r-k)}\right\|_\infty}{\|g_r\|_p^{\frac{2(r-k)-1}{r-1+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{2(r-k)-1}{r-1+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_1^{\frac{2k-r+1/p}{r-1+1/p}}. \qquad (6.5.4)$$

Отметим, что

$$\left\|g_{2(r-k)}\right\|_\infty = \|g_{r-k}\|_2^2. \qquad (6.5.5)$$

Действительно, для произвольного $l \in \mathbf{N}$ имеем

$$\|g_{2l}\|_\infty = \frac{1}{4}\|\varphi_{2l-1}\|_\infty = \frac{1}{16}\bigvee_0^{2\pi}(\varphi_{2l-1}) = \frac{1}{16}\|\varphi_{2l-2}\|_1 =$$

$$= \frac{1}{16}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_{2l-2}(t)\mathrm{sgn}\varphi_{2l-2}(t)dt = \frac{1}{16}\left|\int\limits_0^{2\pi} \varphi_{2l-2}(t)\varphi_0(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4}\varphi_{l-1}(t)\frac{1}{4}\varphi_{l-1}(t)dt\right| = \int\limits_0^{2\pi} |g_l(t)|^2 dt. \qquad (6.5.6)$$

Неравенство (6.5.3) следует из (6.5.4) и (6.5.5).

Точность неравенств (6.5.3) проверяется так же, как и в теореме 6.5.1. Теорема доказана.

6.6. Еще одно неравенство для функций с интегрируемой старшей производной

Теорема 6.6.1. *Пусть $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$. Тогда для любой функции $x \in L_1^r$ выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le \frac{\|g_{r-k}\|_2}{\|g_r\|_2^{\frac{r-k-1/2}{r-1/2}}} \|x\|_2^{\frac{r-k-1/2}{r-1/2}} \left\|x^{(r)}\right\|_1^{\frac{k}{r-1/2}}. \qquad (6.6.1)$$

Константа $\|g_{r-k}\|_2 / \|g_r\|_2^{(r-k-1/2)/(r-1/2)}$ в неравенстве (6.6.1) *неулучшаема.*

Доказательство. Для $f \in L_\infty^{2r-1}$ в силу неравенства Колмогорова (2.3.1) имеем

$$\left\|f^{(2k)}\right\|_\infty \le C_{2r-1,2k} \|f\|_\infty^{1-\frac{2k}{2r-1}} \left\|f^{(2r-1)}\right\|_\infty^{\frac{2k}{2r-1}}, \qquad (6.6.2)$$

где $C_{r,k} = \|\varphi_{r-k}\|_\infty / \|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}$. Пусть для $x \in L_1^r$

$$f(t) = (x * x)(t) = \int\limits_0^{2\pi} x(u+t)x(u)du.$$

Ясно, что для $f \in L_\infty^{2r-1}$, $\quad f^{(2k)}(t) = \left(x^{(k)} * x^{(k)}\right)(t)$,

$$f^{(2r-1)}(t) = \left(x^{(r-1)} * x^{(r)}\right)(t) = \left(\left(x^{(r-1)} - c\right) * x^{(r)}\right)(t),$$

где c – произвольная константа. Кроме того,

$$\|f\|_\infty = f(0) = \|x\|_2^2, \quad \left\|f^{(2k)}\right\|_\infty = f^{2k}(0) = \left\|x^{(k)}\right\|_2^2.$$

Поэтому, подставляя $f = x*x$ в (6.6.2), для функций $x \in L_1^r$ получаем неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 \le C_{2r-1,2k} \|x\|_2^{2\left(1-\frac{2k}{2r-1}\right)} \left\|\left(x^{(r-1)} - c\right) * x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{2k}{2r-1}}. \tag{6.6.3}$$

Пусть $c = c_\infty\left(x^{(r-1)}\right) := \dfrac{1}{2}\left(\max\limits_t x^{(r-1)}(t) + \min\limits_t x^{(r-1)}(t)\right)$ – константа наилучшего равномерного приближения функции $x^{(r-1)}$. Так как

$$\left\|x^{(r-1)} - c_\infty\left(x^{(r-1)}\right)\right\|_\infty \le \frac{1}{4} \bigvee_0^{2\pi}\left(x^{(r-1)}\right) = \frac{1}{4}\left\|x^{(r)}\right\|_1,$$

то

$$\left\|\left(x^{(r-1)} - c_\infty\left(x^{(r-1)}\right)\right) * x^{(r)}\right\|_\infty \le$$

$$\le \left\|x^{(r-1)} - c_\infty\left(x^{(r-1)}\right)\right\|_\infty \left\|x^{(r)}\right\|_1 \le \frac{1}{4}\left\|x^{(r)}\right\|_1^2,$$

и, используя (6.6.3), получаем неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2^2 \le C_{2r-1,2k} \|x\|_2^{2\left(1-\frac{2k}{2r-1}\right)} \left(\frac{1}{4}\left\|x^{(r)}\right\|_1\right)^{\frac{2k}{2r-1}}. \tag{6.6.4}$$

Поскольку (см. (6.5.6))

$$\|g_l\|_2^2 = \frac{1}{4}\|\varphi_{2l-1}\|_\infty,$$

то нетрудно видеть, что

$$4^{-\frac{2k}{2r-1}} C_{2r-1,2k} = \left(\frac{\|g_{r-k}\|_2}{\|g_r\|_2^{\frac{r-k-1/2}{r-1/2}}} \right)^2 .$$

Таким образом, из (6.6.4) следует неравенство (6.6.1). Точность неравенства (6.6.1) проверяется с помощью семейства функций

$$F_h(t) = (2h)^{-1} \int\limits_{t-h}^{t+h} g_r(u)du$$

при $h \to 0$.

Замечание. На наш взгляд, неравенства типа (6.6.3) могут представлять самостоятельный интерес.

6.7. Дальнейшие результаты о сравнении перестановок

Символом $r((\varphi_{\lambda,r}+c)_\pm, t)$ будем обозначать перестановку сужения $(\varphi_{\lambda,r}+c)_\pm$ на $[0, \pi/\lambda]$.

Теорема 6.7.1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$. Если для функции $x \in W^r_\infty$, имеющей нули, числа $\lambda > 0$ и $c \in \mathbf{R}$ выбраны так, что*

$$\|x_\pm\|_\infty \le \| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_\pm \|_\infty, \tag{6.7.1}$$

то каждая из разностей

$$\Delta_\pm(t) := r(x_\pm, t) - r((\varphi_{\lambda,r}+c)_\pm, t), \quad t > 0,$$

меняет знак (с "$-$" на "$+$") не более одного раза.

При этом, если в одном из неравенств (6.7.1) *стоит знак равенства, то соответствующая разность $\Delta_\pm(t)$ неотрицательна.*

Кроме того, если существует $p \in (0, \infty)$, такое, что

$$\|x_+\|_p \le \| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_+ \|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}, \tag{6.7.2}$$

то для всех $t > 0$

$$\int_0^t r^p(x_+, u)du \le \int_0^t r^p((\varphi_{\lambda,r} + c)_+, u)du, \tag{6.7.3}$$

и, следовательно, для любого $q \in (0, \infty]$, $q \ge p$,

$$\|x_+\|_q \le \|(\varphi_{\lambda,r} + c)_+\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]}. \tag{6.7.4}$$

Доказательство. Из условий (6.7.1) следует согласно теореме сравнения Колмогорова 2.2.1, что если точки $t_1^\pm$ и $t_2^\pm$ удовлетворяют условию

$$x_\pm(t_1^\pm) = \big(\varphi_{\lambda,r} + c\big)_\pm (t_2^\pm),$$

то

$$\big|x'_\pm(t_1^\pm)\big| \le \Big|\big(\varphi_{\lambda,r} + c\big)'_\pm (t_2^\pm)\Big|. \tag{6.7.5}$$

Далее, поскольку функция x имеет нули, то перестановка $r(x_\pm, t)$ непрерывна на $[0, \mu_\pm]$, где $\mu_\pm := \operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : x_\pm(t) > 0\}$, при этом $r(x_\pm, \mu_\pm) = 0$. Учитывая также (6.7.1), видим, что для любого $y_\pm \in [0, \|x_\pm\|_\infty]$ существуют $\theta_1^\pm \in [0, \mu_\pm]$ и $\theta_2^\pm \in [0, 2\pi/\lambda]$, такие, что

$$y_\pm = r(x_+, \theta_1^\pm) = r\left(\big(\varphi_{\lambda,r} + c\big)_+, \theta_2^\pm\right).$$

При этом из (6.7.5) в силу теоремы о производной перестановке 10.2.3 вытекает, что для любых точек $\theta_1^\pm$ и $\theta_2^\pm$, удовлетворяющих последнему равенству,

$$\big|r'(x_\pm, \theta_1^\pm)\big| \le \big|r'((\varphi_{\lambda,r} + c)_\pm, \theta_2^\pm)\big|. \tag{6.7.6}$$

Применяя теорему о производной перестановке, мы без ограничения общности считаем, что функция x принадлежит некоторому плотному в W_∞^r множеству, например, множеству тригонометрических полиномов. Тогда все условия этой теоремы выполнены.

Из (6.7.1) следует, что

$$r(x_\pm, 0) \le r((\varphi_{\lambda,r} + c)_\pm, 0). \tag{6.7.7}$$

Теперь с помощью (6.7.7) и (6.7.6) заключаем, что разность $\Delta_{\pm}(t)$ меняет знак (с "$-$" на "$+$") не более одного раза.

При этом, если в одном из неравенств (6.7.1) стоит знак равенства, то и в соответствующем неравенстве (6.7.7) имеет место знак равенства. Тогда согласно (6.7.6) соответствующая разность $\Delta_{\pm}(t)$ неотрицательна.

Докажем теперь, что из (6.7.2) следует (6.7.3). Для этого заметим, что разность

$$\delta(t) := r^p(x_+, t) - r^p((\varphi_{\lambda,r} + c)_+, t), \quad t > 0$$

меняет знак (с "$-$" на "$+$") не более одного раза так же, как и разность $\Delta_+(t)$. Рассмотрим интеграл $I(t) := \int\limits_0^t \delta(u)du$. Заметим, что $I(0) = 0$, $I(2\pi) \leq 0$ (согласно (6.7.2)). Кроме того, $I'(t)$ меняет знак (с "$-$" на "$+$") не более одного раза. Ясно, что тогда $I(t) \leq 0$ для всех $t > 0$, что равносильно (6.7.3).

Неравенства (6.7.4) для $q \geq p$ вытекает из (6.7.3) согласно теореме 10.2.4. Теорема доказана.

Замечание. Утверждения (6.7.3) и (6.7.4) теоремы 6.7.1 остаются в силе, если положительные части функций x_+ и $(\varphi_{\lambda,r}+c)_+$ в (6.7.2)–(6.7.4) заменить соответствующими отрицательными частями.

Лемма 6.7.1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$ и $p \in (0, \infty]$.*

1. *Для любой функции $x \in L_p$, такой, что $\|x\|_p \neq 0$, существуют числа $\lambda > 0$ и $c \in \mathbf{R}$, удовлетворяющие условиям*

$$\| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_{\pm} \|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \|x_{\pm}\|_p. \tag{6.7.8}$$

При этом для $d := \lambda^r c$ выполняется неравенство

$$|d| \leq \|\varphi_r\|_\infty. \tag{6.7.9}$$

2. *В случаях, когда $\|x_+\|_p = \|x_-\|_p$ или $\|x_+\|_p\|x_-\|_p = 0$, константы c и λ, удовлетворяющие (6.7.8), могут быть выбраны так, чтобы*

$$d = \begin{cases} 0, & \text{если } \|x_+\|_p = \|x_-\|_p, \\ \|\varphi_r\|_\infty, & \text{если } \|x_-\|_p = 0, \\ -\|\varphi_r\|_\infty, & \text{если } \|x_+\|_p = 0. \end{cases} \tag{6.7.10}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что для любых $\lambda > 0$ и $c \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_{\pm} \|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \lambda^{-r-1/p} \| \left(\varphi_r + \lambda^r c\right)_{\pm} \|_p. \qquad (6.7.11)$$

Равенство (6.7.11) при $p = \infty$ очевидно, а при $p < \infty$ легко проверяется при помощи замены переменных:

$$\| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_{\pm} \|^p_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \int\limits_0^{2\pi/\lambda} \left|\left(\varphi_{\lambda,r}(t) + c\right)_{\pm}\right|^p dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left|\left(\varphi_{\lambda,r}(\lambda^{-1}u) + c\right)_{\pm}\right|^p d(\lambda^{-1}u) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left|\left(\lambda^{-r}\varphi_r(u) + c\right)_{\pm}\right|^p d(\lambda^{-1}u) =$$

$$= \lambda^{-rp-1} \int\limits_0^{2\pi} \left|\left(\varphi_r(u) + \lambda^r c\right)_{\pm}\right|^p du = \lambda^{-rp-1} \| \left(\varphi_r + \lambda^r c\right)_{\pm} \|^p_p.$$

Согласно (6.7.11) условие (6.7.8) можно переписать в виде

$$\lambda^{-r-1/p} \| \left(\varphi_r + d\right)_{\pm} \|_p = \|x_{\pm}\|_p.$$

Эти два уравнения (относительно λ и d), очевидно, эквивалентны системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda^{-r-1/p} \left(\| \left(\varphi_r + d\right)_+ \|_p + \| \left(\varphi_r + d\right)_- \|_p \right) = \|x_+\|_p + \|x_-\|_p, \\ \| \left(\varphi_r + d\right)_+ \|_p \, \|x_-\|_p = \| \left(\varphi_r + d\right)_- \|_p \, \|x_+\|_p. \end{cases} \qquad (6.7.12)$$

На промежутке $[-\|\varphi_r\|_\infty, \|\varphi_r\|_\infty]$ функция $f_1(d) := \| \left(\varphi_r + d\right)_- \|_p \times \|x_+\|_p$ монотонно не возрастает, причем $f_1(\|\varphi_r\|_\infty) = 0$, а функция $f_2(d) := \| \left(\varphi_r + d\right)_+ \|_p \|x_-\|_p$ монотонно не убывает, причем

$f_2(-\|\varphi_r\|_\infty) = 0$. Ввиду непрерывности функций f_1 и f_2 второе уравнение системы (6.7.12) имеет решение $d \in [-\|\varphi_r\|_\infty, \|\varphi_r\|_\infty]$. Это решение, очевидно, удовлетворяет соотношениям (6.7.10).

Подставляя d в первое уравнение системы, однозначно определяем λ. Лемма доказана.

Замечание. Из условий (6.7.8) и (6.7.9) числа λ и c определяются однозначно. Это становится очевидным, если заметить, что из условия $\|x\|_p \neq 0$ следует строгая монотонность одной из функций f_1 и f_2.

Лемма 6.7.2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $\in (0, \infty]$. *Если для функции* $x \in W^r_\infty$, *имеющей нули, числа* $\lambda > 0$ *и* $c \in \mathbf{R}$ *выбраны так, что выполнены условия* (6.7.8), *то*

$$\|x_\pm\|_\infty \leq \| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_\pm \|_\infty. \tag{6.7.13}$$

Доказательство. Предположим, что хотя бы одно из неравенств (6.7.13) неверно. Тогда найдется число $\gamma \in (0, 1)$, такое, что

$$\|\gamma x_\pm\|_\infty \leq \| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_\pm \|_\infty,$$

причем хотя бы в одном из этих неравенств имеет место знак равенства ненулевых чисел. Пусть, например,

$$\|\gamma x_+\|_\infty = \| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_+ \|_\infty \neq 0, \quad \|\gamma x_-\|_\infty \leq \| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_- \|_\infty.$$

Тогда согласно теореме 6.7.1 разность $r(\gamma x_+, t) - r((\varphi_{\lambda,r} + c)_+, t)$ неотрицательна. Следовательно,

$$\|r(\gamma x_+, \cdot)\|_{L_p[0,2\pi]} \geq \|r((\varphi_{\lambda,r} + c)_+, \cdot)\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}$$

или согласно теореме 10.2.1

$$\|\gamma x_+\|_p \geq \|(\varphi_{\lambda,r} + c)_+\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}.$$

Таким образом, в силу выбора $\gamma \in (0, 1)$

$$\|x_+\|_p > \|(\varphi_{\lambda,r} + c)_+\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]},$$

что противоречит (6.7.8). Лемма доказана.

Пусть $c_p(x)$ – константа наилучшего приближения функции x в L_p.

Теорема 6.7.2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $p \in (0, \infty)$. *Если для функции* $x \in W^r_\infty$, *имеющей нули, числа* $\lambda > 0$ *и* $c \in \mathbf{R}$ *выбраны так, что выполнены условия* (6.7.8), *то для любого* $t > 0$

$$\int_0^t r^p(x_\pm, u)du \le \int_0^t r^p((\varphi_{\lambda,r} + c)_\pm, u)du. \tag{6.7.14}$$

В частности,

$$\int_0^t r^p((x - c_{p+1}(x))_\pm, u)du \le \int_0^t r^p((\varphi_{\lambda,r})_\pm, u)du, \tag{6.7.15}$$

$$\int_0^t r^p(x + \min_s x(s), u)du \le \int_0^t r^p(\varphi_{\lambda,r} + \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty, u)du, \tag{6.7.16}$$

и, следовательно, для любого $q \in (0, \infty]$, $q \ge p$

$$\|x_\pm\|_q \le \|(\varphi_{\lambda,r} + c)_\pm\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]}, \tag{6.7.17}$$

$$\|(x - c_{p+1}(x))_\pm\|_q \le \|(\varphi_{\lambda,r})_\pm\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]}, \tag{6.7.18}$$

$$\|x + \min_s x(s)\|_q \le \|\varphi_{\lambda,r} + \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]}. \tag{6.7.19}$$

Доказательство. Согласно лемме 6.7.2 выполнены неравенства (6.7.13). Поэтому неравенство (6.7.14) следует из соотношения (6.7.3) и замечания к теореме 6.7.1. Неравенство (6.7.15) следует из (6.7.14) и соотношений (6.7.10) леммы 6.7.1, если учесть, что

$$\|(x - c_{p+1}(x))_+\|_p = \|(x - c_{p+1}(x))_-\|_p$$

в силу критерия элемента наилучшего приближения в метрике пространства L_{p+1} (см. теорему 10.1.2).

Неравенство (6.7.16) следует из (6.7.14) и соотношений (6.7.10) леммы 6.7.1, если учесть, что $(x + \min_s x(s))_- = 0$.

Замечание. Неравенства (6.7.16) и (6.7.19) остаются в силе, если $\min\limits_s x(s)$ в левой части этих неравенств заменить на $-\max\limits_s x(s)$.

Следующая теорема 6.7.3 является аналогом теоремы 6.7.2. В условиях теоремы 6.7.3 неравенства (6.7.14) теоремы 6.7.2 для перестановок положительных и отрицательных частей функций перестают быть справедливыми. Однако можно сравнить перестановки их модулей.

Теорема 6.7.3. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $p \in (0, \infty)$. *Если для функции* $x \in W^r_\infty$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что*

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \|x - c_\infty(x)\|_p, \tag{6.7.20}$$

то для любого $t > 0$

$$\int\limits_0^t r^p(|x - c_\infty(x)|, u)du \le \int\limits_0^t r^p(|\varphi_{\lambda,r})|, u)du, \tag{6.7.21}$$

и, следовательно, для любого $q \in (0, \infty]$, $q \ge p$

$$\|x - c_\infty(x)\|_q \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]}. \tag{6.7.22}$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\|x - c_\infty(x)\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty. \tag{6.7.23}$$

Действительно, предполагая противное, найдем $\gamma \in (0, 1)$, такое, что

$$\|\gamma(x - c_\infty(x))\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty.$$

Заметим далее, что

$$\|(x - c_\infty(x))_+\|_\infty = \|(x - c_\infty(x))_-\|_\infty.$$

Поэтому согласно теореме 6.7.1 каждая из разностей

$$\Delta_\pm(t) := r(\gamma(x - c_\infty(x))_\pm, t) - r((\varphi_{\lambda,r})_\pm, t)$$

неотрицательна для всех $t > 0$. Следовательно,

$$\|r(\gamma(x - c_\infty(x))_\pm, \cdot)\|_{L_p[0,2\pi]} \geq \|r((\varphi_{\lambda,r})_\pm, \cdot)\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}$$

или ввиду теоремы 10.2.1

$$\|\gamma(x - c_\infty(x))\|_p \geq \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}.$$

Таким образом, согласно выбору $\gamma \in (0, 1)$

$$\|x - c_\infty(x)\|_p > \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]},$$

что противоречит (6.7.20). Тем самым (6.7.23) доказано. Значит, выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова 2.2.1. Согласно этой теореме, если точки t_1 и t_2 такие, что

$$x(t_1) - c_\infty(x) = \varphi_{\lambda,r}(t_2),$$

то

$$|x'(t_1)| \leq |\varphi'_{\lambda,r}(t_2)|. \tag{6.7.24}$$

Далее, поскольку функция $x - c_\infty(x)$ имеет нули, то перестановка $r(|x - c_\infty(x)|, t)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$, при этом $r(|x - c_\infty(x)|, 2\pi) = 0$. Учитывая также (6.7.23), заключаем, что для любого $y \in [0, r(|x - c_\infty(x)|, 0)]$ существуют $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ и $\theta_2 \in [0, 2\pi/\lambda]$, такие, что

$$y = r(|x - c_\infty(x)|, \theta_1) = r(|\varphi_{\lambda,r}|, \theta_2).$$

При этом из (6.7.24) согласно теореме о производной перестановке 10.2.3 вытекает, что для любых точек, удовлетворяющих последнему равенству,

$$|r'(|x - c_\infty(x)|, \theta_1)| \leq |r'(|\varphi_{\lambda,r}|, \theta_2)| \tag{6.7.25}$$

(как и при доказательстве теоремы 6.7.1 можем считать функцию x тригонометрическим полиномом. Тогда все условия этого предложения выполнены).

Подытоживая сказанное, заключаем, что, во-первых,

$$r(|x - c_\infty(x)|, 0) \leq r(|\varphi_{\lambda,r}|, 0)$$

(это сразу следует из (6.7.23)) и, во-вторых, разность

$$\Delta(t) = r(|x - c_\infty(x)|, t) - r(|\varphi_{\lambda,r}|, t)$$

меняет знак (с "$-$" на "$+$") не более одного раза (это сразу следует из (6.7.25)) ввиду непрерывности $\Delta(t)$.

То же самое верно и для p-х степеней, т.е.

$$r^p(|x - c_\infty(x)|, 0) \le r^p(|\varphi_{\lambda,r}|, 0),$$

причем разность

$$r^p(|x - c_\infty(x)|, t) - r^p(|\varphi_{\lambda,r}|, t)$$

меняет знак (с "$-$" на "$+$") не более одного раза.

Отсюда, учитывая (6.7.20), получаем неравенства (6.7.21).

Соотношения (6.7.22) для $q \ge p$ вытекают из (6.7.21) согласно теореме 10.2.4. Теорема доказана.

Отметим следующее утверждение, вытекающее из теорем 6.7.2, 6.7.3 и теоремы Харди, Литлвуда и Полиа (см. теорему 10.2.6).

Теорема 6.7.4. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $\Phi(t)-$ неотрицательная, непрерывная на полуоси $[0, \infty)$ функция, такая, что $\Phi(t^{1/p})$ выпукла вниз и $\Phi(0) = 0$.*

Если для функции $x \in W^r_\infty$, имеющей нули, числа $\lambda > 0$ и $c \in \mathbf{R}$ выбраны так, что выполнены условия (6.7.8):

$$\| \left(\varphi_{\lambda,r} + c\right)_\pm \|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \| (x)_\pm \|_p,$$

то

$$\int\limits_0^{2\pi} \Phi(x_\pm(u))du \le \int\limits_0^{2\pi} \Phi((\varphi_{\lambda,r} + c)_\pm(u))du.$$

В частности,

$$\int\limits_0^{2\pi} \Phi((x(u) - c_{p+1}(x))_\pm)du \le \int\limits_0^{2\pi} \Phi((\varphi_{\lambda,r})_\pm(u))du$$

и

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x(u) + \min_s x(s))du \le \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi_{\lambda,r}(u) + \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty)du.$$

Если же для функции $x \in W^r_\infty$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что выполнены условия* (6.7.20):

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \|x - c_\infty(x)\|_p,$$

то

$$\int_0^{2\pi} \Phi(|x(u) - c_\infty(x)|)du \le \int_0^{2\pi} \Phi(|\varphi_{\lambda,r}(u)|)du.$$

6.8. Неравенства типа Надя

Теорема 6.8.1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$ *и* $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$, *имеющей нули,*

$$\|x\|_q \le \sup_{c\in[0,\|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} \|x\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}. \quad (6.8.1)$$

Неравенство (6.8.1) *точное на классе функций из* $L^r_\infty(\mathbf{T})$, *имеющих нули.*

Доказательство. Фиксируем функцию x, удовлетворяющую условиям теоремы. Ввиду однородности неравенства (6.8.1) можем считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \quad (6.8.2)$$

Тогда $x \in W^r_\infty$. Пользуясь леммой 6.7.1, выберем числа $\lambda > 0$ и $c \in \mathbf{R}$, удовлетворяющие условиям (6.7.8) и (6.7.9). Согласно теореме 6.7.2 справедливо неравенство (6.7.17). Применяя (6.7.17) и (6.7.8), получаем

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p^\alpha} \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r} + c\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]}}{\|\varphi_{\lambda,r} + c\|^\alpha_{L_p[0,2\pi/\lambda]}},$$

где $\alpha := \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$. Учитывая равенство (6.7.11), имеем

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p^\alpha} \le \frac{\lambda^{-r-1/q}\|\varphi_r + d\|_q}{\Big(\lambda^{-r-1/p}\|\varphi_r + d\|_p\Big)^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} = \frac{\|\varphi_r + d\|_q}{\|\varphi_r + d\|_p^\alpha}, \tag{6.8.3}$$

где $d := \lambda^r c$ удовлетворяет неравенству (6.7.9), т.е. $|d| \le \|\varphi_r\|_\infty$. Таким образом,

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p^\alpha} \le \sup_{|c|\le\|\varphi_r\|_\infty} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} = \sup_{c\in[0,\|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}}. \tag{6.8.4}$$

Последнее равенство выполняется согласно очевидному соотношению $\|\varphi_r + c\|_s = \|\varphi_r - c\|_s,\ s > 0,\ c \in \mathbf{R}$. Из (6.8.4) следует (6.8.1) ввиду (6.8.2). Неравенство (6.8.1) обращается в равенство для функции $x = \varphi_r + \tilde{c}$, где $\tilde{c}$ – константа, реализующая верхнюю грань в правой части (6.8.1). Теорема доказана.

Замечание. Неравенство (6.8.1) перестает быть справедливым на всем классе L_∞^r без предположения о том, что функции $x \in L_\infty^r$ имеют нули. Действительно, при $\alpha \in (0,1)$ отношение

$$\frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^\alpha}$$

неограничено при $c \in \mathbf{R}$. Если $q, p \ge 1$, это следует из очевидного соотношения

$$\frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^\alpha} \ge \frac{|(2\pi)^{1/q}(|c| - \|\varphi_r\|_\infty)|}{\Big((2\pi)^{1/p}|c| + \|\varphi_r\|_p\Big)^\alpha} \to \infty, \quad |c| \to \infty.$$

Если $q < 1$, то оценка для $\|\varphi_r + c\|_q$ в этом соотношении изменится следующим образом:

$$\|\varphi_r + c\|_q \ge |2\pi(|c|^q - \|\varphi_r\|_\infty^q)|^{1/q}.$$

Если же $p < 1$, то для $\|\varphi_r + c\|_p$ необходимо применить оценку

$$\|\varphi_r + c\|_p \le (2\pi|c|^p + \|\varphi_r\|_p^p)^{1/p}.$$

Следующая теорема дает другие варианты неравенств типа Надя.

Теорема 6.8.2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$; $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$, $m = p+1$ *или* $m = \infty$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$

$$\|x - c_m(x)\|_q \le \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} \|x - c_m(x)\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}} \tag{6.8.5}$$

и

$$E_0^{\pm}(x)_q \le \frac{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_q}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} E_0^{\pm}(x)_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}. \tag{6.8.6}$$

Неравенства (6.8.5) *и* (6.8.6) *точные на классе функций* $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 6.8.1, можем считать выполненным условие (6.8.2), т.е. $\|x^{(r)}\|_\infty = 1$. Тогда $x \in W^r_\infty$.

Докажем сначала (6.8.5) при $m = p + 1$. Согласно критерию элемента наилучшего приближения в метрике пространства L_{p+1} (см. теорему 10.1.2) имеем

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - c_{p+1}(x)|^p \operatorname{sgn}(x(t) - c_{p+1}(x))dt = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\|(x - c_{p+1}(x))_+\|_p = \|(x - c_{p+1}(x))_-\|_p. \tag{6.8.7}$$

Применяя лемму 6.7.1 к функции $x(t) - c_{p+1}(x)$, выберем числа λ и c, удовлетворяющие условию (6.7.8), которое в данном случае принимает вид

$$\|(x - c_{p+1}(x))_\pm\|_p = \|(\varphi_{\lambda,r} + c)_\pm\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}.$$

При этом из (6.7.10) согласно (6.8.7) следует, что $d := \lambda^r c = 0$.

Далее, как и при доказательстве теоремы 6.8.1, устанавливаем неравенство (6.8.3) для функции $x - c_{p+1}(x)$. Учитывая, что $d = 0$, записываем в виде

$$\frac{\|x - c_{p+1}(x)\|_q}{\|x - c_{p+1}(x)\|_p^\alpha} \le \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r + 1/q}{r + 1/p}$. Из последнего неравенства и равенства (6.8.2) следует (6.8.5) при $m = p + 1$.

Докажем теперь (6.8.5) при $m = \infty$. Выберем число $\lambda > 0$ из условия (6.7.20) теоремы 6.7.3. Тогда согласно этой теореме справедливо неравенство (6.7.22). Из (6.7.20) и (6.7.22), используя (6.7.11), получаем

$$\frac{\|x - c_\infty(x)\|_q}{\|x - c_\infty(x)\|_p^\alpha} \le \frac{\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]}}{\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}^\alpha} = \frac{\lambda^{-r-1/q}\,\|\varphi_r\|_q}{\left(\lambda^{-r-1/p}\,\|\varphi_r\|_p\right)^\alpha} = \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r + 1/q}{r + 1/p}$. Отсюда ввиду условия (6.8.2) сразу следует (6.8.5) при $m = \infty$.

Докажем (6.8.6). Заметим, что для любого $p > 0$

$$E^+(x)_p = \|x + \min_t x(t)\|_p, \quad E^-(x)_p = \|x - \max_t x(t)\|_p. \tag{6.8.8}$$

При этом, очевидно, $(x + \min\limits_t x(t))_- = 0$, $(x - \max\limits_t x(t))_+ = 0$. Поэтому, применяя лемму 6.7.1 к функциям $x + \min\limits_t x(t)$ и $x - \max\limits_t x(t)$, можем в силу (6.7.10) константы, удовлетворяющие (6.7.8), выбрать так, чтобы $d := \lambda^r c = \|\varphi_r\|_\infty$ (для функции $x + \min\limits_t x(t)$) и $d = -\|\varphi_r\|_\infty$ (для функции $x - \max\limits_t x(t)$).

Далее, рассуждая, как и при доказательстве неравенства (6.8.3) (см. доказательство теоремы 6.8.1), и используя (6.7.19) и замечание к теореме 6.7.2 вместо (6.7.17), устанавливаем неравенства

$$\frac{\|x + \min\limits_t x(t)\|_q}{\|x + \min\limits_t x(t)\|_p^\alpha} \le \frac{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_q}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_p^\alpha} \tag{6.8.9}$$

и

$$\frac{\|x - \max\limits_t x(t)\|_q}{\|x - \max\limits_t x(t)\|_p^\alpha} \le \frac{\|\varphi_r - \|\varphi_r\|_\infty\|_q}{\|\varphi_r - \|\varphi_r\|_\infty\|_p^\alpha}, \tag{6.8.10}$$

где $\alpha = \dfrac{r + 1/q}{r + 1/p}$.

Из (6.8.8)–(6.8.10) следует (6.8.6), если учесть очевидное равенство $\|\varphi_r - c\|_s = \|\varphi_r + c\|_s, \ \ s > 0, \ \ c \in \mathbf{R}$.

Неравенства (6.8.5) и (6.8.6), очевидно, обращаются в равенство для $x = \varphi_r$. Теорема доказана.

Следствие 6.8.1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$ *и* $q \in (1, \infty]$. *Тогда для любой функции* $x \in L_\infty^r(\mathbf{T}), \ x \perp \mathrm{const}$,

$$\|x\|_q \le \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_1^{\frac{r+1/q}{r+1}}} \|x\|_1^{\frac{r+1/q}{r+1}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1-1/q}{r+1}}.$$

Константа в этом неравенстве неулучшаема на классе функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T}), \ x \perp \mathrm{const}$.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что согласно критерию элемента наилучшего L_2-приближения (см. теорему 10.1.2) $c_2(x) = 0$, если $x \perp \mathrm{const}$.

Замечание. Для функций $x \in L_\infty^r, \ r \in \mathbf{N}$, справедливо также следующее неравенство типа Надя для наилучших приближений:

$$E_0\,(x)_\infty \le \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0\,(\varphi_r)_p^{\frac{r}{r+1/p}}} E_0\,(x)_p^{\frac{r}{r+1/p}} \, E_0\left(x^{(r)}\right)_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}}, \tag{6.8.11}$$

где $p \in (0, \infty)$.

Доказательство неравенства (6.8.11) лишь некоторыми деталями отличается от доказательства теоремы 6.4.1.

6.9. Сравнение перестановок и неравенства для сопряженных функций

Для сокращения будем писать C, L_p и $\|f\|_p$ вместо $C[0,2\pi]$, $L_p[0,2\pi]$ и $\|f\|_{L_p[0,2\pi]}$ соответственно.

Вместе с тригонометрическим рядом

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikt} \tag{6.9.1}$$

рассматривают сопряженный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin kt-b_k\cos kt)=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{-ikt}. \tag{6.9.2}$$

Название этого ряда оправдано тем, что действительная и мнимая части степенного ряда

$$\frac{a_0}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k$$

в круге $|z|\le 1$ представляют собой пару сопряженных гармонических функций.

Пусть ряд (6.9.1) есть ряд Фурье некоторой функции $f(t)$. Если ряд (6.9.2) также является рядом Фурье некоторой функции, то ее называют тригонометрически сопряженной (или просто сопряженной) с функцией $f(t)$ и обозначают $\widetilde{f}(t)$ или $f^{\sim}(t)$.

Существует другое, более широкое определение сопряженной функции как несобственного интеграла:

$$\widetilde{f}(t)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(t+u)-f(t-u)]\mathrm{ctg}\frac{u}{2}du, \tag{6.9.3}$$

который для любой суммируемой функции $f(t)$ почти всюду существует и конечен. Однако определенная таким образом функция $\widetilde{f}(t)$ не всегда является суммируемой. В том случае, когда эта функция

суммируема, ее рядом Фурье будет (6.9.2) и, значит, в этом случае определение (6.9.3) совпадает с прежним. Отсюда следует, что если $f(t)$ и $\widetilde{f}(t)$ – суммируемые функции и $f(t)$ в среднем равна нулю на периоде, то выполняется равенство $\widetilde{f}(t) = f(t)$.

Определение сопряженной функции $\widetilde{f}(t)$ равенством (6.9.3), как это нетрудно проверить с помощью тождества

$$\frac{t}{2}\mathrm{ctg}\frac{t}{2} = 1 + t\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-2k\pi} + \frac{1}{t+2k\pi}\right),$$

равносильно определению

$$\widetilde{f}(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{f(t+u)-f(t-u)}{u}du. \tag{6.9.4}$$

Это равенство можно принять за определение сопряженной функции, заданной на всей вещественной оси (не обязательно периодической).

Рассмотрим некоторые примеры сопряженных функций. Пусть $\varphi_{1,r}$ – эйлеров сплайн, рассмотренный в § 2.1. Из (2.1.1) следует, что

$$\widetilde{\varphi}_{1,r}(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)t - \pi(r+1)/2]}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{6.9.5}$$

Ясно, что $\widetilde{\varphi}_{1,r}(t)$ есть нечетная функция при нечетных r и четная при четных r. Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\widetilde{\varphi}_{1,0}(t) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|,\ 0 < t < \pi, \tag{6.9.6}$$

а при $r = 1, 2, \ldots$, $\widetilde{\varphi}_{1,r}(t)$ есть r-й периодический интеграл, в среднем равный нулю на периоде, от функции $\widetilde{\varphi}_{1,0}(t)$.

При нечетных $r > 1$ функция $\varphi_{1,r}(t)$ обращается в нуль в точках πn, $n \in Z$, а при четных r в точках $\pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Из этого факта, равенства (6.9.6) и теоремы Ролля следует, что при нечетных r функция $\widetilde{\varphi}_{1,r}(t)$ меняет знак в точках πn, $n \in Z$, и только в них, а при

четных r – в точках $\pi/2+\pi n$, $n \in Z$, и только в них. Следовательно, при $r = 1, 2, \ldots$

$$\operatorname{sgn} \widetilde{\varphi}_{1,r}(t) = \operatorname{sgn} \sin(t - \pi(r+1)/2). \tag{6.9.7}$$

Отметим, кроме того, что для любой функции $f \in L_1$

$$\widetilde{f}(n\cdot)(t) = \widetilde{f}(nt),$$

так что если

$$\varphi_{n,r}(t) = n^{-r}\varphi_{1,r}(nt),$$

то

$$\widetilde{\varphi}_{n,r}(t) = n^{-r}\widetilde{\varphi}_{1,r}(nt).$$

Таким образом,

$$\operatorname{sgn} \widetilde{\varphi}_{n,r}(t) = \operatorname{sgn} \sin n(t - \pi(r+1)/2). \tag{6.9.8}$$

Нам понадобится следующая теорема Стейна и Вейса.

Теорема 6.9.1 (см., например, [211, теорема 1.6.1]). *Пусть E – измеримое подмножество отрезка $[0, 2\pi]$ и $\chi_E(t)$ – 2π-периодическое продолжение на числовую ось характеристической функции множества E. Тогда для любого $\tau \in [0, 2\pi]$*

$$r(\widetilde{\chi}_E, \tau) = r(\widetilde{\chi}_{[0,\operatorname{mes} E]}, \tau) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arsh}\frac{\sin(\operatorname{mes} E/2)}{\operatorname{tg}(\tau/2)}. \tag{6.9.9}$$

С помощью теоремы Стейна и Вейса сейчас будет доказана следующая теорема сравнения для сопряженных функций.

Теорема 6.9.2. *Пусть функции $f, g \in C$, такие, что $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in C$, а функция $f(t)$ почти всюду отлична от нуля,*

$$E_{\pm}(g) = \{t : t \in [0, 2\pi],\ \pm\widetilde{g}(t) > 0\},\ \ \operatorname{mes} E_{\pm}(g) = \pi, \tag{6.9.10}$$

$$\|\widetilde{g}\|_1 = \int\limits_0^{2\pi} r(|g|, t) r(|(\operatorname{sgn} \widetilde{g})^{\sim}|, t)dt. \tag{6.9.11}$$

Тогда, если для всех $t > 0$

$$\int_0^t r(|f|, u)du \le \int_0^t r(|g|, u)du, \tag{6.9.12}$$

то

$$\|\widetilde{f}\|_1 \le \|\widetilde{g}\|_1. \tag{6.9.13}$$

Доказательство. Пусть сначала $\widetilde{f}(t)$ отлична от нуля почти всюду. Так как

$$\int_0^{2\pi} \phi(t)\tilde{\psi}(t)dt = -\int_0^{2\pi} \psi(t)\tilde{\phi}(t)dt, \tag{6.9.14}$$

то

$$\|\widetilde{f}\|_1 = \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(t)\mathrm{sgn}\widetilde{f}(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} f(t)\left(\mathrm{sgn}\,\widetilde{f}\right)^{\sim}(t)dt. \tag{6.9.15}$$

Используя теорему 10.2.7, получаем

$$\|\widetilde{f}\|_1 \le \int_0^{2\pi} r(|f|, t)r(|(\mathrm{sgn}\,\widetilde{f})^{\sim}|, t)dt. \tag{6.9.16}$$

Из неравенства (6.9.16) и теоремы 10.2.8 находим

$$\|\widetilde{f}\|_1 \le \int_0^{2\pi} r(|g|, t)r(|(\mathrm{sgn}\,\widetilde{f})^{\sim}|, t)dt. \tag{6.9.17}$$

Кроме того, согласно условию (6.9.10) и теореме 6.9.1 имеем

$$r(|(\mathrm{sgn}\,\widetilde{g})^{\sim}|, t) = 2r\left(\widetilde{\chi}_{E_+(g)}, \frac{t}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\mathrm{arsh}\left(\mathrm{ctg}\frac{t}{4}\right),$$

$$r(|(\mathrm{sgn}\,\tilde{f})^{\sim}|, t) = 2r\left(\tilde{\chi}_{E_+(f)}, \frac{t}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\mathrm{arsh}\left(\frac{\sin(\mathrm{mes}E_+(f)/2)}{\mathrm{tg}(t/4)}\right),$$

так что при всех $t \in (0, 2\pi)$

$$r(|(\operatorname{sgn} \widetilde{f})^{\sim}|, t) \leq r(|(\operatorname{sgn} \widetilde{g})^{\sim}|, t). \tag{6.9.18}$$

Из (6.9.17) с учетом (6.9.18) и (6.9.11) получаем

$$\|\widetilde{f}\|_1 \leq \int\limits_0^{2\pi} r(|g|, t) r(|(\operatorname{sgn} \widetilde{g})^{\sim}|, t) dt,$$

и неравенство (6.9.13) доказано для функций $f(t)$, у которых $\widetilde{f}(t) \neq 0$ почти всюду.

Пусть теперь $\widetilde{f}(t)$ не эквивалентна нулю, но $\widetilde{f}(t) = 0$ на множестве положительной меры. Заметим, что оператор перехода к сопряженной функции непрерывно действует из C в L_1. Следовательно, существует абсолютная константа $K > 0$, такая, что если $f, h \in C$ и $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$, то $\|\widetilde{f} - \widetilde{h}\|_1 < K\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Далее, поскольку

$$\xi(t) = \int\limits_0^t r(g, u) du$$

является неубывающей выпуклой вверх и положительной на $(0, 2\pi]$ функцией, то найдется константа $K_1 > 0$, такая, что для $0 \leq t \leq 2\pi$ выполняется неравенство $t \leq K_1 \xi(t)$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем отличный от константы тригонометрический полином $\tau(t)$, такой, что $\|f - \tau\|_\infty < \varepsilon$. Тогда полином $\tau(t)$ обращается в нуль разве что в конечном числе точек на периоде. Кроме того, $\|f - \tau\|_1 < K\varepsilon$ и согласно неравенству 10.2.1 и условию (6.9.12) при $x \in [0, 2\pi]$ имеем

$$\int\limits_0^t r(|\tau|, u) du \leq \int\limits_0^t r(|f|, u) du + \int\limits_0^t r(|f - \tau|, u) du \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t r(|g|, u) du + t\varepsilon \leq \int\limits_0^t r(|g|, u) du + K_1 \varepsilon \int\limits_0^t r(|g|, u) du =$$

$$= (1 + K_1\varepsilon) \int\limits_0^t r(|g|, u)du.$$

Из доказанного ранее следует, что

$$\|\widetilde{\tau}\|_1 \leq (1 + K_1\varepsilon)\|\widetilde{g}\|_1.$$

Но тогда

$$\|\tilde{f}\|_1 \leq \|\widetilde{\tau}\|_1 + \|\tilde{\tau} - \widetilde{f}\|_1 \leq K\varepsilon + (1 + K_1\varepsilon)\|\widetilde{g}\|_1,$$

а ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем неравенство

$$\|\widetilde{f}\|_1 \leq \|\widetilde{g}\|_1.$$

В заключение отметим, что условию теоремы 6.9.2 удовлетворяет, например, функция $g(t) = \varphi_{n,r}(t)$.

Теорема 6.9.3. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ справедливо точное неравенство*

$$\left\|\widetilde{x}^{(k)}\right\|_1 \leq \frac{\|\widetilde{\varphi}_{r-k}\|_1}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}. \tag{6.9.19}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$. Учитывая однородность неравенства (6.9.19), считаем, что

$$\left\|x^{(r)}\right\|_\infty = 1. \tag{6.9.20}$$

Выберем λ так, чтобы

$$\|x^{(k-1)}\|_\infty = \left\|\varphi_{\lambda,r-k+1}\right\|_\infty = \lambda^{-(r-k+1)} \|\varphi_{r-k+1}\|_\infty. \tag{6.9.21}$$

Тогда согласно теореме сравнения 6.1.1 для любого $t > 0$ имеем

$$\int\limits_0^t r\left(\left|x^{(k)}\right|, u\right) du \leq \int\limits_0^t r(\left|\varphi_{\lambda,r-k}\right|, u)du.$$

Отсюда ввиду теоремы 6.9.2 получаем

$$\|\widetilde{x}^{(k)}\|_1 \le \|\widetilde{\varphi}_{\lambda,r-k}\|_1 = \lambda^{-(r-k)}\|\widetilde{\varphi}_{r-k}\|_1. \tag{6.9.22}$$

С другой стороны, из (6.9.21) с помощью неравенства Колмогорова (2.3.1) выводим

$$\|x\|_\infty \ge \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = \lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty. \tag{6.9.23}$$

Комбинируя (6.9.22) и (6.9.23), имеем

$$\frac{\left\|\widetilde{x}^{(k)}\right\|_1}{\|x\|_\infty^{1-k/r}} \le \frac{\lambda^{-(r-k)}\,\|\tilde{\varphi}_{r-k}\|_1}{\left(\lambda^{-r}\,\|\varphi_r\|_\infty\right)^{1-k/r}} = \frac{\|\tilde{\varphi}_{r-k}\|_1}{\left(\|\varphi_r\|_\infty\right)^{1-k/r}},$$

что ввиду (6.9.20) равносильно (6.9.19).

Неравенство (6.9.19) обращается в равенство для функций $x(t) = a\varphi_{n,r}(t+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Теорема доказана.

Напомним, что для заданных $\alpha, \beta > 0$ и $p \in [1, \infty]$ несимметричная норма определяется равенством

$$\|x\|_{p;\alpha,\beta} := \|\alpha x_+ + \beta x_-\|_p,$$

$\varphi_{n,0}\,(t;\alpha,\beta)$ $(n \in \mathbf{N})$ – $2\pi/n$-периодическая функция, равная α для $t \in [0, 2\pi\beta/(n(\alpha+\beta)))$, и равная $-\beta$ для $t \in [2\pi\beta/(n(\alpha+\beta)), 2\pi/n)$.

Для $r > 0$ положим

$$\varphi_{n,r}\,(t;\alpha,\beta) = \int\limits_0^{2\pi} B_r\,(t-u)\,\varphi_{n,0}(u;\alpha,\beta)du.$$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, с использованием неравенства Хермандера (2.9.1) вместо неравенства Колмогорова (2.3.1), можно доказать следующий несимметричный вариант теоремы 6.9.3.

Теорема 6.9.4. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $\alpha, \beta > 0$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ справедливо точное неравенство*

$$\left\|\widetilde{x}^{(k)}\right\|_1 \le \frac{\|\tilde{\varphi}_{r-k}(\cdot;\alpha,\beta)\|_1}{E_0\,(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta))_\infty^{1-k/r}} E_0\,(x)_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{k/r}.$$

6.10. Неравенства для производных полуцелого порядка

Для $r > 0$ положим

$$B_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-r} \cos(\nu t - \pi r/2).$$

Напомним, что функция $y \in L_1$, в среднем равная нулю на периоде, называется r-й производной для функции $x \in L_1$ в смысле Вейля [131] (этот факт записывается, как обычно, равенством $x^{(r)} = y$), если

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(u)du + \int_0^{2\pi} B_r(t-u)\, y(u)\, du.$$

Соответствующее операции дробного дифференцирования соболевское пространство L_p^r состоит из функций $x \in L_1$, таких, что $x^{(r)} \in L_p$.

Для $n \in \mathbf{N}$ и $r > 0$ положим

$$\varphi_{n,r}(t) = \int_0^{2\pi} B_r(t-u)\, \varphi_{n,0}(u)du,$$

где $\varphi_{n,0}(u) = \operatorname{sgn} \sin nu$.

Теорема 6.10.1. *Пусть $k, r \in \mathbf{N},\ r/2 \le k < r$. Тогда для любой функции $x \in L_\infty^r$ справедливо неравенство*

$$\left\| x^{(k+1/2)} \right\|_2 \le \frac{\left\| \varphi_{r-k-1/2} \right\|_2}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-\frac{k+1/2}{r}}} \|x\|_\infty^{1-\frac{k+1/2}{r}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{k+1/2}{r}}. \qquad (6.10.1)$$

Неравенство (6.10.1) *является точным и обращается в равенство для функций вида $x(t) = a\varphi_{n,r}(t),\ a \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$.*

Доказательство. Фиксируем функцию $x \in L_\infty^r$. Она представима в виде

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(u)du + \int\limits_0^{2\pi} B_r(t-u)\, x^{(r)}(u)\, du.$$

Тогда

$$x^{(k+1/2)}(t) = \int\limits_0^{2\pi} B_{r-k-1/2}(t-u)\, x^{(r)}(u)\, du.$$

Для $r/2 \le k < r$

$$\left\| x^{(k+1/2)} \right\|_2^2 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} B_{r-k-1/2}(t-u)\, x^{(r)}(u)\, du \int\limits_0^{2\pi} B_{r-k-1/2}(t-v)\, x^{(r)}(v)\, dvdt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} x^{(r)}(u) \int\limits_0^{2\pi} x^{(r)}(v) \int\limits_0^{2\pi} B_{r-k-1/2}(t-v)\, B_{r-k-1/2}(t-u)\, dtdvdu.$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_0^{2\pi} B_{r-k-1/2}(t-v)\, B_{r-k-1/2}(t-u)\, dt = \widetilde{B}_{2r-2k-1}(v-u).$$

Поэтому

$$\left\| x^{(k+1/2)} \right\|_2^2 = \left| \int\limits_0^{2\pi} x^{(r)}(u) \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{B}_{2r-2k-1}(u-v)\, x^{(r)}(v)\, dvdu \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^{2\pi} x^{(r)}(u)\, \widetilde{x}^{(2k-r+1)}(u)\, du \right| \le \left\| \widetilde{x}^{(2k-r+1)} \right\|_1 \left\| x^{(r)} \right\|_\infty.$$

Оценивая $\left\|\widetilde{x}^{(2k-r+1)}\right\|_1$ при помощи неравенства (6.9.19), будем иметь

$$\left\|x^{(k+1/2)}\right\|_2^2 \le \frac{\|\widetilde{\varphi}_{r-2k+r-1}\|_1}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-\frac{2k-r+1}{r}}} \|x\|_\infty^{1-\frac{2k-r+1}{r}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{2k-r+1}{r}+1} =$$

$$= \frac{\|\widetilde{\varphi}_{2r-2k-1}\|_1}{\|\varphi_r\|_\infty^{\frac{2r-2k-1}{r}}} \|x\|_\infty^{\frac{2r-2k-1}{r}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{2k+1}{r}}.$$

Учитывая равенство

$$\|\widetilde{\varphi}_{2r-2k-1}\|_1 = \left\|\varphi_{r-k-1/2}\right\|_2^2,$$

получаем (6.10.1). Теорема доказана.

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, с использованием теоремы 6.9.4 вместо теоремы 6.9.3 доказывается следующий несимметричный вариант теоремы 6.10.1.

Теорема 6.10.2. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $r/2 \le k < r$, $\alpha, \beta > 0$. Тогда для любой функции $x \in L_\infty^r$ выполняется точное неравенство*

$$\left\|x^{(k+1/2)}\right\|_2 \le$$

$$\le \frac{\left\|\varphi_{r-k-1/2}(\cdot;\alpha,\beta)\right\|_2}{E_0\left(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta)\right)_\infty^{1-\frac{k+1/2}{r}}} E_0\left(x\right)_\infty^{1-\frac{k+1/2}{r}} \left\|x^{(r)}\right\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{\frac{k+1/2}{r}}.$$

Комментарии к главе 6

В главе 1 (§ 1.7) мы отмечали, что задача вычисления модуля непрерывности оператора дифференцирования для классов периодических функций является в известном смысле более сложной, чем аналогичная задача для функций, заданных на всей оси (и не обязательно периодических) или полуоси (в двух последних случаях ясен, по крайней мере, вид модуля непрерывности, чего нет в периодическом случае). Вместе с тем задача о точной константе в мультипликативном неравенстве для периодических функций оказалась в

большей степени поддающейся изучению. Это связано, во-первых, с тем, что для периодических функций имеется мощная техника сравнения перестановок и Σ-перестановок, развитая Н.П.Корнейчуком и его учениками (см., например, [208, 214, 211]), а во-вторых, с тем, что в периодическом случае в известной степени проще строить экстремальные функции (не нужно следить, скажем, за суммируемостью экстремальной функции на всей оси, что особенно непросто в случае функций большой гладкости). Указанные обстоятельства привели к тому, что для периодических функций к настоящему времени известно существенно больше точных констант в общей (при всех $0 \le k < r$) ситуации по сравнению с непериодическим. Часть точных неравенств для периодических функций уже была представлена раньше (см. § 1.6, 5.8). В данной главе представлены другие общие результаты о точных константах в мультипликативных неравенствах для промежуточных производных периодических функций.

Глава начинается с параграфа, посвященного интегральным теоремам сравнения перестановок. Первая теорема такого типа установлена Н.П. Корнейчуком [207]. Теорема 6.1.1 доказана Н.П. Корнейчуком и А.А. Лигуном [215]. Несимметричные варианты теоремы сравнения можно найти в [214, § 5.5]. Этот параграф вместе с результатами о Σ-перестановках, представленных в гл. 10, составляют "инструментальную" базу для получения дальнейших неравенств. В § 6.2 приведено одно из самых, на наш взгляд, важных и интересных неравенств – неравенство А.А. Лигуна [237], дающее оценку L_q-нормы промежуточной производной через L_∞-нормы функции и старшей производной. Здесь же приведены "несимметричные аналоги" этого неравенства, важные для теории наилучших односторонних приближений и приближений в пространствах с несимметричными нормами.

В § 6.3 представлено еще одно весьма интересное неравенство Лигуна [238] – неравенство для промежуточных производных, в котором учитывается число перемен знака производных.

В § 6.4 представлены точные неравенства, оценивающие L_∞-норму промежуточной производной через L_p-норму функции и L_∞-норму старшей производной. В § 6.5 представлены точные нера-

венства, оценивающие L_∞-норму промежуточной производной через L_p-норму функции и L_1-норму старшей производной, а также полученные с его помощью неравенства, оценивающие L_2-норму промежуточной производной через L_p-норму функции и L_∞-норму старшей производной (последнее относится к случаю $k > r/2$). Результаты, представленые в § 6.4 и 6.5, получены в работе [63] (см. также [78]). В § 6.6 приведено точное неравенство, оценивающее L_2-норму промежуточной производной через L_2-норму функции и L_1-норму старшей производной (неравенство доказано в работе [84] с использованием идей Стейна).

В § 6.8 приведено точное неравенство, которое для функций, имеющих нули, оценивает L_q-норму функции через ее L_p-норму ($q > p$) и L_∞-норму старшей производной (порядок старшей производной здесь произволен). Приведены также некоторые аналогичные утверждения. Результаты этого параграфа получены в работе [82] (см. также [80]) с помощью там же доказанных теорем сравнения перестановок, которые здесь даны в § 6.7.

В § 6.9 приведены неравенства (см. [31]), оценивающие L_1-норму промежуточной производной сопряженной функции через L_∞-норму самой функции и L_∞-норму старшей производной.

В § 6.10 приведены неравенства (см. [37]), оценивающие L_2-норму промежуточной производной полуцелого порядка через L_∞-норму самой функции и L_∞-норму старшей производной. Последнее неравенство получено с помощью неравенств из § 6.2 и 6.9.

В заключение отметим, что в ряде работ неравенства, представленные в данной главе, обобщались на случай дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, более общих по сравнению с операторами обычного k-кратного дифференцирования.

Дополнительные результаты к главе 6

1. Боянов и Найденов [118] дали “непериодические” обобщения неравенства Лигуна из § 6.2.

Символом Φ обозначим класс непрерывно дифференцируемых на $[0, \infty)$ функций ϕ, положительных на $(0, \infty)$, в нуле равных нулю, и таких, что $\phi(t)/t$ не убывает.

Пусть f – непрерывно дифференцируемая функция на прямой. Будем говорить, что непрерывно дифференцируемая функция ϕ на прямой является функцией сравнения для f, если $\|f\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \leq \leq \|\phi\|_{L_\infty(\mathbf{R})}$ и функция ϕ обладает следующими свойствами: ϕ является 2ω-периодической, в нуле равной нулю, нечетной относительно точки 0, четной относительно точки $\omega/2$, положительной и выпуклой вверх на $(0,\omega)$, строго возрастающей на $[0,\omega]$ и такой, что если $f(x_0) = \phi(x_1)$ для некоторых точек x_0 и x_1, то $|f'(x_0)| \leq |\phi'(x_1)|$.

Для данной функции ϕ обозначим Ω_ϕ – класс дважды непрерывно дифференцируемых функций на прямой, для которых ϕ является функцией сравнения, а функция ϕ' есть функцией сравнения для f'.

Пусть $[a,b]$ – произвольный отрезок числовой прямой. Представим его длину в виде $b-a = N\omega + 2\theta$, где N – неотрицательное число, причем $2\theta < \omega$. Положим $\phi([a,b];t) := \phi(t-a-\theta)$.

Множество K непрерывных на $[a,b]$ функций будем называть компактным в себе, если любая последовательность функций из K содержит равномерно сходящуюся на $[a,b]$ подпоследовательность, причем предельная функция принадлежит K.

Множество Ω_ϕ^0 назовем правильным подмножеством Ω_ϕ, если: а) $\Omega_\phi^0 \subset \Omega_\phi$; б) Ω_ϕ^0 компактно в себе на каждом конечном интервале $[a,b]$ числовой прямой; в) вместе с функцией $f(t)$ множеству Ω_ϕ^0 принадлежит также любой ее сдвиг и любой сдвиг функции $f(-t)$.

В работе [118] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $[a,b]$ – фиксированный конечный интервал числовой прямой, ϕ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на прямой и Ω_ϕ^0 – правильное подмножество Ω_ϕ. Тогда*

$$\int\limits_a^b \phi(|f'(t)|)dt \leq \int\limits_a^b \phi(|\phi([a,b];t)'(t)|)dt$$

для любой функции $f \in \Omega_\phi^0$. Более того, данное неравенство обращается в равенство только для функций $\pm\phi([a,b];\cdot)$, если $2\theta < \omega$, или же только для сдвигов $\phi([a,b];\cdot)$, если $b-a = N\omega$ (при условии, что $\phi \in \Omega_\phi^0$).

2. В работах [217, 221] доказано, что в условиях теоремы 6.8.2 неравенство 6.8.5 справедливо для всех $m \in [p+1, \infty]$ и приведен пример, показывающий, что для $m < p+1$ неравенство 6.8.5 перестает выполняться.

3. Обозначим через $L_p = L_p(\mathbf{T}^m)$, $1 \le p \le \infty$, $\mathbf{T}^m = (-\pi, \pi]^m$, пространство всех 2π-периодических по каждой переменной функций $x : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ с конечными нормами $\|x\|_p = \|x\|_{L_p(\mathbf{T}^m)}$, где

$$\|x\|_p = \left\{ \int\limits_{\mathbf{T}^m} |x(t)|^p \, d\mu(t) \right\}^{1/p}, \text{ если } 1 \le p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup} \{|x(t)| : t \in \mathbf{T}^m\}$$

(мы предполагаем, что $\mathbf{T}^m$ снабжено нормированной мерой Лебега $d\mu(t) := dt/(2\pi)^m$).

Для любых $t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbf{R}^m$ и $j = 1, ..., m$ положим $t^1 = (t_2, ..., t_m)$, $t^m = (t_1, ..., t_{m-1})$ и $t^j = (t_1, ..., t_{j-1}, t_{j+1}, ..., t_m)$, $1 < j < m$. Обозначим через $L_p^j = L_p^j(\mathbf{T}^m)$ пространство всех функций $x \in L_p(\mathbf{T}^m)$ вида $x(t) = g\left(t^j\right)$, где $g \in L_p\left(\mathbf{T}^{m-1}\right)$. Для множества $M \subset \{1, ..., m\}$ положим

$$L_p^M = L_p^M(\mathbf{T}^m) := \sum_{j \in M} L_p^j(\mathbf{T}^m).$$

В случае $M = \{1, ..., m\}$ будем писать L_p^0 вместо L_p^M. Заметим, что функции из L_p^j не зависят от j-й переменной. Для $j = 1, ..., m$ и для $M \subset \{1, ..., m\}$ положим

$$L_{p,j} = L_{p,j}(\mathbf{T}^m) :=$$

$$:= \left\{ x \in L_p(\mathbf{T}^m) : \int\limits_{\mathbf{T}^1} x(t)\, dt_j = 0 \quad \text{для почти всех } \ t^j \right\},$$

$$L_{p,M} = L_{p,M}(\mathbf{T}^m) := \bigcap_{j \in M} L_{p,j}(\mathbf{T}^m).$$

В случае $M = \{1, ..., m\}$ будем писать $L_{p,0}$ вместо $L_{p,M}$.

Нам понадобятся понятия дробного интеграла и дробной производной в смысле Вейля (см. [131]). Для вектора $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m) \in \in \mathbf{R}_+^m$ положим $\mathrm{supp}\gamma := \{j : \gamma_j \neq 0\}$. Дробный интеграл $I_\gamma x$ от функции $x \in L_{1,\mathrm{supp}\gamma}$ можно определить как конволюцию, т.е.

$$I_\gamma x(t) := \left(B_\gamma * x\right)(t) = \int\limits_{\mathbf{T}^m} B_\gamma(t-\tau)\, x(\tau)\, d\mu(\tau),$$

где

$$B_\gamma(u) := \prod_{j:\gamma_j \neq 0} B_{\gamma_j}\left(u_j\right), \quad u = (u_1, ..., u_m),$$

и

$$B_{\gamma_j}\left(u_j\right) := 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma_j} \cos\left(k u_j - \gamma_j \frac{\pi}{2}\right).$$

Отметим, что $I_\gamma x \in L_{1,\mathrm{supp}\gamma}$.

Из теорем вложения (см. [312]) следует, что если $\gamma \in \mathbf{R}_+^m$ и $p, s \in [1, \infty]$ такие, что:

$$\text{а) } \min\left\{\gamma_j : j = 1, ..., m\right\} > p^{-1} - s^{-1} \quad \text{или} \quad \text{б) } p \geq s,$$

то для любой $x \in L_{p,\mathrm{supp}\gamma}$ функция $I_\gamma x$ принадлежит $L_s(\mathbf{T}^m)$ и оператор $I_\gamma : L_{p,\mathrm{supp}\gamma} \to L_s(\mathbf{T}^m)$ ограничен. Пусть γ, p, s удовлетворяют этим требованиям. Соответствующие пространства Соболева определяются следующим образом:

$$\mathcal{L}_{p,s}^\gamma = \mathcal{L}_{p,s}^\gamma(\mathbf{T}^m) := \left\{y : y = I_\gamma x + h : x \in L_{p,\mathrm{supp}\gamma}, h \in L_s^{\mathrm{supp}\gamma}\right\}.$$

Отметим, что любая функция $y \in \mathcal{L}_{p,s}^\gamma$ однозначно представима в виде $y = I_\gamma x + h : x \in L_{p,\mathrm{supp}\gamma}$, $h \in L_s^{\mathrm{supp}\gamma}$. Поэтому для такой функции y дробная производная $\mathcal{D}^\gamma y$ порядка γ корректно определена формулой

$$\mathcal{D}^\gamma y = \mathcal{D}^\gamma\left(I_\gamma x + h\right) = x.$$

Для вектора $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m) \in \mathbf{R}_+^m$ положим $|\gamma| = \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_j$. Пусть $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $e_m = (0, 0, ..., 1)$ – стандартный

базис в $\mathbf{R}^m$, $(t,s) := \sum\limits_{j=1}^{m} t_j s_j$ – скалярное произведение векторов $t = (t_1, ..., t_m)$ и $s = (s_1, ..., s_m)$.

Следующая теорема является многомерным аналогом неравенства Лигуна 6.2.1 в случае $q = 2$.

Теорема 2 [62]. *Пусть* $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m) \in \mathbf{R}_+^m$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, ..., m$, *и* $r, |\gamma| \in \mathbf{N}$, $|\gamma| < r$. *Тогда для любой функции* $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathcal{L}_{\infty,\infty}^{re_j}(\mathbf{T}^m)$ *выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{D}^\gamma x\|_{L_2(\mathbf{T}^m)} \le \frac{\left\|\varphi_{r-|\gamma|}\right\|_{L_2(\mathbf{T}^1)}}{\|\varphi_r\|_{L_\infty(\mathbf{T}^1)}^{1-|\gamma|/r}} \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^m)}^{1-|\gamma|/r} \prod_{j=1}^{m} \|\mathcal{D}^{re_j} x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^m)}^{\gamma_j/r},$$

которое обращается в равенство для функций вида $\psi_{n,r}(t) := \varphi_r((n,t))$, $n \in \mathbf{N}^m$.

В случае функций одной переменной неравенства для производных функций могут быть интерпретированы как неравенства для первообразных. В случае функций многих переменных это не так. Но именно неравенства для первообразных используются для приближения одного класса функций другим (см. [62]). И это позволило в работе [62] найти наилучшие приближения некоторых классов функций многих переменных квазиполиномами (см. дополнительные результаты к гл. 7, п. 5). Ниже приведен необходимый для этого аналог неравенства для производных из теоремы 2.

Напомним, что $E(x,H)_\infty := \inf_{h \in H} \|x - h\|_\infty$.

Теорема 3 [62]. *Пусть* γ *такое же, как и в теореме 2, и пусть* $r_j \in \mathbf{N}, r_j > |\gamma|$, $j = 1, ..., m$. *Тогда для любой функции* $x \in L_{\infty,0}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|I_\gamma x\right\|_{L_2(\mathbf{T}^m)} \le$$

$$\le \frac{\left\|\varphi_{|\gamma|}\right\|_{L_2(\mathbf{T}^1)}}{\prod\limits_{j=1}^{m} \left\|\varphi_{r_j}\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^1)}^{\gamma_j/r_j}} \prod_{j=1}^{m} E^{\gamma_j/r_j}\left(I_{re_j} x, L_\infty^j\right)_\infty \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^m)}^{1-\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\gamma_j}{r_j}}, \tag{Д.6.1}$$

которое обращается в равенство для функций вида $x_0(t) = \varphi_0((n,t))$, $n \in \mathbf{N}^m$.

4. Для дифференцируемой функции $x \in L_p(\mathbf{T})$, $p \in [1,\infty]$, рассмотрим величину

$$|||x|||_p := \sup\left\{E_0(x)_{L_p[a,b]} : x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b), \quad a,b \in \mathbf{R}\right\}. \tag{Д.6.2}$$

Отметим, что величины типа (Д.6.2) изучали А. Пинкус и О. Шиша [281]. В частности, они установили, что многие известные в теории приближений результаты остаются справедливыми и в пространствах L_p с локальными "нормами" типа (Д.6.2).

Теорема 4 [222]. *Пусть* $r,k \in \mathbf{N}$, $k < r$; $q \in [1,\infty]$, $p \in (0,\infty]$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ *выполняются неравенства*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{|||\varphi_r|||_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} |||x|||_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}} \tag{Д.6.3}$$

и

$$|||x|||_\infty \leq \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{|||\varphi_r|||_p^{\frac{r}{r+1/p}}} |||x|||_p^{\frac{r}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}}. \tag{Д.6.4}$$

Неравенства (Д.6.3) *и* (Д.6.4) *являются точными и обращаются в равенство для функций вида* $x(t) = a\varphi_r(nt+b)$; $a,b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

Замечание. Показатели $(r-k)/(r+1/p)$ и $r/(r+1/p)$ в неравенствах (Д.6.3) и (Д.6.4) соответственно являются максимально возможными.

В следующей теореме представлен аналог неравенства Лигуна (6.3.1), в котором учитывается число перемен знака производных.

Теорема 5 [222]. *Пусть* $r,k \in \mathbf{N}$; $k < r$; $q \in [1,\infty]$, $p \in (0,\infty]$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq$$

$$\leq \left(\frac{\nu(x^{(k)})}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{|||\varphi_r|||_p^{\frac{r-k+1/q}{r+1/p}}} |||x|||_p^{\frac{r-k+1/q}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p-1/q}{r+1/p}}. \tag{Д.6.5}$$

Неравенство (Д.6.5) *является точным и обращается в равенство для функций вида* $x(t) = a\varphi_r(nt+b)$*;* $a, b \in \mathbf{R}$*,* $n \in \mathbf{N}$.

5. Если $\epsilon > 0$ и S_ϵ – некоторая равномерная сетка на $\mathbf{R}$ с шагом ϵ, то для $x \in L_\infty(\mathbf{T})$ положим

$$\|x\|_{S_\epsilon} = \sup_{x \in S_\epsilon} |x(t)|.$$

В [117] получены следующие утверждения. По поводу используемых ниже обозначений см. с. 124, 125.

Теорема 6. *Пусть* $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$*,* $p \in [1, \infty)$*,* $\epsilon = 2\pi/l$*,* $l \geq 2$ *и* $k = 1, 2, ..., r-1$*. Если число* λ *выбрано из условия*

$$\varphi^*_{\lambda,r}(\epsilon, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty) = E_0(x)_{S_\epsilon}, \tag{Д.6.6}$$

то

$$\|x^{(k)}_\pm\|_{L_p(\mathbf{T})} \leq \|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)\pm\|_{L_p(\mathbf{T})}. \tag{Д.6.7}$$

Если при данных значениях $E_0(x)_{S_\epsilon}$*,* $\|x^{(r)}_+\|_\infty$*,* $\|x^{(r)}_-\|_\infty$*, число* λ *из условия* (Д.6.6) *такое, что* $\lambda \in \mathbf{N}$*,* $n < \lambda$*, и, кроме того,* $|t'_{\lambda,max} - t'_{\lambda,min}| = n\epsilon$ *при некотором* $n \in \mathbf{N}$*,* $n \leq \lambda$*, то неравенство* (Д.6.7) *обращается в равенство для функции вида* $g(t) = \varphi_{\lambda,r-k}(t, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)$*, для которой в силу сделанных предположений* $E_0(g)_{S_\epsilon} = E_0(x)_{S_\epsilon} = \varphi^*_{\lambda,r}(\epsilon, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)$*, а в силу ее определения* $\|g^{(r)}_\pm\|_\infty = \|x^{(r)}_\pm\|_\infty$.

Теорема 7. *Пусть* $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$*,* $p \in [1, \infty)$*,* $\epsilon = \pi/l$*,* $l \geq 2$ *и* $k = 1, 2, ..., r-1$*. Тогда выполняется неулучшаемое неравенство*

$$\|x^{(k)}_\pm\|_{L_p(\mathbf{T})} \leq \epsilon^{r-k} \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)\pm\|_{L_p(\mathbf{T})}}{\psi_r^{-1}(\epsilon^{-r}E_0(x)_{S_\epsilon}, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty)^{r-k}}. \tag{Д.6.8}$$

Неравенство (Д.6.8) *обращается в равенство в тех же случаях, что и неравенство* (Д.6.7).

Теорема 8. *Если* $x \in L^2_\infty(\mathbf{T})$ *и* $\epsilon = \pi/l,\ l \in \mathbf{N},\ l \geq 2$, *то для любого* $p \in [1, \infty)$ *имеем*

$$\|x'\|_{L_p(\mathbf{T})} \leq \left(\frac{2\pi}{p+1}\right)^{1/p} \sqrt{2\|x''\|_\infty \left(\|x\|_{S_\epsilon} + \frac{\epsilon^2}{8}\|x''\|_\infty\right)}.$$

Неравенство обращается в равенство для любой функции вида $x(t) = \varphi_{m,2}(t)$, *где* $m \in \mathbf{N}$ *является делителем* l.

6. В этом пункте будем использовать обозначения из (Д.2.12).

Теорема 9 [32]. *Пусть* $x \in L^r_\infty$. *Тогда при всех* $\alpha \geq \|\mathcal{P}x_+\|_\infty$, $\beta \geq \|\mathcal{P}x_-\|_\infty$

$$\|Qx_\pm\|_p \geq \Theta^\pm_{\mathcal{P},Q;p}(E(x)_\infty; \alpha, \beta) \tag{Д.6.9}$$

или, что эквивалентно,

$$\Psi^\pm_{\mathcal{P}/Q;p}(\|Qx_\pm\|_p; \alpha, \beta) \geq \Psi_{\mathcal{P}}(E(x)_\infty; \alpha, \beta).$$

Это – обобщения неравенства Лигуна (6.2.1) на случай дифференциальных операторов, определенных в (Д.2.12).

Если $\mathcal{P}(t) = t^r$, $Q(t) = t^k$ $(k < r)$, то из неравенства (Д.6.9) выводим неравенство (6.2.6).

7. В [51] получено обобщение неравенства (6.3.1).

Пусть $r = 1, 2, \ldots$, $\Im_r(t) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k t^{r-k}$ – произвольный полином степени не выше r с вещественными коэффициентами и

$$\Im_r(D) = \sum_{k=0}^{r} a_k D^{r-k}, \quad D = \frac{d}{dt},$$

соответствующий дифференциальный оператор.

Пусть $\Im_r(t)$ представим в виде $\Im_r(t) = \Im_k(t)\Im_{r-k}(t)$, где $\Im_k \in \pi_k$, $\Im_{r-k} \in \pi_{r-k}$. Для $\lambda > 0$ и $p \in [1, \infty]$ положим

$$\Psi_{p,\Im_r}(\lambda) = \frac{1}{4}\lambda^{-1/p}\|\varphi_{\lambda,\Im_r}(\cdot/\lambda)\|_p$$

и

$$\Theta_{p,\Im_r,\Im_{r-k}}(\lambda) = \Psi_{p,\Im_r}(\Psi^{-1}_{\infty,\Im_{r-k}}(\lambda)).$$

Теорема 10 [51]. *Если полином $\Im_r$ имеет только вещественные нули, то для любой функции $x \in L_V(\mathbf{T})$*

$$\frac{\bigvee\limits_0^{2\pi}(\Im_k(D)x)}{4\bigvee\limits_0^{2\pi}(\Im_r(D)x)} \le \Theta^{-1}_{p,\Im_r,\Im_{r-k}}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p}\frac{\|x\|_p}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(\Im_r(D)x)}\right).$$

8. Будем использовать обозначения из п. Д.2.12. Нам понадобятся также следующие обозначения. Пусть $\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}(b) := \|\tilde{\varphi}_{b,\mathcal{P}}(b^{-1}(\cdot))\|_1$. Функция $\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}(b)$ непрерывна и с ростом b строго убывает от $+\infty$ до 0. Поэтому в $(0,\infty)$ определена обратная к $\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}(b)$ функция $\tilde{\Psi}_{\mathcal{P}}(y)$, которая также строго убывает с ростом y. Положим $\tilde{\Theta}_{\mathcal{P},Q}(t) = (\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}/Q} \circ \tilde{\Psi}_{\mathcal{P}})(t)$.

Теорема 11 [50]. *Пусть* $x \in L^r_\infty$ $(r = 2, 3, ...)$, $(\mathcal{P}/Q)(t) = t^l \prod\limits_{p=1}^{(r-k-l)/2}(t^2 - a_p^2)$. *Тогда*

$$\|Q\tilde{x}\|_1 \le \tilde{\Theta}_{\mathcal{P},Q;1}\left(\frac{E(x)_\infty}{\|\mathcal{P}\|_\infty}\right)\|\mathcal{P}\|_\infty. \qquad (\text{Д}.6.10)$$

Неравенство (Д.6.10) *является точным на L^r_∞ и обращается в равенство для функций $x = a\varphi_{b,\mathcal{P}}$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{N}$.*

9. Будем использовать обозначения из п. Д.2.12. В следующей теореме представлено обобщение неравенства (6.4.1).

Теорема 12 [92]. *Для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ справедливо неравенство*

$$\|Q(D)x\|_{L_\infty(\mathbf{T})} \le \|\mathcal{P}(D)x\|_{L_\infty(\mathbf{T})}\Phi\left(\frac{\|x\|_\infty}{\|\mathcal{P}(D)x\|_{L_\infty(\mathbf{T})}}\right). \quad (\text{Д}.6.11)$$

Неравенство (Д.6.11) *обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi_{\mathcal{P},1}(t)$.*

Обозначим через $\varphi_{b,\mathcal{P};\alpha,\beta}$ $2\pi/b$-периодическое решение уравнения $\mathcal{P}(D)x(t) = \varphi_{b,\alpha,\beta}(t)$, имеющее нулевое среднее значение на периоде. Положим $\Theta^{\pm}_{\mathcal{P};\infty,\alpha,\beta}(b) = \|(\varphi_{b,\mathcal{P};\alpha,\beta})_{\pm}\|_{L_\infty(\mathbf{T})}$, $\Theta_{\mathcal{P};q,\alpha,\beta}(b) = E_0(\varphi_{b,\mathcal{P};\alpha,\beta})_{Lq([0,2\pi/b]}$ и $\Phi^{\pm}_{\mathcal{P};\infty;Q,q,\alpha,\beta} = \Theta^{\pm}_{\mathcal{P}/Q;\infty,\alpha,\beta} \circ \Theta^{-1}_{\mathcal{P};q,\alpha,\beta}$.

Приведем обобщение теоремы 6.4.2.

Теорема 13 [290]. *Для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ при любых $\alpha, \beta > 0$ справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\|Q(D)x_{\pm}\|_{L_\infty(\mathbf{T})} \le$$

$$\le \|\mathcal{P}(D)x\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}} \Phi^{\pm}_{\mathcal{P};\infty,Q,p,\alpha,\beta}\left(\frac{\|x\|_{Lp(\mathbf{T})}}{\|\mathcal{P}(D)x\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}}\right).$$

Слудующее утверждение является аналогом теоремы 6.5.1.

Теорема 14 [290]. *Для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$, такой, что $\bigvee\limits_0^{2\pi}\left(x^{(r)}\right) < \infty$, справедливы неравенства*

$$E(Q(D)x)_{L_\infty(\mathbf{T})} \le \frac{1}{4}\bigvee_0^{2\pi}(\mathcal{P}(D)x)\Phi_{Q,\infty;\mathcal{P},p}\left(\frac{4\|x\|_{Lp(\mathbf{T})}}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(\mathcal{P}(D)x)}\right),$$

$$\|Q(D)x\|_{L_\infty(\mathbf{T})} \le \frac{1}{2}\bigvee_0^{2\pi}(\mathcal{P}(D)x)\Phi^{1/2}_{Q^2(\cdot)/((\cdot)\mathcal{P}(\cdot)),\infty;\mathcal{P},p}\left(\frac{4\|x\|_{Lp(\mathbf{T})}}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(\mathcal{P}(D)x)}\right).$$

10. В работе [22] доказано, что если ω – выпуклый вверх модуль непрерывности и при некотором $\epsilon > 0$ $\int\limits_0^{\epsilon}\omega(t)/t\,dt < \infty$, то

$$M_0(\omega) := \sup_{x\in H^\omega}\|\tilde{x}\|_\infty = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{\sin t}dt.$$

Отсюда легко следует, что если функция $x \in H^\omega$ такая, что $\|x\|_\infty \le \delta$, то

$$\|\tilde{x}\|_\infty \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\omega^{-1}(2\delta)} \frac{\omega(t)}{\sin t/2} dt + \frac{\delta}{\pi} \int\limits_{\omega^{-1}(2\delta)}^{\pi} \frac{dt}{\sin t/2},$$

причем полученная оценка модуля непрерывности оператора сопряжения на классе H^ω неулучшаема.

В случае, когда $\omega(t) = t$, из последнего неравенства выводим

$$\|\tilde{x}\|_\infty \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\delta} \frac{t}{\sin t/2} dt + \frac{\delta}{\pi} \int\limits_{2\delta}^{\pi} \frac{dt}{\sin t/2}.$$

В свою очередь, отсюда получаем, что для любой функции $x \in$ $\in L^1_\infty(\mathbf{T})$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{x}\|_\infty \le \frac{\|x'\|_\infty}{\pi} \int\limits_0^{2\delta} \frac{t}{\sin t/2} dt + \frac{\|x\|_\infty}{\pi} \int\limits_{2\delta}^{\pi} \frac{dt}{\sin t/2}.$$

Глава 7

ПРИЛОЖЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ ТИПА КОЛМОГОРОВА

7.1. Задача Стечкина и задача восстановления значений неограниченного оператора

В данном параграфе приведем общие постановки задачи С.Б. Стечкина о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на некотором классе Q элементов банахова пространства, задачи восстановления значений оператора на элементах класса Q при условии, что элементы класса заданы с известной погрешностью, кратко изложим основные общие подходы к их решению, а также обсудим взаимные связи и связи с другими задачами. При этом нашей основной целью будет обсуждение связей этих задач с неравенствами типа Колмогорова. Некоторые результаты по решению этих задач для конкретных операторов и классов функций будут приведены в § 7.2.

Подробнее с результатами исследования задачи С.Б. Стечкина и родственных задач читатель может ознакомиться по обзорам [19, 17] и по цитируемым в этих обзорах статьям.

Задача наилучшего приближения неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на некотором классе элементов банахова пространства появилась в исследованиях С.Б. Стечкина в 1965 г. [296]. В его работе [298] 1967 г. была дана постановка задачи, приведены первые принципиальные результаты и решение для операторов дифференцирования малого порядка.

Рассмотрим общую постановку задачи наилучшего приближения неограниченного оператора линейными ограниченными операторами.

Пусть X, Y – банаховы пространства; $A : X \to Y$ – некоторый оператор (не обязательно линейный) с областью определения $D(A) \subset X$; $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N; X, Y)$ – множество линейных ограниченных операторов T из X в Y, нормы которых $\|T\| = \|T\|_{X \to Y}$ не превосходят числа $N > 0$; $Q \subset D(A)$ – некоторый класс элементов. Величина

$$U(T) = \sup\{\|Ax - Tx\|_Y : x \in Q\} \tag{7.1.1}$$

называется уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора A на классе Q, а величина

$$E(N) = E(N; A, Q) := \inf\{U(T) : T \in \mathcal{L}(N)\} \tag{7.1.2}$$

называется наилучшим приближением оператора A множеством ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q.

Задача состоит в вычислении (исследовании) величины $E(N)$ и нахождении (исследовании вопросов существования, единственности, характеризации) экстремального оператора, т. е. оператора, реализующего нижнюю грань в правой части (7.1.2).

Для оператора A, класса Q, пространств X и Y каждую из двух функций

$$\Omega(\delta) = \sup\{\|Ax_1 - Ax_2\|_Y : x_1, x_2 \in Q, \quad \|x_1 - x_2\|_X \le \delta\}, \tag{7.1.3}$$

$$\omega(\delta) = \sup\{\|Ax\|_Y : x \in Q, \quad \|x\|_X \le \delta\}, \tag{7.1.4}$$

переменного δ называют модулем непрерывности оператора A на классе Q.

Если оператор A линеен и множество Q центрально-симметрично и выпукло, то эти характеристики связаны соотношением

$$\Omega(2\delta) = 2\omega(\delta). \tag{7.1.5}$$

Действительно, если $\|x_1 - x_2\| \le 2\delta$, то для линейного оператора A

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_Y = \|A(x_1 - x_2)\|_Y = 2\|A\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\|_Y \le 2\omega(\delta),$$

так что

$$\Omega(2\delta) \le 2\omega(\delta). \tag{7.1.6}$$

С другой стороны, пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $x \in Q$ ($\|x\|_X = \delta$), такое, что

$$\|Ax\|_Y \ge \omega(\delta) - \varepsilon.$$

Если Q – центрально-симметричное множество, то элемент $-x$ принадлежит Q и, следовательно,

$$\Omega(2\delta) \ge \|Ax - A(-x)\|_Y = 2\|Ax\|_Y \ge 2\omega(\delta) - 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε получаем

$$\Omega(2\delta) \ge 2\omega(\delta). \tag{7.1.7}$$

Сопоставляя (7.1.6) и (7.1.7), устанавливаем (7.1.5).

Пусть, далее,

$$\Delta(N) = \Delta(N, Q) = \sup\{\omega(\delta) - N\delta : \delta > 0\} =$$

$$= \sup\{\|Ax\|_Y - N\|x\|_X : x \in Q\}, \tag{7.1.8}$$

$$l(\delta) = \inf\{E(N) + N\delta : N \ge 0\}. \tag{7.1.9}$$

Следующая теорема С.Б. Стечкина [297] дает простую, но часто используемую и эффективную оценку снизу величины наилучшего приближения оператора через его модуль непрерывности.

Теорема 7.1.1. *Если A – однородный (в частности, линейный) оператор, Q – центрально-симметричное, выпуклое множество из области определения оператора A, то выполняются неравенства*

$$E(N) \ge \Delta(N), \quad N \ge 0, \tag{7.1.10}$$

$$\omega(\delta) \le l(\delta), \quad \delta \ge 0. \tag{7.1.11}$$

Если при этом существует элемент $x \in Q$ и линейный ограниченный оператор T, такие, что

$$\|Ax\|_Y = U(T) + \|T\|\|x\|_X, \tag{7.1.12}$$

то справедливы равенства

$$\omega(\|x\|_X) = \|Ax\|_Y, \quad E(\|T\|) = U(T) = \|Ax\|_Y - \|T\|\|x\|_X, \tag{7.1.13}$$

и, следовательно, оператор T является экстремальным в задаче (7.1.2) *при $N = \|T\|$, а элемент x – в задаче* (7.1.4) *при $\delta = \|x\|_X$.*

Доказательство. Для любого оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ и для любого $x \in Q$ имеем

$$\|Ax - Tx\|_Y \geq \|Ax\|_Y - \|Tx\|_Y \geq$$

$$\geq \|Ax\|_Y - \|T\|\|x\|_X \geq \|Ax\|_Y - N\|x\|_X.$$

Поэтому

$$\sup_{x\in Q} \|Ax - Tx\|_Y \geq \sup_{x\in Q} (\|Ax\|_Y - N\|x\|_X) =$$

$$= \sup_{\delta>0} \sup_{\substack{x\in Q \\ \|x\|_X=\delta}} (\|Ax\|_Y - N\delta) = \sup_{\delta>0} (\omega(\delta) - N\delta).$$

Значит, для любого $T \in \mathcal{L}(N)$ имеем $U(T) \geq \Delta(N)$, и неравенство (7.1.10) доказано.

Далее, для любых $x \in Q$, $\|x\|_X \leq \delta$, $N \geq 0$ и $T \in \mathcal{L}(N)$ имеем

$$\|Ax\|_Y \leq \|Ax - Tx\|_Y + \|Tx\|_Y \leq U(T) + \|T\|\|x\|_X \leq U(T) + N\delta.$$

Следовательно, для любого такого x

$$\|Ax\|_Y \leq \inf_{T\in\mathcal{L}(N)} U(T) + N\delta = E(N) + N\delta$$

и, значит,

$$\omega(\delta) \leq \inf_{N>0} \{E(N) + N\delta\} = l(\delta).$$

Неравенство (7.1.11) также доказано.

При выполнении условия (7.1.12) имеем с учетом (7.1.10)

$$E(\|T\|) \geq \Delta(\|T\|) \geq \|Ax\|_Y - \|T\|\|x\|_X = U(T).$$

Поскольку неравенство $E(\|T\|) \leq U(T)$ очевидно, второе из соотношений (7.1.13) доказано.

Согласно (7.1.11) и определению $l(\delta)$ имеем (если x и T из условия (7.1.12))

$$\omega(\|x\|_X) \leq l(\|x\|_X) = \inf_{N>0} \{E(N) + N\|x\|_X\} \leq$$

$$\leq E(\|T\|) + \|T\|\|x\|_X = \|Ax\|_Y.$$

Так как неравенство $\omega(\|x\|_X) \geq \|Ax\|_Y$ очевидно, первое из соотношений (7.1.13) также доказано. Теорема доказана.

Часто классы Q элементов из $D(A)$ в задачах (7.1.2) и (7.1.4) задаются следующим образом. Фиксируется некоторый оператор $B : X \to Z$ (Z – некоторое новое банахово пространство), такой, что $D(B) \subset D(A)$. Затем по определению полагают

$$Q_B = \{x \in D(B) : \|Bx\|_Z \leq 1\}.$$

Если теперь известен модуль непрерывности оператора A на классе Q_B, то для любого $x \in D(B)$, $x \neq 0$, имеем (так как $x/\|Bx\|_Z \in Q_B$)

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|Bx\|_Z}\right)\right\|_Y \leq \omega\left(\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right),$$

и если оператор A однороден, то

$$\|Ax\|_Y \leq \|Bx\|_Z \omega\left(\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right). \tag{7.1.14}$$

Соотношение (7.1.14) – это неравенство типа Колмогорова, оценивающее $\|Ax\|_Y$ через $\|x\|_X$ и $\|Bx\|_Z$ (точнее, абстрактная версия неравенства типа Колмогорова в мультипликативной форме).

Если, с другой стороны, однородные операторы A и B такие, что с некоторой функцией $\omega(\delta)$ выполняется неравенство (7.1.14), причем для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует элемент $x_{\varepsilon,\delta} \in D_B$, для которого $\|x_{\varepsilon,\delta}\|_X = \delta$, $\|Bx_{\varepsilon,\delta}\|_Z = 1$ и

$$\|Ax_{\varepsilon,\delta}\|_Y > (1-\varepsilon)\omega(\delta),$$

то (см. п. 1.7) $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности оператора A на классе Q_B.

В частности, если при сформулированных условиях модуль непрерывности оператора A на классе Q_B есть однородная функция степени $\alpha \in (0,1)$, то неравенство (7.1.14) перепишется в виде

$$\|Ax\|_Y \le \omega(1)\|x\|_X^{\alpha}\|Bx\|_Z^{1-\alpha}, \tag{7.1.15}$$

при этом $\omega(1)$ – неулучшаемая константа в неравенстве (7.1.15). Последнее утверждение будет справедливо (см. п. 1.7), если, например, $X = L_p(G)$, $Y = L_q(G)$, $Z = L_s(G)$, ($G = \mathbf{R}$ или $\mathbf{R}_+$), $A = d^k/dt^k$, $B = d^r/dt^r$, причем параметры q, p, s, r и k связаны (см. п. 4.2) соотношениями

$$\frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p} \le \frac{r-k}{r},$$

при этом

$$\alpha = \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}. \tag{7.1.16}$$

Учитывая утверждение (7.1.10) теоремы 7.1.1, видим, что если выполняется неулучшаемое неравенство вида (7.1.15), то для наилучшего приближения оператора A на классе Q_B операторами, норма которых не превосходит N, справедливо неравенство

$$E(N) \ge \sup_{\delta\ge 0}\{\omega(1)\delta^{\alpha} - N\delta\} = (1-\alpha)\omega(1)\left(\frac{\alpha\omega(1)}{N}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} =$$

$$= (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}N^{-\alpha/(1-\alpha)}\omega(1)^{1/(1-\alpha)}.$$

Таким образом, знание точного неравенства вида (7.1.15) позволяет для величины $E(N)$ написать

$$E(N) \ge (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}N^{-\alpha/(1-\alpha)}\omega(1)^{1/(1-\alpha)}.$$

В частности, если известна неулучшаемая константа в неравенстве

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le K\,\|x\|_p^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha},$$

где α определяется соотношением (7.1.16), то для наилучшего приближения оператора d^k/dt^k на классе $W^r_{p,s} = \{x \in L_p(G) : x^{r-1}$ – локально абсолютно непрерывна и $\left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(G)} \leq 1\}$ в метрике $L_q(G)$ справедлива оценка

$$E(N) \geq \left(\frac{k-1/q+1/p}{r-1/s+1/p}\right)\left(\frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}\right)^{\frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/q+1/p}} \times$$

$$\times K^{\frac{r-1/s+1/p}{k-1/q+1/p}} N^{-\frac{r-k-1/s+1/q}{k-1/q+1/p}}.$$

С другой стороны, если при любом $N > 0$ известна величина $E(N)$ наилучшего приближения оператора A на классе Q_B, то согласно соотношению (7.1.11) из теоремы 7.1.1 для модуля непрерывности оператора A на классе Q_B имеем оценку

$$\omega(\delta) \leq E(N) + N\delta.$$

Следовательно, для любого $x \in D(B)$ имеем

$$\|Ax\|_Y \leq \|Bx\|_Z \omega\left(\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right) \leq \|Bx\|_Z \left(E(N) + N\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right),$$

так что

$$\|Ax\|_Y \leq N\|x\|_X + E(N)\|Bx\|_Z. \tag{7.1.17}$$

Это абстрактная версия неравенства Колмогорова в аддитивной форме. Минимизируя правую часть (7.1.17) по N, получаем

$$\|Ax\|_Y \leq \|Bx\|_Z \min_N \left(E(N) + N\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right) = \|Bx\|_Z l\left(\frac{\|x\|_X}{\|Bx\|_Z}\right). \tag{7.1.18}$$

Таким образом, знание величины $E(N)$ позволяет получать неравенства типа Колмогорова (7.1.17) и (7.1.18).

В некоторых случаях оказывается, что $\omega(\delta) = l(\delta)$, и тогда неравенства (7.1.17) и (7.1.18) приводят к неулучшаемым неравенствам типа Колмогорова вида (7.1.14). По сути, условия выполнения равенства $\omega(\delta) = l(\delta)$ содержатся в теореме 7.1.1. Они таковы: для

любого $N > 0$ существуют оператор T с нормой $\|T\| = N$ и элемент x, для которых выполняется равенство (7.1.12). Другие условия даются следующей леммой.

Лемма 7.1.1. *Если $\omega(\delta)$ – выпуклая вверх функция, и для любого $N > 0$*

$$E(N) = \sup_{\delta>0}\{\omega(\delta) - N\delta\},$$

то для любого $\delta > 0$ имеем

$$\omega(\delta) = l(\delta).$$

Доказательство. Пусть

$$l(\delta) = \inf_{N\geq 0}\{E(N) + N\delta\} = \inf_{N\geq 0}\{\sup_{\delta_1>0}\{\omega(\delta_1) - N\delta_1\} + N\delta\}.$$

Так как $\omega(\delta)$ – выпуклая вверх функция, то найдется N_0, для которого

$$\sup_{\delta_1>0}\{\omega(\delta_1) - N_0\delta_1\} = \omega(\delta) - N_0\delta$$

(при этом N_0 – субдифференциал (производная) функции $\omega(\delta)$ в точке δ). Сопоставляя эти два соотношения, получаем

$$l(\delta) \leq \{\omega(\delta) - N_0\delta\} + N_0\delta = \omega(\delta).$$

Неравенство $\omega(\delta) \leq l(\delta)$ было отмечено раньше (теорема 7.1.1). Поэтому $\omega(\delta) = l(\delta)$, и лемма доказана.

Таким образом, один из возможных методов получения неулучшаемых неравенств типа Колмогорова состоит в том, чтобы для оператора A при любом $N > 0$ подобрать оператор T, норма которого не превосходит N и такой, что

$$\sup_{\|Bx\|_Z\leq 1}\|Ax - Tx\|_Y = E(N).$$

Тогда для любого $x \in D_B$ получаем неравенство (7.1.17) следующим образом:

$$\|Ax\|_Y \leq \|Ax - Tx + Tx\|_Y \leq \|Tx\|_Y + \|Ax - Tx\|_Y \leq$$
$$\leq N\|x\|_X + E(N)\|Bx\|_Z.$$

Минимизируя правую часть по N, приходим к (7.1.18), и в случае, когда $\omega(\delta) = l(\delta)$, получаем неулучшаемое неравенство (7.1.14).

По сути, действие этого метода нами уже было в известной степени проиллюстрировано (см. § 3.2).

Многие задачи вычислительной математики, теории функций и других разделов математики являются некорректными задачами восстановления значений оператора A на элементах класса $Q \subset D(A)$ в предположении, что элементы класса Q заданы с известной погрешностью. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества $\mathcal{R}$ операторов (однозначных отображений), действующих из пространства X в пространство Y. При этом в качестве $\mathcal{R}$, как правило, берется одно из следующих множеств:

$\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, Y)$ – множество всех отображений пространства X в пространство Y;

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, Y)$ – множество линейных операторов, действующих из X в Y;

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, Y)$ – множество всех линейных ограниченных операторов из X в Y;

$\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N; X, Y)$ – множество операторов из $\mathcal{B}$, норма которых не превосходит N.

Для числа $\delta \geq 0$ и оператора $T \in \mathcal{R}$ положим

$$U_\delta(T) = U_\delta(T; A, Q) := \sup\{\|Ax - T\eta\|_Y : x \in Q, \qquad (7.1.19)$$

$$\eta \in X, \quad \|x - \eta\|_X \leq \delta\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}; A, Q) = \inf\{U_\delta(T) : T \in \mathcal{R}\} \qquad (7.1.20)$$

есть величина наилучшего восстановления оператора A с помощью множества отображений (методов восстановления) $\mathcal{R}$ на элементах класса Q, заданных с погрешностью δ.

Связь задачи (7.1.20) с неравенствами типа Колмогорова, с одной стороны, и задачей приближения неограниченных операторов ограниченными, с другой, дается следующей теоремой.

Теорема 7.1.2. *Если Q – уравновешенное множество и A – однородный оператор, то*

$$\omega(\delta) \le \mathcal{E}_\delta(Q) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{B}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \le l(\delta). \tag{7.1.21}$$

Если при этом существуют элемент $x \in Q$ и оператор $T \in \mathcal{B}$ со свойством (7.1.12) *из теоремы* 7.1.1, *то*

$$\|Ax\|_Y = \omega(\delta) = \mathcal{E}_\delta(Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{B}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}), \quad \delta = \|x\|_X.$$

Доказательство. Для оператора $T \in \mathcal{O}$ положим

$$v(T) = \sup_{\substack{x\in Q \\ \|x\|_X \le \delta}} \|Ax - T\theta\|_Y,$$

где θ – нулевой элемент пространства X. Ясно, что

$$v(T) \le U_\delta(T).$$

Если $x \in Q$, то и $-x \in Q$, и $v(T) \ge \max\{\|Ax - T\theta\|_Y, \|Ax + T\theta\|_Y\}$. Следовательно, $v(T) \ge \|Ax\|_Y$, если $\|x\|_X \le \delta$, $x \in Q$. Значит, $v(T) \ge \omega(\delta)$, и, тем более, $U_\delta(T) \ge \omega(\delta)$. Первое из неравенств (7.1.21) доказано.

Далее, для любого оператора $T \in \mathcal{L}(N)$, $N > 0$, имеем

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \le U_\delta(T) = \sup_{x\in Q} \sup_{\eta:\|\eta - x\|_X \le \delta} \|Ax - T\eta\|_Y \le$$

$$\le \sup_{x\in Q} \sup_{\eta:\|\eta - x\|_X \le \delta} \{\|Ax - Tx\|_Y + \|Tx - T\eta\|_Y\} \le$$

$$\le \sup_{x\in Q} \{\|Ax - Tx\|_Y + \sup_{\eta:\|\eta - x\|_X \le \delta} \|T\| \|x - \eta\|_X\} \le$$

$$\le \sup_{x\in Q} \|Ax - Tx\|_Y + N\delta = U(T) + N\delta.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \le \inf_{T\in\mathcal{L}(N)} U(T) + N\delta = E(N) + N\delta$$

и, значит,

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \le \inf_{N\ge 0}\{E(N)+N\delta\} = l(\delta).$$

Этим доказаны остальные из соотношений (7.1.21).

Если существует элемент $x \in Q$ и оператор $T \in \mathcal{B}$, такие, что

$$\|Ax\|_Y = U(T) + \|T\|\|x\|_X,$$

то при $\delta = \|x\|_X$ имеем

$$l(\delta) = l(\|x\|_X) \le E(\|T\|) + \|T\|\|x\|_X = \|Ax\|_Y = \omega(\|x\|_X) = \omega(\delta).$$

Этим с учетом неравенства $\omega(\delta) \le l(\delta)$ доказано последнее утверждение теоремы. Теорема доказана.

Напомним, что для $M \subset Y$ величина

$$r(M) = r(M)_Y = \inf_{z\in Y}\sup_{y\in M}\|z-y\|_Y \tag{7.1.22}$$

есть чебышевский радиус множества M, а величина

$$d(M) = d(M)_Y = \sup\{\|y_1-y_2\|_Y : y_1, y_2 \in M\}$$

есть диаметр множества M. Если нижняя грань в (7.1.22) достигается на некотором элементе $\overline{z}$, то $\overline{z}$ называется чебышевским центром множества M.

Теорема 7.1.3. *Если Q – уравновешенное множество, то*

$$\omega(\delta) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) \le 2\omega(\delta), \tag{7.1.23}$$

точнее,

$$\frac{1}{2}\Omega(2\delta) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) \le H(Y)\Omega(2\delta), \tag{7.1.24}$$

где $H(Y)$ – константа Юнга пространства Y:

$$H(Y) = \sup\left\{\frac{r(M)}{d(M)} : M \subset Y\right\}.$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) = \sup\{r(AQ(\eta,\delta)) : \eta \in Q(\delta)\}, \tag{7.1.25}$$

где

$$Q(\eta,\delta) = Q \cap V(\eta,\delta), \quad V(\eta,\delta) = \{z \in X : \|\eta - z\|_X \le \delta\},$$

$$Q(\delta) = \bigcup_{x\in X} V(x,\delta).$$

Доказательство. Соотношение (7.1.25) означает, что наилучшим (нелинейным) регуляризатором для оператора A является оператор T, который элементу η сопоставляет чебышевский центр множества $AQ(\eta,\delta)$ (если такой существует).

Докажем (7.1.25). Имеем

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) = \inf_{T\in\mathcal{O}} \sup_{\eta\in Q(\delta)} \sup_{x\in Q(\eta,\delta)} \|Ax - T\eta\|_Y.$$

Согласно определению (7.1.22)

$$\sup_{x\in Q(\eta,\delta)} \|Ax - T\eta\|_Y \ge r(AQ(\eta,\delta))_Y.$$

Поэтому

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) \ge \sup_{\eta\in Q(\delta)} r(AQ(\eta,\delta))_Y.$$

Доказывая неравенство противоположного смысла, предполагаем, что при любом $\eta \in Q(\delta)$ существуют чебышевские центры $z(\eta)$ множеств $AQ(\eta,\delta)$. Тогда оператор

$$T\eta = z(\eta), \quad \eta \in Q(\delta),$$

дает оценку

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) \le U(T\eta) = \sup_{\eta\in Q(\delta)} r(AQ(\eta,\delta))_Y.$$

Соотношение (7.1.25) доказано.

Теперь докажем соотношение (7.1.24). Имеем

$$d(AQ(\eta,\delta))_Y = \sup_{x,y\in Q(\eta,\delta)} \|Ax - Ay\|_X \le \Omega(2\delta),$$

причем на самом деле, как нетрудно видеть,

$$\sup_{\eta\in Q(\delta)} d(AQ(\eta,\delta))_Y = \Omega(2\delta).$$

Поэтому

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) = \sup_{\eta\in Q(\delta)} r(AQ(\eta,\delta))_Y =$$

$$= \sup_{\eta\in Q(\delta)} \frac{r(AQ(\eta,\delta))_Y}{d(AQ(\eta,\delta))_Y} d(AQ(\eta,\delta))_Y \le$$

$$\le H(Y) \sup_{\eta\in Q(\delta)} d(AQ(\eta,\delta))_Y \le H(Y)\Omega(2\delta).$$

Теорема доказана.

По поводу соотношения (7.1.24) заметим, что константа Юнга $H(Y)$ для любого пространства Y удовлетворяет неравенствам $1/2 \le H(Y) \le 1$.

В теореме 7.1.2 была дана оценка $\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O})$ и $\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L})$ сверху через $l(\delta)$, а в теореме 7.1.3 – двухсторонние оценки $\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O})$ через $\Omega(\delta)$. Покажем, что для $\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L})$ можно дать оценку снизу через $l(\delta)$.

Пусть $T \in \mathcal{L}$. Запишем $U_\delta(T)$ в виде

$$U_\delta(T) = \sup_{x\in Q} \sup_{\|y\|_X\le\delta} \|Ax - Tx + Ty\|_Y.$$

Для любых $a, b \in Y$ имеем

$$\|a+b\|_Y + \|a-b\|_Y \ge \|a\|_Y + \|b\|_Y.$$

Взяв $a = Ax - Tx$, $b = Ty$, получим

$$2U_\delta(T) \ge \sup_{x\in Q} \sup_{\|y\|_X\le\delta} (\|Ax - Ty\|_Y \ + \ \|Tx\|_Y) =$$

$$= U(T) \ + \ \delta\|T\| \ge l(\delta),$$

так что

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \geq \frac{1}{2} l(\delta),$$

и окончательно

$$\frac{1}{2} l(\delta) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \leq l(\delta).$$

В следующем утверждении даны условия, при которых знание модуля непрерывности оператора A на классе Q позволяет полностью решить задачу восстановления значений оператора A на классе Q.

Теорема 7.1.4. *Если $\omega(\delta)$ – выпуклая вверх на $[0, \infty]$ функция и для любого $N > 0$*

$$E(N) = \sup_{\delta > 0} \{\omega(\delta) - N\delta\},$$

то для любого $\delta > 0$

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) = \omega(\delta),$$

причем экстремальные операторы в задаче (7.1.20) *и задаче восстановления оператора при $\delta > 0$, если N является субдифференциалом (производной) ω при этом фиксированном δ, совпадают.*

Доказательство. Имеем

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \leq l(\delta) \leq \omega(\delta).$$

Теорема доказана.

Условия предыдущей теоремы выполняются, например, в случае аппроксимации функционалов. Точнее, справедлива такая теорема.

Теорема 7.1.5. *Пусть $\mathcal{O}$ – центрально-симметричное выпуклое множество в X, $A = f$ – линейный, не обязательно ограниченный функционал, $Q \subset D(f)$. Тогда для любого $N \geq 0$ в задаче Стечкина существует наилучший приближающий функционал g_0 и*

$$E(N) = \Delta(N) = \sup_{\delta > 0} \{\omega(\delta) - N\delta\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in Q$, $t > E(N)$ и

$$B(t,x) = \{g \in X^* : (f-g)(x) \le t\}.$$

Из определения слабой * (w^*)-топологии пространства X^* следует, что $B(t,x)$ замкнуто в этой топологии. По теореме Алаоглу [288, с. 80] множество $T^* = \{g \in X^* : \|g\| \le N\}$ компактно. Так как $t > E(N)$, то множество $B(t) = T^* \bigcap \Big\{ \bigcap\limits_{x \in Q} B(t,x) \Big\}$ непусто и ввиду компактности существует элемент $g_0 \in \bigcap\limits_{t > E(N)} B(t)$. Ясно, что g_0 – наилучший приближающий функционал.

Установим равенство

$$E(N) = \Delta(N).$$

По определению ω^*-топологии функция $F(x,g) = (f-g)(x)$ непрерывна в этой топологии по g при фиксированном x. При фиксированном x функция $F(x,g)$ выпукла по g, а при фиксированном g – вогнута по x. Поскольку w^*-топология хаусдорфова и T^* компактно, то по теореме о минимаксе [172]

$$E(N) = \min_{g \in T^*} \sup_{x \in Q} (f-g)x = \sup_{x \in Q} \min_{g \in T^*} F(x,g) =$$

$$= \sup_{x \in Q} (f(x) - N\|x\|) = \Delta(N).$$

Теорема доказана.

Сопоставляя теорему 7.1.5 и теорему 7.1.2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 7.1.6. *Пусть A – линейный функционал, $D(A) \subset X$, Q – центрально-симметричное, выпуклое множество, содержащееся в $D(A)$. Тогда для любого $\delta \ge 0$*

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) = \mathcal{E}_\delta(X^*) = l(\delta) = \omega(\delta),$$

причем, если T_0 – экстремальный функционал в некорректной задаче о приближении функционала, то он будет экстремальным и в задаче Стечкина, в которой N есть субдифференциал (производная) функции $\omega(\delta)$ в соответствующей точке.

7.2. Задача Стечкина для операторов дифференцирования

В данном параграфе приведем некоторые результаты по приближению операторов дифференцирования ограниченными линейными операторами на некоторых классах функций, заданных на всей числовой оси или полуоси. При этом подробно остановимся на случае малых гладкостей, а по поводу более общих результатов ограничимся только некоторыми формулировками, отсылая читателя к обзорам [19, 17], в которых приведена подробная библиография. Ниже, сохраняя обозначения $\omega(\delta)$ для модуля непрерывности оператора, будем обозначать $\overline{\omega}(x,\delta)$ – равномерный модуль непрерывности функции x, т. е.

$$\overline{\omega}(x,\delta) = \sup_{|t_1-t_2|\le\delta} |x(t_1)-x(t_2)|,$$

а $\overline{\omega}(\delta)$ – произвольный модуль непрерывности, т. е. заданную на полуоси непрерывную неубывающую числовую функцию, для которой $\overline{\omega}(0)=0$ и $\overline{\omega}(\delta_1+\delta_2)\le\overline{\omega}(\delta_1)\ +\ \overline{\omega}(\delta_2)$ при любых $\delta_1,\delta_2\ge 0$.

Обозначим $W^rH^{\overline{\omega}}(G)$ ($G=\mathbf{R}$ или $\mathbf{R}_+$) – множество функций $x\in C^r(G)$, таких, что $\overline{\omega}(x^{(r)},\delta)\le\overline{\omega}(\delta)$ для любого $\delta\ge 0$, где $\overline{\omega}(\delta)$ – заданный модуль непрерывности. Обозначим $C^r_{\overline{\omega}}(G)$ – множество функций x из $C^r(G)$, для которых

$$\left\|x^{(r)}\right\|_{\overline{\omega}} := \sup_{t_1,t_2\in G} \frac{\left|x^{(r)}(t_1)-x^{(r)}(t_2)\right|}{\overline{\omega}(|t_1-t_2|)} < \infty.$$

Ясно, что $W^rH^{\overline{\omega}}(G)=\left\{x\in C^r(G):\left\|x^{(r)}\right\|_{\overline{\omega}}\le 1\right\}$.

Рассмотрим задачу нахождения модуля непрерывности оператора дифференцирования d/dt на классе $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ ($\overline{\omega}$ – произвольный модуль непрерывности) и задачу наилучшего приближения оператора d/dt на классе $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$.

Положим (для $h>0$)

$$S_h^+x(t)=\frac{1}{h}\{x(t+h)-x(t)\}. \tag{7.2.1}$$

Ясно, что

$$\left\|S_h^+ x\right\|_\infty \le \frac{2}{h}\|x\|_\infty . \tag{7.2.2}$$

Кроме того,

$$x'(t) - S_h^+ x(t) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h \{x'(t) - x'(t+u)\}du.$$

Поэтому для $x \in C^1_{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ имеем

$$\left|x'(t) - S_h^+ x(t)\right| \le \frac{1}{h}\int\limits_0^h |x'(t) - x'(t+u)|du \le$$

$$\le \frac{1}{h}\int\limits_0^h \frac{|x'(t) - x'(t+u)|}{\overline{\omega}(u)}\overline{\omega}(u)du \le$$

$$\le \|x'\|_{\overline{\omega}}\frac{1}{h}\int\limits_0^h \overline{\omega}(u)du,$$

так что

$$\left\|x' - S_h^+ x\right\|_\infty \le \frac{1}{h}\int\limits_0^h \overline{\omega}(u)du\|x'\|_{\overline{\omega}}. \tag{7.2.3}$$

Сопоставляя (7.2.2) и (7.2.3), получаем для любого $h > 0$ неравенство типа Колмогорова в аддитивной форме:

$$\left\|x'\right\|_\infty \le \left\|x' - S_h^+ x\right\|_\infty + \left\|S_h^+ x\right\|_\infty \le \frac{2}{h}\|x\|_\infty + \frac{1}{h}\int\limits_0^h \overline{\omega}(u)du\|x'\|_{\overline{\omega}}. \tag{7.2.4}$$

Если $x \in W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ (т. е. $\left\|x'\right\|_{\overline{\omega}} \le 1$) и $\|x\|_\infty \le \delta$, то из (7.2.4) выводим неравенство

$$\left\|x'\right\|_\infty \le \frac{2\delta}{h} + \frac{1}{h}\int\limits_0^h \overline{\omega}(u)du.$$

Следовательно,

$$\|x'\|_\infty \le \min_{h>0}\left\{\frac{2\delta}{h}+\frac{1}{h}\int\limits_0^h \overline{\omega}(u)du\right\},$$

так что для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ оператора d/dt на классе $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ получаем оценку

$$\omega(\delta) \le \min_{h>0}\left\{\frac{2\delta}{h}+\frac{1}{h}\int\limits_0^h \overline{\omega}(u)du\right\}. \tag{7.2.5}$$

Выберем h_δ из условия

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{h_\delta}\{\overline{\omega}(h_\delta)-\overline{\omega}(u)\}\,du=\delta. \tag{7.2.6}$$

Получим

$$\omega(\delta) \le \frac{1}{2}\frac{2}{h_\delta}\int\limits_0^{h_\delta}\{\overline{\omega}(h_\delta)-\overline{\omega}(u)\}\,du+\frac{1}{h_\delta}\int\limits_0^{h_\delta}\overline{\omega}(u)du=\overline{\omega}(h_\delta).$$

С другой стороны, определим функцию $x_\delta(t)$, положив

$$x_\delta(t)=\int\limits_0^t\{\overline{\omega}(h_\delta)-\overline{\omega}(u)\}\,du-\delta, \quad \text{если} \quad 0\le t\le h_\delta,$$

и

$$x_\delta(t)=\delta, \quad \text{если} \quad t\ge h_\delta.$$

Для этой функции имеем

$$\|x_\delta\|_\infty=\delta, \quad \|x'_\delta\|_\infty=\overline{\omega}(h_\delta) \quad \text{и} \quad \|x'_\delta\|_{\overline{\omega}}=1.$$

Поэтому $\omega(\delta)\ge\overline{\omega}(h_\delta)$. Таким образом, получаем

$$\omega(\delta)=\overline{\omega}(h_\delta), \tag{7.2.7}$$

где h_δ по δ определено соотношением (7.2.6).

Если $\overline{\omega}(t) = t^{\alpha}$, то, минимизируя по $h > 0$ правую часть (7.2.4), получаем следующее неулучшаемое мультипликативное неравенство типа Колмогорова:

$$\|x'\|_{\infty} \leq \left(\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \|x\|_{\infty}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \|x'\|_{\overline{\omega}}^{\frac{1}{\alpha+1}}, \tag{7.2.8}$$

а из (7.2.6) и (7.2.7) выводим

$$h_{\delta} = \left(\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}\delta\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

и

$$\omega(\delta) = \left(\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Подытоживая сказанное, видим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 7.2.1. *Для любой ограниченной функции $x \in C^1_{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ ($\overline{\omega}$ – произвольный модуль непрерывности) при всех $h > 0$ выполняется неравенство*

$$\|x'\|_{\infty} \leq \frac{2}{h}\|x\|_{\infty} + \frac{1}{h}\int_0^h \overline{\omega}(u)du\|x'\|_{\overline{\omega}}, \tag{7.2.9}$$

при этом для любого фиксированного h константу при $\|x'\|_{\overline{\omega}}$ в правой части (7.2.9) *уменьшить нельзя.*

Для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ оператора d/dt на классе $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ справедливо соотношение

$$\omega(\delta) = \overline{\omega}(h_{\delta}), \tag{7.2.10}$$

где h_{δ} и δ связаны выражением

$$\frac{1}{2}\int_0^{h_{\delta}} \{\overline{\omega}(h_{\delta}) - \overline{\omega}(u)\}\, du = \delta. \tag{7.2.11}$$

Если $\overline{\omega}(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, *то для ограниченных функций* $x \in \in C^1_{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ *справедливо следующее неулучшаемое мультипликативное неравенство:*

$$\|x'\|_{\infty} \leq \left(\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \|x\|_{\infty}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \|x'\|_{\overline{\omega}}^{\frac{1}{\alpha+1}}, \tag{7.2.12}$$

а для $\omega(\delta)$ *– соотношение*

$$\omega(\delta) = \left(\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}. \tag{7.2.13}$$

Теперь займемся задачей наилучшего приближения оператора d/dt на классе $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$.

Согласно (7.2.2) оператор S_h^+, определенный соотношением (7.2.1), ограничен, и, если $h = 2/N$, его норма не превосходит N. Согласно (7.2.3)

$$\sup_{x \in W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)} \|x' - S_h^+ x\|_{\infty} \leq \frac{1}{h} \int_0^h \overline{\omega}(u)du,$$

поэтому для наилучшего приближения $E(N)$ оператора d/dt на классе $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ получаем следующую оценку сверху:

$$E(N) \leq \frac{N}{2} \int_0^{2/N} \overline{\omega}(u)du, \quad N > 0. \tag{7.2.14}$$

С другой стороны (см. (7.2.10) и (7.2.11)),

$$E(N) \geq \sup_{\delta>0}\{\omega(\delta) - N\delta\} = \sup_{\delta>0} \left\{ \overline{\omega}(h_\delta) - \frac{N}{2} \int_0^{h_\delta} \{\overline{\omega}(h_\delta) - \overline{\omega}(u)\}\, du \right\}. \tag{7.2.15}$$

Выбирая δ так, чтобы $h_\delta = 2/N$, из (7.2.15) получаем

$$E(N) \geq \overline{\omega}\left(\frac{2}{N}\right) - \frac{N}{2}\frac{2}{N}\overline{\omega}\left(\frac{2}{N}\right) + \frac{N}{2}\int\limits_0^{2/N} \overline{\omega}(u)du = \frac{N}{2}\int\limits_0^{2/N} \overline{\omega}(u)du. \tag{7.2.16}$$

Сопоставляя (7.2.14) и (7.2.16), устанавливаем, что справедлива такая теорема.

Теорема 7.2.2. *Если $\overline{\omega}$ – произвольный модуль непрерывности, то для наилучшего приближения $E(N)$ оператора d/dt на классе $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ справедливо равенство*

$$E(N) = \frac{N}{2}\int\limits_0^{2/N} \overline{\omega}(u)du, \tag{7.2.17}$$

причем оператор наилучшего приближения имеет разностный характер и задается равенством

$$S_h^+ x(t) = \frac{1}{h}\{x(t+h) - x(t)\} \tag{7.2.18}$$

при $h = 2/N$.

Если $\overline{\omega}(\delta) = \delta$, то класс $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R}_+)$ обращается в класс $W^2(\mathbf{R}_+) = \{x \in C(\mathbf{R}_+) : x'$ – локально абсолютно непрерывна и $\|x''\|_\infty \leq 1\}$. Поэтому из предыдущей теоремы сразу следует, что наилучшее приближение $E(N)$ оператора d/dt на классе $W^2(\mathbf{R}_+)$ определяется равенством

$$E(N) = \frac{1}{N}. \tag{7.2.19}$$

Аналогично решается задача нахождения модуля непрерывности $\omega(\delta)$ и наилучшего приближения $E(N)$ оператора дифференцирования на классе $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R})$.

Полагая

$$S_h x(t) = \frac{1}{2h}\{x(t+h) - x(t-h)\}, \tag{7.2.20}$$

устанавливаем, что

$$\|S_h x\|_\infty \le \frac{1}{h}\|x\|_\infty, \tag{7.2.21}$$

так что

$$\|S_h\| \le \frac{1}{h},$$

$$\|x' - S_h x\|_\infty = \sup_t \frac{1}{2h}\left|\int\limits_{-h}^{h}\{x'(t) - x'(t+u)\}du\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\overline{\omega}(|u|)du = \frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}\overline{\omega}(u)du. \tag{7.2.22}$$

Отсюда выводим аналогичное (7.2.4) аддитивное неравенство для функций $x \in C^1_{\overline{\omega}}(\mathbf{R})$:

$$\|x'\|_\infty \le \frac{1}{h}\|x\|_\infty + \frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}\overline{\omega}(u)du\|x'\|_{\overline{\omega}}. \tag{7.2.23}$$

Для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ оператора d/dt на классе $W^1H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R})$ получаем равенство

$$\omega(\delta) = \overline{\omega}(h'_\delta), \tag{7.2.24}$$

в котором h'_δ и δ связаны соотношением

$$\int\limits_{0}^{h'_\delta}\left\{\overline{\omega}(h'_\delta) - \overline{\omega}(u)\right\}du = \delta. \tag{7.2.25}$$

Для $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, из (7.2.23) выводим следующее мультипликативное неравенство:

$$\|x'\|_\infty \le \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\|x\|_\infty^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\|x'\|_{\overline{\omega}}^{\frac{1}{\alpha+1}}, \tag{7.2.26}$$

а для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ – соотношение

$$\omega(\delta) = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}. \tag{7.2.27}$$

Для наилучшего приближения $E(N)$ оператора d/dt на классе $W^1 H^{\overline{\omega}}(\mathbf{R})$ получаем соотношение

$$E(N) = N \int\limits_0^{1/N} \overline{\omega}(u)du. \tag{7.2.28}$$

При $\overline{\omega}(\delta) = \delta$ последнее соотношение дает значение наилучшего приближения $E(N)$ оператора d/dt на классе $W^2(\mathbf{R})$

$$E(N) = \frac{1}{2N}. \tag{7.2.29}$$

При этом экстремальный оператор является разностным оператором и имеет вид (7.2.20) с $h = 1/N$.

Обсудим еще задачу приближения операторов d/dt и d^2/dt^2 на классах $W^3(\mathbf{R})$ и $W^3(\mathbf{R}_+)$. Модули непрерывности таких операторов нам известны, так как известны соответствующие неравенства для промежуточных производных. Точнее, из результатов § 2.3 следует, что модуль непрерывности оператора d^k/dt^k на классе $W^r(\mathbf{R})$ имеет вид

$$\omega(\delta) = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \delta^{1-k/r},$$

так что при $r = 3$ и $k = 1$

$$\omega(\delta) = \frac{3^{2/3}}{2} \delta^{2/3}, \tag{7.2.30}$$

а при $r = 3$ и $k = 2$

$$\omega(\delta) = 3^{1/3} \delta^{1/3}. \tag{7.2.31}$$

Используя (7.2.30), (7.2.31) и соотношение (7.1.10), получаем для величины $E(N)$ наилучшего приближения оператора d^k/dt^k на классе

$W^3(\mathbf{R})$ следующие оценки снизу:

$$E(N) \geq \frac{1}{6N^2}, \quad \text{если} \quad k = 1, \tag{7.2.32}$$

и

$$E(N) \geq \frac{2}{3N^{1/2}}, \quad \text{если} \quad k = 2. \tag{7.2.33}$$

Полагая

$$S_{1,3}x(t) = \frac{1}{2h}\{x(t+h) - x(t-h)\} \tag{7.2.34}$$

и

$$S_{2,3}x(t) = \frac{1}{h^2}\{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)\}, \tag{7.2.35}$$

получаем, как и в § 3.2, следующие оценки:

$$\|S_{1,3}\|_\infty = \frac{1}{h}, \qquad \|x' - S_{1,3}x\|_\infty \leq \frac{h^2}{6}\|x'''\|_\infty$$

и

$$\|S_{2,3}\|_\infty = \frac{4}{h^2}, \qquad \|x'' - S_{2,3}x\|_\infty \leq \frac{h}{3}\|x'''\|_\infty,$$

из которых при $h = 1/N$ и $h = 2/\sqrt{N}$ соответственно имеем оценки:

$$E(N) \leq \frac{1}{6N^2} \tag{7.2.36}$$

и

$$E(N) \leq \frac{2}{3\sqrt{N}}. \tag{7.2.37}$$

Из (7.2.32) и (7.2.36) получаем, что для наилучшего приближения оператора d/dt на классе $W^3(\mathbf{R})$ справедливо равенство

$$E(N) = \frac{1}{6N^2},$$

причем экстремальным является оператор (7.2.34) при $h = 1/N$. Из (7.2.33) и (7.2.37) для наилучшего приближения оператора d^2/dt^2 на классе $W^3(\mathbf{R})$ получаем

$$E(N) = \frac{2}{3\sqrt{N}},$$

причем экстремальным является оператор (7.2.35) при $h = 2/\sqrt{N}$.

Для наилучшего приближения операторов d^k/dt^k на классе $W^3(\mathbf{R}_+)$, полагая

$$S^+_{1,3}x(t) = \frac{1}{6h}\{-8x(t) + 9x(t+h) - x(t+3h)\} \tag{7.2.38}$$

и

$$S^+_{2,3}x(t) = \frac{1}{3h^2}\{2x(t) - 3x(t+h) + x(t+3h)\}, \tag{7.2.39}$$

как и в § 3.2, будем иметь

$$\|S^+_{1,3}\|_\infty = \frac{3}{h}, \qquad \|x' - S^+_{1,3}x\|_\infty \le \frac{h^2}{2}\|x'''\|_\infty$$

и

$$\|S^+_{2,3}\|_\infty = \frac{2}{h^2}, \qquad \|x'' - S^+_{2,3}x\|_\infty \le \frac{4h}{3}\|x'''\|_\infty.$$

Это приводит (при $h = 3/N$ и $h = \sqrt{2/N}$) к следующим оценкам:

$$E(N) \le \frac{9}{2N^2}, \quad \text{если} \quad k = 1, \tag{7.2.40}$$

и

$$E(N) \le \frac{4}{3}\sqrt{2/N}, \quad \text{если} \quad k = 2. \tag{7.2.41}$$

Учитывая оценку (7.1.10) и тот факт, что согласно неравенствам Маторина (см. § 3.1) модуль непрерывности оператора d^k/dt^k, $k = 1, 2$, на классе $W^3(\mathbf{R}_+)$ такой:

$$\omega(\delta) = \begin{cases} \dfrac{3^{5/3}}{2}, & \text{если} \quad k = 1, \\ 2 \cdot 3^{1/3}, & \text{если} \quad k = 2, \end{cases}$$

устанавливаем, что в действительности

$$E(N) = \frac{9}{2N^2}, \quad \text{если} \quad k = 1,$$

причем экстремальным является оператор (7.2.38) при $h = \sqrt{3/N}$, и

$$E(N) = \frac{4}{3}\sqrt{2/N}, \quad \text{если} \quad k = 2,$$

причем экстремальным является оператор (7.2.39) при $h = \sqrt{2/N}$.

7.3. Теорема эквивалентности

Для любых $A, B, C > 0$ и $\alpha \in (0,1)$ положим

$$f(N) := NA + \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{N^\alpha}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} B, \quad N > 0.$$

Лемма 7.3.1. *Имеем*

$$\min\{f(N) : N > 0\} = KA^\alpha B^{1-\alpha}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что минимум достигается в точке

$$N = K\alpha\left(\frac{B}{A}\right)^{1-\alpha}.$$

При этом

$$f(N) =$$

$$= K\alpha\left(\frac{B}{A}\right)^{1-\alpha} A + \frac{1-\alpha}{\alpha}(K\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[K\alpha\left(\frac{B}{A}\right)^{1-\alpha}\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} B =$$

$$= K\alpha A^\alpha B^{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha} K\alpha A^\alpha B^{1-\alpha} = KA^\alpha B^{1-\alpha}.$$

Лемма доказана.

Положим для краткости $\|x\|_p := \|x\|_{L_p(\mathbf{T})}$.

Пусть заданы числа $k, r \in \mathbf{N}$, $p, q, s \in [1,\infty]$, $N \in \mathbf{R}_+$. Положим

$$W_p^0 := \left\{x \in L_p(\mathbf{T}) : \|x\|_p \le 1\right\}$$

и

$$E\left(W_q^k, NW_p^r\right)_s := \sup_{x \in W_q^k} \inf_{u \in NW_p^r} \|x-u\|_s.$$

Пусть для произвольной полунормы (т. е. неотрицательного, положительно однородного и полуаддитивного функционала) ψ на L_s и подмножества $A \subset L_s$

$$\psi(A) := \sup\{\psi(x) : x \in A\}$$

и пусть для $s \in [1,\infty]$, как обычно, $s' := s/(s-1)$.

Теорема 7.3.1. *При* $k, r \in \mathbf{N}$; $k = 1, \ldots, r$; $\alpha \in (0,1)$, $N, K > 0$, $p, q, s \in [1, \infty]$ *эквивалентны следующие утверждения:*

1) *для произвольной функции* $x \in L^r_{s'}$

$$E_0\left(x^{(r-k)}\right)_{q'} \le K E_0(x)^{\alpha}_{p'} \left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_{s'};$$

2) *для произвольной функции* $x \in L^r_{s'}$ *и для любого* $N > 0$

$$E_0\left(x^{(r-k)}\right)_{q'} \le N E_0(x)_{p'} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{N^{\alpha}}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \left\|x^{(r)}\right\|_{s'};$$

3) *для любого* $N > 0$

$$E\left(W^k_q, N W^r_p\right)_s \le \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{N^{\alpha}}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}};$$

4) *для произвольной полунормы* ψ *на* L_s

$$\psi\left(W^k_q\right) \le K\psi\left(W^r_p\right)^{\alpha} \psi\left(W^0_s\right)^{1-\alpha};$$

5) *для произвольной полунормы* ψ *на* L_s *и для любого* $N > 0$

$$\psi\left(W^k_q\right) \le N\psi\left(W^r_p\right) + \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{N^{\alpha}}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \psi\left(W^0_s\right);$$

6) *для произвольной функции* $x \in W^k_q$ *и для любого* $t > 0$

$$\inf_{x_1 \in L^r_p(\mathbf{T})} \left\{\|x - x_1\|_s + t\left\|x^{(r)}_1\right\|_p\right\} \le K t^{\alpha}.$$

Доказательство. Отметим, прежде всего, что эквивалентность утверждений 1 и 2, как и эквивалентность утверждений 4 и 5, сразу следует из леммы 7.3.1.

Докажем сначала эквивалентность утверждений 1–5. Для этого достаточно установить справедливость цепочки импликаций: $1) \Rightarrow$ $\Rightarrow 3) \Rightarrow 5) \Rightarrow 2)$.

Покажем, что 1) $\Rightarrow$ 3). Применяя теорему двойственности для наилучших приближений выпуклым множеством (см. теорему 10.1.4), имеем

$$E\left(W_q^k, NW_p^r\right)_s =$$

$$= \sup_{g\in W_q^k} \sup_{\|f\|_{s'}\le 1} \left\{ \int_0^{2\pi} g(t)f(t)dt - \sup_{u\in NW_p^r} \int_0^{2\pi} u(t)f(t)dt \right\} =$$

$$= \sup_{\|f\|_{s'}\le 1} \left\{ \sup_{g\in W_q^k} \int_0^{2\pi} g(t)f(t)dt - \sup_{u\in NW_p^r} \int_0^{2\pi} u(t)f(t)dt \right\}. \quad (7.3.1)$$

Заметим, что верхнюю грань в правой части (7.3.1) достаточно брать лишь по тем функциям f, которые в среднем равны нулю на периоде. Действительно, в противном случае (так как класс NW_p^r содержит константы) было бы

$$\sup_{u\in NW_p^r} \int_0^{2\pi} u(t)f(t)dt = \infty.$$

Учитывая это и применяя интегрирование по частям, из (7.3.1) имеем (символом x обозначим r-й периодический интеграл от функции f)

$$E\left(W_q^k, NW_p^r\right)_s =$$

$$= \sup_{x\in W_{s'}^r} \left\{ \sup_{g\in W_q^k} (-1)^k \int_0^{2\pi} g^{(k)}(t)x^{(r-k)}(t)dt - \right.$$

$$\left. - \sup_{u\in NW_p^r} (-1)^r \int_0^{2\pi} u^{(r)}(t)x(t)dt \right\}.$$

Применяя теорему двойственности для наилучших приближений подпространством (см. теорему 10.1.5), получаем

$$E\left(W_q^k, NW_p^r\right)_s \le \sup_{x\in W_{s'}^r} \left\{ E_0\left(x^{(r-k)}\right)_{q'} - NE_0\left(x\right)_{p'} \right\}. \quad (7.3.2)$$

Согласно утверждению 1) теоремы для $x \in W^r_{s'}$ имеем

$$E_0\left(x^{(r-k)}\right)_{q'} \le KE_0\,(x)^{\alpha}_{p'}\,.$$

Поэтому из (7.3.2) выводим

$$E\left(W^k_q, NW^r_p\right)_s \le \sup_{\lambda>0}\{K\lambda^{\alpha}-N\lambda\} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{N^{\alpha}}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}\left\|x^{(r)}\right\|_{s'}.$$

Тем самым импликация 1) $\Rightarrow$ 3) доказана.

Докажем теперь, что 3) $\Rightarrow$ 5). Пусть $x \in W^k_q$. Для любого ε обозначим $u^{\varepsilon}(x)$ – функцию из NW^r_p, такую, что

$$\|x-u^{\varepsilon}(x)\|_s \le E\left(W^k_q, NW^r_p\right)_s + \varepsilon.$$

Тогда вследствие полуаддитивности и положительной однородности функционала ψ получим

$$\psi(x) = \psi(x-u^{\varepsilon}(x)+u^{\varepsilon}(x)) \le$$

$$\le \psi(x-u^{\varepsilon}(x)) + \psi(u^{\varepsilon}(x)) \le \psi(W^0_s)\|x-u^{\varepsilon}(x)\|_s + N\psi(W^r_p).$$

Отсюда ввиду утверждения 3) и произвольности ε имеем

$$\psi\left(W^k_q\right) \le N\psi\left(W^r_p\right) + \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{N^{\alpha}}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}\psi\left(W^0_s\right). \qquad (7.3.3)$$

Минимизируя правую часть (7.3.3) по $N > 0$, получаем согласно лемме 7.3.1 утверждение 5). Тем самым импликация 3) $\Rightarrow$ 5) доказана.

Докажем теперь, что 5) $\Rightarrow$ 2). Фиксируем $x \in W^r_{s'}$ и рассмотрим полунорму

$$\psi(y) := \left|\int_0^{2\pi} x^{(r)}(t)y(t)dt\right|.$$

Согласно теореме двойственности для наилучших приближений подпространством (см. теорему 10.1.5) для $k = 1, \ldots, r$ и $q \in [1, \infty]$ имеем

$$\psi\left(W_q^k\right) = \sup_{y \in W_q^k} \left| \int_0^{2\pi} x^{(r)}(t) y(t) dt \right| = \sup_{y \in W_q^k} \left| \int_0^{2\pi} x^{(r-k)}(t) y^{(k)}(t) dt \right| =$$

$$= \sup_{\substack{\|z\|_q \le 1 \\ z \perp 1}} \left| \int_0^{2\pi} x^{(r-k)}(t) z(t) dt \right| = E_0\left(x^{(r-k)}\right)_{q'}. \qquad (7.3.4)$$

Кроме того,

$$\psi\left(W_s^0\right) = \sup_{\|y\|_s \le 1} \left| \int_0^{2\pi} x^{(r)}(t) y(t) dt \right| = \|x^{(r)}\|_{s'}. \qquad (7.3.5)$$

Из (7.3.4) и (7.3.5) следует импликация 5) $\Rightarrow$ 2).

Для доказательства теоремы осталось установить справедливость импликаций 3) $\Rightarrow$ 6) и 6) $\Rightarrow$ 1).

Докажем сначала импликацию 3) $\Rightarrow$ 6). Фиксируем $x \in W_q^k$ и $t > 0$. Тогда для любого $N > 0$ с помощью 3) имеем

$$\inf_{x_1 \in L_p^r} \left\{ \|x - x_1\|_s + t\|x_1^{(r)}\|_p \right\} \le \inf_{x_1 \in N W_p^r} \left\{ \|x - x_1\|_s + t\|x_1^{(r)}\|_p \right\} \le$$

$$\le \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{N^\alpha}{K\alpha} \right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} + tN.$$

Таким образом, имеем

$$\inf_{x_1 \in L_p^r} \left\{ \|x - x_1\|_s + t\|x_1^{(r)}\|_p \right\} \le$$

$$\le \min_{N > 0} \left\{ \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{N^\alpha}{K\alpha} \right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} + tN \right\} = Kt^\alpha.$$

Докажем теперь, что 6) $\Rightarrow$ 1). Пусть $x \in L^r_{s'}$, $x \neq \mathrm{const}$. Положим

$$t = \frac{E_0(x)_{p'}}{\|x^{(r)}\|_{s'}}.$$

Используя 6), для произвольной функции $y \in W^k_q$ имеем

$$K\left(\frac{E_0(x)_{p'}}{\|x^{(r)}\|_{s'}}\right)^{\alpha} \geq \inf_{y_1 \in L^r_p}\left\{\|y - y_1\|_s + \frac{E_0(x)_{p'}}{\|x^{(r)}\|_{s'}}\|y_1^{(r)}\|_p\right\} =$$

$$= \frac{1}{\|x^{(r)}\|_{s'}} \inf_{y_1 \in L^r_p}\left\{\|y - y_1\|_s \|x^{(r)}\|_{s'} + E_0(x)_{p'}\|y_1^{(r)}\|_p\right\}.$$

Оценивая снизу последнее выражение с помощью неравенства Гельдера, получаем

$$K\left(\frac{E_0(x)_{p'}}{\|x^{(r)}\|_{s'}}\right)^{\alpha} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\|x^{(r)}\|_{s'}} \inf_{y_1 \in L^r_p}\left|(-1)^r \int_0^{2\pi} (y(t) - y_1(t))x^{(r)}(t)dt + \int_0^{2\pi} x(t)y_1^{(r)}(t)dt\right|.$$

Используя интегрирование по частям, продолжаем эту оценку следующим образом:

$$K\left(\frac{E_0(x)_{p'}}{\|x^{(r)}\|_{s'}}\right)^{\alpha} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\|x^{(r)}\|_{s'}} \inf_{y_1 \in L^r_p}\left|\int_0^{2\pi} (y^{(k)}(t) - y_1^{(k)}(t))x^{(r-k)}(t)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} x^{(r-k)}(t)y_1^{(k)}(t)dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\|x^{(r)}\|_{s'}}\left|\int_0^{2\pi} y^{(k)}(t)x^{(r-k)}(t)dt\right|.$$

Так как эта оценка справедлива для произвольной функции $y \in W_q^k$, то снова, используя теорему двойственности для наилучших приближений подпространством (теорема 10.5.1), имеем

$$\frac{E_0(x^{(r-k)})_{q'}}{\|x^{(r)}\|_{s'}} = \frac{1}{\|x^{(r)}\|_{s'}} \sup_{y \in W_q^k} \left| \int_0^{2\pi} y^{(k)}(t) x^{(r-k)}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq K \left(\frac{E_0(x)_{p'}}{\|x^{(r)}\|_{s'}} \right)^{\alpha}.$$

Таким образом, получим

$$E_0 \left(x^{(r-k)} \right)_{q'} \leq K E_0 \left(x \right)_{p'}^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_{s'}^{1-\alpha}.$$

Тем самым импликация $6) \Rightarrow 1)$ установлена и теорема доказана.

7.4. Теорема эквивалентности для опорных функций выпуклых множеств

Традиционными формами записи неравенств типа Колмогорова являются аддитивная

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_q(G)} \leq A \left\| x \right\|_{L_p(G)} + B \left\| x^{(r)} \right\|_{L_s(G)} \tag{7.4.1}$$

и мультипликативная

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_q(G)} \leq K \left\| x \right\|_{L_p(G)}^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_{L_s(G)}^{\beta}. \tag{7.4.2}$$

Во многих вопросах анализа и его приложений используются неравенства для норм промежуточных производных функций $x \in$ $\in L_s^r(G)$ более общего вида

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_q(G)} \leq \Phi \left(\left\| x \right\|_{L_p(G)}, \left\| x^{(r)} \right\|_{L_s(G)} \right) \tag{7.4.3}$$

с некоторой функцией Φ, не зависящей от x.

Отметим, что норму $\|x\|_{L_p(G)}$ в пространстве $L_p(G)$ можно трактовать как значение на элементе x опорной функции (см. определение ниже) единичного шара сопряженного пространства, т. е.

$$\|x\|_{L_p(G)} = \sup_{\|f\|_{L_{p'}(G)} \le 1} \int\limits_G x(t)f(t)dt.$$

Поэтому неравенства типа (7.4.1)–(7.4.3) являются представителями более общих неравенств для опорных функций выпуклых множеств.

Пусть X – вещественное линейное пространство, θ_X – нуль в X, $p(x)$ – некоторая, вообще говоря, несимметричная (см. § 10.1) норма в X,

$$H_{X,p} := \{x \in X : p(x) \le 1\},$$

$X'(p)$ – пространство линейных ограниченных (относительно p) функционалов на X, $\langle x, y\rangle$ – значение функционала $y \in X'(p)$ на элементе $x \in X$,

$$p^*(y) := \sup\{\langle x, y\rangle : x \in H_{X,p}\},$$

$p^*(y)$ – норма в $X'(p)$ (вообще говоря, несимметричная).

Отметим, что в случае, когда X является нормированным пространством с нормой $p(x) = \|x\|_X$, $X'(p) = X^*$ – это обычное сопряженное пространство с нормой $\|x\|_{X^*}$.

Будем использовать следующие определения и обозначения. Если M, $M_1 \subset X$, $K \subset X'(p)$, $x \in X$, $y \in X'(p)$ и ψ – произвольный сублинейный (т. е. полуаддитивный, положительно однородный) функционал на X, то

$$S_M(y) := \sup\{\langle x, y\rangle : x \in M\}$$

есть опорная функция множества M,

$$S_K(x) := \sup\{\langle x, y\rangle : y \in K\},$$

$$M^0 := \{y \in X'(p) : S_M(y) \le 1\}$$

есть поляра множества M,

$$E(x, M_1)_{X,p} := \inf\{p(x-u) : u \in M_1\},$$

$$E\left(M, M_1\right)_{X,p} := \sup\{E\left(x, M_1\right)_{X,p} : x \in M\},$$
$$\psi\left(M\right) := \sup\{\psi\left(x\right) : x \in M\}.$$

В нормированном случае будем писать H_X, $E\left(x, M_1\right)_X$ и $E\left(M, M_1\right)_X$ вместо $H_{X,\|\cdot\|}$, $E\left(x, M_1\right)_{X,\|\cdot\|}$ и $E\left(M, M_1\right)_{X,\|\cdot\|}$ соответственно. Если $H_1, \ldots, H_m \subset X$, то для $x \in X$ и для произвольного $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbf{R}_+^m$ положим

$$K_p\left(X; H_1, \ldots, H_m; x; t\right) :=$$
$$:= \inf_{\substack{x_j \in \mathrm{cone} H_j, \\ j=1,\ldots,m}} \left\{ p\left(x - \sum_{j=1}^m x_j\right) + \sum_{j=1}^m t_j S_{H_j^0}\left(x_j\right) \right\}$$

(символом $\mathrm{cone} H$ обозначается выпуклая коническая оболочка множества H).

Обозначим $\mathcal{F}_m$ – множество всех полунепрерывных снизу, выпуклых вверх (вогнутых) функций $\Phi : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}_+$. Для $\Phi \in \mathcal{F}_m$ положим

$$\overline{\Phi}\left(t\right) := \begin{cases} -\Phi\left(t\right), & \text{если} \quad t \in \mathbf{R}_+^m; \\ +\infty, & \text{если} \quad t \notin \mathbf{R}_+^m. \end{cases}$$

Пусть также $\overline{\Phi}^*$ – преобразование Лежандра функции $\overline{\Phi}$, т. е.

$$\overline{\Phi}^*(s) := \sup_{t \in \mathbf{R}^m} \left\{\langle t, s\rangle - \overline{\Phi}\left(t\right)\right\}, \quad s \in \mathbf{R}^m.$$

Отметим, что по теореме Фенхеля–Моро (см., например, [319]) $\overline{\Phi}^{**} = \overline{\Phi}$ тогда и только тогда, когда $\Phi \in \mathcal{F}_m$.

И наконец, пусть $\sum\limits_{j=1}^m H_j$ – алгебраическая сумма множеств $H_j \subset X$, $j = 1, \ldots, m$.

Теорема 7.4.1. *Пусть $\Phi \in \mathcal{F}_m$; $H, H_1, \ldots, H_m \subset X$ – произвольные выпуклые множества, которые содержат θ_X. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) *если $y \in X'(p)$, $y \neq \theta_{X'(p)}$, и $S_{H_j}\left(y\right) < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$, то*

$$S_H\left(y\right) \leq p^*(y)\Phi\left(\frac{S_{H_1}\left(y\right)}{p^*(y)}, \ldots, \frac{S_{H_m}\left(y\right)}{p^*(y)}\right);$$

2) *если y такой же, как и в* 1), *и* $N = (N_1, \ldots, N_m) \in \mathbf{R}_+^m$, *то*

$$S_H(y) \le \overline{\Phi}^*(-N)\, p^*(y) + \sum_{j=1}^{m} N_j S_{H_j}(y);$$

3) *для произвольного* $N \in \mathbf{R}_+^m$

$$E\left(H, \sum_{j=1}^{m} N_j H_j\right)_{X,p} \le \overline{\Phi}^*(-N);$$

4) *если сублинейный функционал ψ на X такой, что значения* $\psi\left(H_{X,p}\right)$, $\psi\left(H_j\right)$, $j = 1, \ldots, m$, *конечны, то*

$$\psi(H) \le \overline{\Phi}^*(-N)\, \psi\left(H_{X,p}\right) + \sum_{j=1}^{m} N_j \psi\left(H_j\right);$$

5) *если сублинейный функционал ψ такой же, как и в* 4), *причем* $\psi\left(H_{X,p}\right) \ne 0$, *то*

$$\psi(H) \le \psi\left(H_{X,p}\right) \Phi\left(\frac{\psi(H_1)}{\psi\left(H_{X,p}\right)}, \ldots, \frac{\psi(H_m)}{\psi\left(H_{X,p}\right)}\right);$$

6) *для произвольных $x \in H$ и $t \in \mathbf{R}_+^m$*

$$K_p(X; H_1, \ldots, H_m; x; t) \le \Phi(t).$$

Замечание. Утверждения 1 и 2 данной теоремы являются абстрактными версиями неравенств (7.4.3) типа Колмогорова в мультипликативной и аддитивной форме соответственно. Утверждение 3) – это оценка приближения одного множества другим, утверждения 4) и 5) – абстрактные версии неравенств для верхних граней полунорм, утверждение 6) – оценка на классе H характеристики типа K-функционала для набора подпространств $H_1, \ldots, H_m$.

Доказательство теоремы. Прежде всего докажем, что для любого $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbf{R}_+^m$

$$\Phi(t) = \inf_{N \in \mathbf{R}_+^m} \left\{ \overline{\Phi}^*(-N) + \sum_{j=1}^{m} N_j t_j \right\}. \qquad (7.4.4)$$

Действительно, учитывая определение $\overline{\Phi}$ и используя теорему Фенхеля–Моро (см., например, [319]), имеем

$$\Phi(t) = -\overline{\Phi}(t) = -\overline{\Phi}^{**}(t) = -\sup_{N\in\mathbf{R}^m}\left\{\sum_{j=1}^{m}(-N_j)t_j - \overline{\Phi}^{*}(-N)\right\}. \tag{7.4.5}$$

Так как $\overline{\Phi}^{*}(-N) = \infty$ для $N \notin \mathbf{R}^m_+$, то sup в (7.4.5) достаточно брать по всем $N \in \mathbf{R}^m_+$. Поэтому соотношение (7.4.4) вытекает из (7.4.5).

С помощью соотношения (7.4.5) нетрудно видеть, что $1) \Leftrightarrow 2)$ и $4) \Leftrightarrow 5)$.

Действительно, докажем, например, что $1) \Leftrightarrow 2)$. Для этого отметим, что утверждение 2), очевидно, эквивалентно неравенству

$$S_H(y) \le p^*(y) \inf_{N\in\mathbf{R}^m_+}\left\{\overline{\Phi}^{*}(-N) + \sum_{j=1}^{m} N_j \frac{S_{H_j}(y)}{p^*(y)}\right\}.$$

Теперь эквивалентность $1) \Leftrightarrow 2)$ сразу следует из (7.4.4). Эквивалентность утверждений 4) и 5) устанавливается аналогично.

Теперь докажем, что утверждения 2), 3) и 4) эквивалентны. Для этого достаточно установить справедливость следующей цепочки импликаций $2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 2)$.

Сначала докажем, что $2) \Rightarrow 3)$. Используя теорему двойственности для наилучших приближений выпуклым множеством относительно несимметричной нормы p (см. теорему 10.1.6), будем иметь

$$E := E\left(H, \sum_{j=1}^{m} N_j H_j\right)_{X,p} =$$

$$= \sup_{x\in H} \sup_{\substack{y\in X'(p),\\ p^*(y)\le 1}} \left\{\langle x, y\rangle - \sup_{u\in \sum\limits_{j=1}^{m} N_j H_j} \langle u, y\rangle\right\} =$$

$$= \sup_{x\in H} \sup_{\substack{y\in X'(p),\\ p^*(y)\le 1}} \left\{\langle x, y\rangle - \sum_{j=1}^{m} N_j \sup_{u_j\in H_j} \langle u_j, y\rangle\right\}.$$

Меняя местами первый и второй $\sup$ и учитывая определение опорной функции, получаем

$$E = \sup_{\substack{y \in X'(p), \\ p^*(y) \le 1}} \left\{ S_H(y) - \sum_{j=1}^{m} N_j S_{H_j}(y) \right\}. \tag{7.4.6}$$

Теперь утверждение 3) вытекает из утверждения 2) вследствие (7.4.6).

Докажем, что 3) $\Rightarrow$ 4). Для произвольных $x \in H$ и $\varepsilon > 0$ обозначим $u_j^\varepsilon(x)$, $j = 1, \ldots, m$, – такой элемент из H_j, что для элемента $u^\varepsilon(x) := \sum\limits_{j=1}^{m} N_j u_j^\varepsilon(x)$ выполняется неравенство

$$p\left(x - u^\varepsilon(x)\right) \le E\left(H, \sum_{j=1}^{m} N_j H_j\right)_{X,p} + \varepsilon. \tag{7.4.7}$$

Так как функционал ψ положительно однородный, то для произвольного $x \ne \theta_X$ будем иметь

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{x}{p(x)}\right) p(x) \le \psi(H_{X,p}) p(x). \tag{7.4.8}$$

Применяя (7.4.7) и (7.4.8) (к элементу $x - u^\varepsilon(x)$, а также учитывая положительную однородность ψ, получаем

$$\psi(x) \le \psi\left(x - u^\varepsilon(x)\right) + \psi\left(u^\varepsilon(x)\right) \le$$

$$\le \psi\left(H_{X,p}\right) p\left(x - u^\varepsilon(x)\right) + \sum_{j=1}^{m} N_j \psi\left(u_j^\varepsilon(x)\right) \le$$

$$\le \psi\left(H_{X,p}\right) \left(E\left(H, \sum_{j=1}^{m} N_j H_j\right)_{X,p} + \varepsilon \right) + \sum_{j=1}^{m} N_j \psi(H_j). \tag{7.4.9}$$

Теперь утверждение 4) следует из утверждения 3) и (7.4.9) ввиду произвольности $\varepsilon > 0$.

Докажем, что 4) $\Rightarrow$ 2). Для фиксированного $y \in X'(p)$ положим $\psi(z) := \langle z, y\rangle$. Ясно, что функционал ψ сублинейный. Используя утверждение 4) и учитывая определение опорной функции и несимметричной нормы $p^*(y)$, имеем

$$S_H(y) = \sup_{z\in H} \langle z, y\rangle = \psi(H) \le \overline{\Phi}^*(-N)\psi(H_{X,p}) + \sum_{j=1}^m N_j\psi(H_j) =$$

$$= \overline{\Phi}^*(-N) \sup_{z\in H_{X,p}} \langle z, y\rangle + \sum_{j=1}^m N_j \sup_{z\in H_j} \langle z, y\rangle =$$

$$= \overline{\Phi}^*(-N)p^*(y) + \sum_{j=1}^m N_j S_{H_j}(y).$$

Импликация 4) $\Rightarrow$ 2) доказана.

Таким образом, эквивалентность утверждений 2), 3) и 4) установлена. Осталось доказать, что утверждение 6) эквивалентно каждому из этих утверждений (напомним, что уже доказаны эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 2) и 4) $\Leftrightarrow$ 5)). Для этого достаточно установить справедливость импликаций 3) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 1).

Докажем сначала, что 3) $\Rightarrow$ 6). Фиксируем произвольный $x \in H$. Учитывая определение K_p-функционала, для любых $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $N = (N_1, \ldots, N_m) \in \mathbf{R}_+^m$ будем иметь

$$K_p(X; H_1, \ldots, H_m; x, t) \le$$

$$\le \inf_{\substack{x_j\in \mathrm{cone} H_j,\\ S_{H_j^0}(x_j)\le N_j, j=1,\ldots,m}} \left\{ p(x - \sum_{j=1}^m x_j) + \sum_{j=1}^m t_j N_j \right\}. \qquad (7.4.10)$$

Из определения поляры H_j^0 вытекает следующее включение:

$$N_j H_j \subset \{x_j : \ x_j \in \mathrm{cone} H_j : S_{H_j^0}(x_j) \le N_j\}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Поэтому из утверждения 3) и соотношения (7.4.10) имеем

$$K_p(X; H_1, \ldots, H_m; x, t) \le \inf_{\substack{x_j\in N_j H_j,\\ j=1,\ldots,m}} \left\{ p(x - \sum_{j=1}^m x_j) + \sum_{j=1}^m t_j N_j \right\} \le$$

$$\leq E\left(H, \sum_{j=1}^{m} N_j H_j\right)_{X,p} + \sum_{j=1}^{m} t_j N_j \leq \overline{\Phi}^*(-N) + \sum_{j=1}^{m} t_j N_j. \quad (7.4.11)$$

Так как неравенство (7.4.11) справедливо для произвольных $N = (N_1, \ldots, N_m) \in \mathbf{R}_+^m$, то утверждение 6) вытекает из (7.4.11) вследствие (7.4.4).

Наконец покажем, что 6) $\Rightarrow$ 1). Фиксируем $x \in H$, $y \in X'(p)$ ($y \neq \theta_{X'(p)}$), $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $N = (N_1, \ldots, N_m) \in \mathbf{R}_+^m$. Принимая во внимание равенство $p(x) = \sup\left\{ \langle x, y\rangle : p^*(y) \leq 1\right\}$, из утверждения 6) получаем

$$\Phi(t) \geq K_p(X; H_1, \ldots, H_m; x, t) \geq$$

$$\geq \frac{1}{p^*(y)} \inf_{\substack{x_j \in \operatorname{cone} H_j, \\ j=1,\ldots,m}} \left\{ \left\langle x - \sum_{j=1}^{m} x_j, y \right\rangle + \sum_{j=1}^{m} t_j S_{H_j^0}(x_j) p^*(y) \right\}. \quad (7.4.12)$$

Для продолжения доказательства импликации 6) $\Rightarrow$ 1) нам будет нужно следующее неравенство:

$$\langle x_j, y\rangle \leq S_{H_j}(y) S_{H_j^0}(x_j), \quad x_j \in H_j, \quad y \in X'(p). \quad (7.4.13)$$

Для его доказательства отметим прежде всего, что оно очевидно в случае, когда $S_{H_j}(y) = 0$. Пусть $S_{H_j}(y) \neq 0$. Тогда справедливо включение

$$\frac{y}{S_{H_j}(y)} \in H_j^0. \quad (7.4.14)$$

Это включение сразу следует из определений опорной функции и поляры вследствие неравенства $\left\langle x_j, \dfrac{y}{S_{H_j}(y)} \right\rangle \leq 1$, которое справедливо для любого $x_j \in H_j$. С помощью (7.4.14) неравенство (7.4.13) вытекает из соотношений

$$S_{H_j^0}(x_j) = \sup_{y \in H_j^0} \langle x_j, y\rangle \geq \sup_{\substack{y \in X'(p) \\ S_{H_j}(y) \neq 0}} \left\langle x_j, \frac{y}{S_{H_j}(y)} \right\rangle.$$

Продолжим доказательство импликаций $6) \Rightarrow 1)$.

Положим в (7.4.12) $t_j = S_{H_j}(y)/p^*(y)$ и применим (7.4.13). Тогда имеем

$$\Phi\left(\frac{S_{H_1}(y)}{p^*(y)}, \ldots, \frac{S_{H_m}(y)}{p^*(y)}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{p^*(y)} \inf_{\substack{x_j \in \operatorname{cone} H_j, \\ j=1,\ldots,m}} \left\{ \langle x, y\rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle x_j, y\rangle + \sum_{j=1}^{m} S_{H_j}(y) S_{H_j^0}(x_j) \right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{p^*(y)} \langle x, y\rangle .$$

Так как это неравенство справедливо для произвольного $x \in H$, то утверждение 1) доказано. Теорема доказана.

В следующей теореме представлен наиболее важный частный случай теоремы 7.4.1 (для опорных функций выпуклых множеств, являющихся образами единичных шаров под действием линейных ограниченных операторов), который ориентирован на применения в теории аппроксимации.

Пусть X, Y – действительные линейные нормированные пространства; $\mathcal{L}(X, Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов $A : X \to Y$, A^* – оператор, сопряженный к оператору A.

Определения многих важных в теории приближений классов функций содержатся в следующей схеме: если $B \in \mathcal{L}(Y, X)$, $L_Y \subset Y$ и $G_X \subset X$ – замкнутые подпространства, такие, что $G_X \cap B(L_Y) = \{\theta_X\}$ (θ_X – нулевой элемент X), то

$$W(B; L_Y, G_X) := \{g + By : g \in G_X, y \in L_Y, \|y\|_Y \leq 1\}.$$

Пусть $W_X^0 := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$. Для подпространства L символом $L^\perp$ обозначим его аннулятор, т. е.

$$L^\perp := \{x^* \in X^* : \langle x, x^*\rangle = 0 \quad \forall x \in L\}.$$

Теорема 7.4.2. *Пусть* $\Phi \in \mathcal{F}_m$; Y, X, X_j, $j = 1, \ldots, m$, – *действительные линейные нормированные пространства;* $B \in \mathcal{L}(Y, X)$, $A_j \in \mathcal{L}(X_j, X)$. *Пусть также* $L_Y \subset Y$, $L_j \subset X_j$,

$G_j, G_X \subset X$ – *подпространства, такие, что* $\bigcap\limits_{j=1}^{m} G_j^{\perp} \subset G_X^{\perp}$; $G_X \cap B(L_Y) = \{\theta_X\}$; $G_j \cap A_j(L_j) = \{\theta_{X_j}\}$. *Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) *для произвольного ненулевого элемента* $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} G_j^{\perp}$

$$E\left(B^*x, L_Y^{\perp}\right)_{Y^*} \leq$$

$$\leq \|x\|_{X^*}\ \Phi\left(\frac{E\left(A_1^*x, L_1^{\perp}\right)_{X_1^*}}{\|x\|_{X^*}}, \ldots, \frac{E\left(A_m^*x, L_m^{\perp}\right)_{X_m^*}}{\|x\|_{X^*}}\right);$$

2) *для любых* $N = (N_1, \ldots, N_m) \in \mathbf{R}_+^m$ *и* $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} G_j^{\perp}$

$$E\left(B^*x, L_Y^{\perp}\right)_{Y^*} \leq \overline{\Phi}^*(-N)\,\|x\|_{X^*} + \sum_{j=1}^{m} N_j E\left(A_j^*x, L_m^{\perp}\right)_{X_j^*};$$

3) *для любого* $N = (N_1, \ldots, N_m) \in \mathbf{R}_+^m$

$$E\left(W\left(B; L_Y, G_X\right); \sum_{j=1}^{m} N_j W\left(A_j; L_j, G_j\right)\right)_X \leq \overline{\Phi}^*(-N);$$

4) *для произвольной полунормы* ψ *на* X, *для которой* $\psi\left(W_X^0\right)$, $\psi\left(W\left(A_j; L_j, G_j\right)\right)$, $j = 1, \ldots, m$, *конечны, справедливо неравенство*

$$\psi\left(W\left(B; L_Y, G_X\right)\right) \leq \overline{\Phi}^*(-N)\,\psi\left(W_X^0\right) + \sum_{j=1}^{m} N_j \psi\left(W\left(A_j; L_j, G_j\right)\right);$$

5) *для произвольной полунормы* ψ *на* X, $\psi \neq 0$, *такой, как в* 4),

$$\psi\left(W\left(B; L_Y, G_X\right)\right) \leq$$

$$\leq \psi\left(W_X^0\right) \Phi\left(\frac{\psi\left(W\left(A_1; L_1, G_1\right)\right)}{\psi\left(W_X^0\right)}, \ldots, \frac{\psi\left(W\left(A_m; L_m, G_m\right)\right)}{\psi\left(W_X^0\right)}\right);$$

6) *для любых* $z \in W\,(B; L_Y, G_X)$ *и* $t \in \mathbf{R}^m_+$

$$K\,(X; G_1 + A_1(L_1), \ldots, G_m + A_m(L_m); z, t) \le \Phi(t).$$

7.5. Приближение класса H^ω классом NW^1_∞ и решение эквивалентных задач

Символом $C_{2\pi}$ обозначается пространство непрерывных 2π-периодических функций. Если ω – фиксированный модуль непрерывности, $\omega(x,t)$ – модуль непрерывности функции x:

$$\omega(x,t) := \sup_{|t_1 - t_2| \le t} |x(t_1) - x(t_2)|,$$

то H^ω будем обозначать класс функций $x \in C_{2\pi}$, для которых

$$\omega(x,t) \le \omega(t) \quad (t > 0).$$

Отметим, что для $\omega(t) = Nt$ будет $H^\omega = NW^1_\infty$.

Утверждение 7.5.1. *Пусть* $N > 0$. *Для любой функции* $x \in C_{2\pi}$ *выполняется равенство*

$$E(x, NW^1_\infty)_\infty = \frac{1}{2} \max_{t \in [0,\pi]} \left[\omega(x,t) - Nt\right]. \tag{7.5.1}$$

Доказательство. Фиксируем $x \in C_{2\pi} \backslash NW^1_\infty$, обозначим для краткости

$$\mu := \frac{1}{2} \max_{t \in [0,\pi]} \left[\omega(x,t) - Nt\right],$$

и для фиксированного u положим

$$\psi(u,t) := x(u) + \mu + N|t-u|, \quad \varphi_0(t) := \inf_u \psi(u,t).$$

Для любых t' и t'', считая для определенности, что $\varphi_0(t') \le \varphi_0(t'')$ и $\varphi_0(t') = \psi(u_1, t')$, будем иметь

$$|\varphi_0(t'') - \varphi_0(t')| = \inf_u \psi(u,t'') - \psi(u_1,t') \le \psi(u_1,t'') - \psi(u_1,t') =$$

$$= x(u_1) + \mu + N|t'' - u_1| - \big[x(u_1) + \mu + N|t' - u_1|\big] =$$
$$= N\left[|t'' - u_1| - |t' - u_1|\right] \le N|t'' - t'|.$$

Этим доказано, что $\varphi_0 \in NW^1_\infty$. Далее из определения функции $\varphi_0(t)$ следует, что для всех t

$$\varphi_0(t) \le \psi(t,t) = x(t) + \mu,$$

т. е.

$$\varphi_0(t) - x(t) \le \mu. \tag{7.5.2}$$

С другой стороны, фиксируем t, и пусть

$$\varphi_0(t) = \psi(u_0, t) = x(u_0) + \mu + N|t - u_0|.$$

Тогда

$$x(t) - \varphi_0(t) = x(t) - [x(u_0) + \mu + N|t - u_0|] \le$$
$$\le \omega(x, |t - u_0|) - N|t - u_0| - \mu \le \max_{u\in[0,\pi]} [\omega(x,u) - Nu] - \mu,$$

и, следовательно,

$$x(t) - \varphi_0(t) \le \mu. \tag{7.5.3}$$

Из (7.5.2) и (7.5.3) получаем

$$\|x - \varphi_0\|_\infty \le \mu,$$

и, тем более,

$$E(x, NW^1_\infty)_\infty \le \mu.$$

Утверждение доказано.

Теорема 7.5.1. *Пусть $N > 0$. Каков бы ни был модуль непрерывности $\omega(t)$, справедливо равенство*

$$E(H^\omega, NW^1_\infty)_\infty = \frac{1}{2} \max_{t\in[0,\pi]} [\omega(t) - Nt]\,. \tag{7.5.4}$$

Существуют функции $x \in H^\omega$, для которых $E(x, NW^1_\infty)_\infty$ совпадает с правой частью (7.5.4).

Доказательство. Действительно, если $x \in H^\omega$, то $\omega(x,t) \leq$ $\leq \omega(t)$, и утверждение 7.5.1 сразу дает оценку

$$E(x, NW^1_\infty)_\infty \leq \frac{1}{2} \max_{t\in[0,\pi]} [\omega(t) - Nt]\,.$$

Пусть $x_0(t)$ – четная 2π-периодическая функция, равная $\omega(t)$ на $[0,\pi]$. Тогда $\omega(x_0,t) = \omega(t)$ $(t \in [0,\pi])$, и опять же согласно утверждению 7.5.1

$$E(x_0, NW^1_\infty)_\infty = \frac{1}{2} \max_{t\in[0,\pi]} [\omega(x_0,t) - Nt] = \frac{1}{2} \max_{t\in[0,\pi]} [\omega(t) - Nt]\,.$$

Теорема доказана.

Обозначим $\bigvee[0,2\pi]$ – пространства 2π-периодических функций x ограниченной на $[0,2\pi]$ вариации, непрерывных слева, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. Норма $\|x\|$ в этом пространстве задается равенством $\|x\| = \bigvee\limits_0^{2\pi} x$. Хорошо известно, что $C^*_{2\pi} = \bigvee[0,2\pi]$.

Теорема 7.5.2. *Пусть $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности. Тогда справедливы следующие эквивалентные утверждения:*

1) *для произвольной функции $y \in \bigvee[0,2\pi]$ и для любого $N > 0$*

$$\sup_{f\in H^\omega} \int\limits_0^{2\pi} f(t)dy(t) \leq NE_0(y)_1 + \frac{1}{2} \max_{t\in[0,\pi]} [\omega(t) - Nt] \bigvee_0^{2\pi} y;$$

2) *для любого $N > 0$*

$$E(H^\omega, NW^1_\infty)_\infty = \frac{1}{2} \max_{t\in[0,\pi]} [\omega(t) - Nt]\,;$$

3) *для любого сублинейного функционала ψ, для которого величины $\psi(W^0_\infty)$ и $\psi(W^1_\infty)$ конечны, и для любого $N > 0$*

$$\psi(H^\omega) \leq \frac{1}{2} \max_{t\in[0,\pi]} [\omega(t) - Nt]\, \psi(W^0_\infty) + N\psi(W^1_\infty);$$

4) *для произвольной функции* $x \in H^\omega$ *и для любого* $t > 0$

$$\inf_{z \in L^1_\infty} \left\{ \|x - z\|_\infty + t\|z'\|_\infty \right\} \le \inf_{N>0} \left\{ Nt + \frac{1}{2} \max_{t \in [0,\pi]} [\omega(t) - Nt] \right\}.$$

Доказательство. Утверждение 2) сразу следует из теоремы 7.5.2.

Докажем утверждение 1). Если рассматривать величину

$$\frac{1}{2} \max_{t \in [0,\pi]} [\omega(t) - Nt]$$

как значение преобразования Лежандра $\overline{\Phi}^*(-N)$ некоторой функции $\overline{\Phi}(t)$ (ниже показано, что такая функция существует), то в силу (7.4.4)

$$\Phi(t) = \inf_{N>0} \left\{ \overline{\Phi}^*(-N) + Nt \right\} \le$$

$$\le \inf_{N>0} \left\{ Nt + \frac{1}{2} \max_{u \in [0,\pi]} [\omega(u) - Nu] \right\}, \quad t \ge 0.$$

Положим

$$\Phi(t) := \inf_{N>0} \left\{ Nt + \frac{1}{2} \max_{u \in [0,\pi]} [\omega(u) - Nu] \right\}, \quad t \ge 0. \tag{7.5.5}$$

Тогда по определению преобразования Лежандра для $s > 0$ имеем

$$\overline{\Phi}^*(-s) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \{-ts - \overline{\Phi}(t)\} = \sup_{t>0} \{-ts + \Phi(t)\} =$$

$$= \sup_{t>0} \left\{ -ts + \inf_{N>0} \left\{ Nt + \frac{1}{2} \max_{u \in [0,\pi]} [\omega(u) - Nu] \right\} \right\} \le$$

$$\le \sup_{t>0} \left\{ -ts + \left\{ st + \frac{1}{2} \max_{u \in [0,\pi]} [\omega(u) - su] \right\} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \max_{u \in [0,\pi]} [\omega(u) - su]. \tag{7.5.6}$$

С другой стороны, так как для любого $t > 0$

$$\lim_{N\to\infty}\left\{Nt + \frac{1}{2}\max_{u\in[0,\pi]}[\omega(u) - Nu]\right\} \geq \lim_{N\to\infty} Nt = \infty,$$

то для любого $t > 0$

$$\inf_{N>0}\left\{Nt + \frac{1}{2}\max_{u\in[0,\pi]}[\omega(u) - Nu]\right\}$$

достигается в некоторой точке $N = N(t)$. Покажем, что $N \leq s$. Действительно, в противном случае, используя (7.5.6), мы имели бы

$$\overline{\Phi}^*(-s) = \sup_{t>0}\left\{-ts + Nt + \frac{1}{2}\max_{u\in[0,\pi]}[\omega(u) - Nu]\right\} \geq$$

$$\geq \sup_{t>0}(N - s)t = \infty,$$

что противоречит (7.5.6). Итак, $N \leq s$. Тогда снова, используя (7.5.6), получаем

$$\overline{\Phi}^*(-s) = \sup_{t>0}\left\{(N - s)t + \frac{1}{2}\max_{u\in[0,\pi]}[\omega(u) - Nu]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\max_{u\in[0,\pi]}[\omega(u) - Nu] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\max_{u\in[0,\pi]}[\omega(u) - su]\,.$$

Отсюда ввиду (7.5.6) следует, что для любого $s > 0$

$$\overline{\Phi}^*(-s) = \frac{1}{2}\max_{u\in[0,\pi]}[\omega(u) - su]\,.$$

Таким образом, величина $2^{-1}\max\limits_{t\in[0,\pi]}[\omega(t) - Nt]$ действительно является значением преобразования Лежандра $\overline{\Phi}^*(-N)$ функции $\overline{\Phi}(t)$, где $\Phi(t)$ определена равенством (7.5.5).

Заметим далее, что по определению опорной функции для любого $y \in \bigvee[0, 2\pi]$ имеем

$$S_{W^1_\infty}(y) := \sup_{f \in W^1_\infty} \int\limits_0^{2\pi} f(t)dy(t) = \sup_{\|f'\|_\infty \le 1} \int\limits_0^{2\pi} y(t)f'(t)dt = E_0(y)_1. \tag{7.5.7}$$

Поэтому, принимая во внимание (7.5.5), согласно утверждению 1) теоремы 7.4.1 для произвольной функции $y \in \bigvee[0, 2\pi]$ имеем

$$S_{H^\omega}(y) \le \bigvee_0^{2\pi} y \inf_{N>0} \left[N \frac{E_0(y)_1}{\bigvee\limits_0^{2\pi} y} + \frac{1}{2} \max_{t \in [0,\pi]} [\omega(t) - Nt] \right],$$

или

$$\sup_{f \in H^\omega} \int\limits_0^{2\pi} f(t)dy(t) \le NE_0(y)_1 + \frac{1}{2} \max_{t \in [0,\pi]} [\omega(t) - Nt] \bigvee_0^{2\pi} y.$$

Тем самым утверждение 1) доказано.

Утверждение 3) сразу следует из утверждения 4) теоремы 7.4.1 ввиду (7.5.6).

Для доказательства утверждения 4) заметим, что по определению поляры и ввиду (7.5.7)

$$(W^1_\infty)^0 = \left\{ y \in \bigvee[0, 2\pi] : S_{W^1_\infty}(y) \le 1 \right\} =$$

$$= \left\{ y \in \bigvee[0, 2\pi] : \ E_0(y)_1 \le 1 \right\}.$$

Поэтому согласно определению опорной функции для $z \in L^1_\infty$ имеем

$$S_{(W^1_\infty)^0}(z) = \sup_{y \in (W^1_\infty)^0} \int\limits_0^{2\pi} y(t)dz(t) =$$

$$= \sup_{E_0(y)_1 \le 1} \int\limits_0^{2\pi} [y(t) - c_1(y)]z'(t)dt = \|z'\|_\infty,$$

где $c_1(y)$ – константа наилучшего приближения функции y в L_1-метрике.

Таким образом,

$$K(H^\omega; W^1; x; t) = \inf_{z \in L^1_\infty} \left\{ \|x - z\|_\infty + t\|z'\|_\infty \right\},$$

и теперь утверждение 4) следует из утверждения 6) теоремы 7.4.1 ввиду (7.5.5). Эквивалентность утверждений 1) – 4) следует из теоремы 7.4.1. Теорема доказана.

7.6. Приложения неравенств типа Колмогорова в теории аппроксимации

Мы не ставим перед собой задачу изложить все известные результаты из теории аппроксимации, которые могут быть получены при помощи неравенств типа Колмогорова и теоремы эквивалентности (теорема 7.3.1), а лишь наметим схему таких приложений на примере периодического варианта неравенства Колмогорова (теорема 2.3.1 и замечание к ней), неравенства Лигуна (теорема 6.2.1) и пары неравенств авторов настоящей монографии (теоремы 6.4.1 и 6.5.2). Другие примеры таких приложений приведены в [214].

Положим $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p(\mathbf{T})}$.

Из неравенств Колмогорова и Лигуна и теоремы 7.3.1 сразу следует такая теорема.

Теорема 7.6.1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q \in [1, \infty]$. *Тогда справедливы следующие эквивалентные утверждения:*

1) *для любой функции* $x \in L^r_\infty$

$$E_0\left(x^{(r-k)}\right)_{q'} \le \frac{\|\varphi_k\|_{q'}}{\|\varphi_r\|_\infty^{k/r}} E_0\left(x\right)_\infty^{k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-k/r};$$

2) *для любого* $N > 0$

$$E\left(W^k_q, NW^r_1\right)_1 \le \frac{r-k}{k} \left(\frac{\|\varphi_r\|_\infty^{k/r}}{\|\varphi_k\|_{q'}} \frac{r}{k}\right)^{-\frac{r}{r-k}} N^{-\frac{k}{r-k}};$$

3) *для любой полунормы на* L_1

$$\psi\left(W_q^k\right) \le \frac{\|\varphi_k\|_{q'}}{\|\varphi_r\|_\infty^{k/r}} \psi\left(W_1^r\right)^{k/r} \psi\left(W_1^0\right)^{1-k/r};$$

4) *для любой функции* $x \in W_q^r$ *и любого* $t > 0$

$$\inf_{x_1 \in L_1^r} \left\{ \|x - x_1\|_1 + t \left\| x^{(r)} \right\|_1 \right\} \le \frac{\|\varphi_k\|_{q'}}{\|\varphi_r\|_\infty^{k/r}} t^{k/r}.$$

Константа $\|\varphi_k\|_{q'} / \|\varphi_r\|_\infty^{k/r}$ *в неравенствах из утверждений* 1) *и* 3) *неулучшаема на соответствующих классах. Также неулучшаемы константы при* $N^{-\frac{k}{r-k}}$ *и при* $t^{k/r}$ *в неравенствах из утверждений* 2) *и* 4).

Для дальнейшего изложения приложений неравенств типа Колмогорова нам будет удобно предварительно доказать следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 7.3.1.

Утверждение 7.6.1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k \le r$, $\alpha \in (0,1)$, $K > 0$, $q, p, s \in [1, \infty]$ *и* H *– произвольное подпространство из* L_s. *Если выполнено одно из утверждений теоремы* 7.3.1, *то*

$$E\left(W_q^k, H\right)_s \le K E\left(W_p^r, H\right)_s^\alpha. \tag{7.6.1}$$

Доказательство. Достаточно положить $\psi(x) = E(x, H)_s$ в теореме 7.3.1 и учесть, что $E(W_s^0, H)_s \le 1$.

В дальнейшем в качестве подпространства H будут выступать или пространство $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка не выше n ($n \in \mathbf{N}$), или пространство $S_{n,\mu}$ 2π-периодических сплайнов порядка μ ($\mu \in \mathbf{N}$) минимального дефекта с узлами в точках $\nu\pi/n$, $\nu \in \mathbf{Z}$.

Пусть $n \in \mathbf{N}$, а параметры k, r, q – такие, как в утверждении 7.6.1. Покажем, как при помощи одного из утверждений теоремы 7.6.1 и известных результатов С.М. Никольского (см., например, [209, § 4.2])

$$E\left(W_1^r, \mathcal{T}_n\right)_1 = \|\varphi_{n,r}\|_\infty \tag{7.6.2}$$

и Н.П. Корнейчука (см., например, [209, § 5.2])

$$E\left(W_1^r, S_{n,r-1}\right)_1 = \|\varphi_{n,r}\|_\infty \tag{7.6.3}$$

можно получить более общие результаты, а именно – результат Л.В. Тайкова (см., например, [209, § 4.2])

$$E\left(W_q^r, \mathcal{T}_n\right)_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{q'}, \tag{7.6.4}$$

а также следующий результат:

$$E\left(W_q^k, S_{n,\mu}\right)_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{q'}, \quad \mu \geq k-1, \tag{7.6.5}$$

принадлежащий Н.П. Корнейчуку (при $\mu = k-1$) (см., например, [209, § 5.2]) и А.А. Лигуну (при $\mu \geq k-1$) (см. [237]).

Действительно, применяя теоремы 7.6.1 и 7.3.1, согласно утверждению 7.6.1 имеем

$$E(W_q^k, H_n)_1 \leq \frac{\|\varphi_k\|_{q'}}{\|\varphi_r\|_\infty^{k/r}} E\left(W_1^r, H_n\right)_1^{k/r}, \tag{7.6.6}$$

где $H_n = \mathcal{T}_n$ или $H_n = S_{n,r-1}$. Применяя теперь соотношения (7.6.2) и (7.6.3), получаем

$$E(W_q^k, H_n)_1 \leq \frac{\|\varphi_k\|_{q'}}{\|\varphi_r\|_\infty^{k/r}} \left(n^{-r} \|\varphi_r\|_\infty\right)^{k/r} = \left\|\varphi_{n,k}\right\|_{q'}. \tag{7.6.7}$$

Установим теперь, что в (7.6.7) будет знак равенства. Пусть сначала $H_n = \mathcal{T}_n$. Тогда согласно теореме двойственности для наилучших приближений подпространством (см. теорему 10.1.5) имеем

$$E(W_q^k, \mathcal{T}_n)_1 \geq \sup_{\substack{x \in W_\infty^k \\ x \perp \mathcal{T}_n}} E_0(x')_{q'} \geq E_0(\varphi_{n,k})_{q'} = \left\|\varphi_{n,k}\right\|_{q'}. \tag{7.6.8}$$

Последнее равенство легко следует из критерия элемента наилучшего приближения в пространстве $L_{q'}$ (см. теорему 10.1.2). Из (7.6.7) и (7.6.8) вытекает (7.6.4).

Пусть теперь $H_n = S_{n,r-1}$ и $q \in (1, \infty]$ (при $q = 1$ доказывать нечего ввиду (7.6.3)). Положим

$$f_0(t) = \|\varphi_{n,k}\|_{q'}^{1-q'} |\varphi_{n,k}(t)|^{q'-1} \mathrm{sgn}\varphi_{n,k}(t).$$

Ясно, что $f_0(t) \perp 1$, и если $f_k(t)$ – k-й периодический интеграл от $f_0(t)$, такой, что $f_k(t) \perp 1$, то функция $f_k(t)$ имеет период $2\pi/n$, простые нули в точках $\nu\pi/n$ и, следовательно,

$$\mathrm{sgn} f_k(t) = \pm\, \varphi_{n,0}(t).$$

Положим при $m = 0, 1, \ldots$

$$g(t) = f_k(t - \gamma_m), \quad \gamma_m = [1 - (-1)^m]\, \frac{\pi}{4n},$$

и заметим, что так как $\left\| g^{(k)} \right\|_p = \|f_0\|_p = 1$, то $g \in W_p^k$.

Если $\psi_m(t)$ (при $m \in \mathbf{N}$) – m-й периодический интеграл от функции $\psi_0(t) = \mathrm{sgn} g(t)$ и $\psi_m(t) \perp 1$, то согласно определению $g(t)$ на каждом интервале $(2(i-1)\pi/n, 2i\pi/n)$ функция $\psi_m(t)$ в среднем равна нулю. Поэтому

$$\int\limits_0^{2\pi} s(t) \mathrm{sgn} g(t) dt = (-1)^m \int\limits_0^{2\pi} \psi_m(t) s^{(m)}(t) dt = 0, \quad s \in S_{n,m}.$$

Тогда, как известно (см. теорему 10.1.3), наилучшее приближение в метрике L_1 функции $g(t)$ в подпространстве $S_{n,m}$ доставляет тождественный нуль. Таким образом, имеем

$$E(g, S_{n,m}) = \|g\|_1 = \|\varphi_{n,k}\|_{q'}.$$

Отсюда ввиду (7.6.7) и произвольности $r > k$ следует (7.6.5).

Рассмотрим теперь приложения неравенств 6.4.1 и 6.5.2.

Из теорем 6.4.1 и 7.3.1 сразу следует такая теорема.

Теорема 7.6.2. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $p \in [1, \infty]$. Тогда справедливы следующие эквивалентные утверждения:*

1) *для любой функции* $x \in L_\infty^r$

$$E_0\left(x^{(r-k)}\right)_\infty \le \frac{\|\varphi_k\|_\infty}{\|\varphi_r\|_{p'}^{\frac{k}{r+1/p'}}} E_0\left(x\right)_{p'}^{\frac{k}{r+1/p'}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{r-k+1/p'}{r+1/p'}};$$

2) *для любого* $N > 0$

$$E\left(W_1^k, NW_p^r\right)_1 \le$$

$$\le \frac{r-k+1/p'}{k} \frac{\left(\|\varphi_k\|_\infty \dfrac{k}{r+1/p'}\right)^{\frac{r+1/p'}{r-k+1/p'}}}{\|\varphi_r\|_{p'}^{\frac{k}{r-k+1/p'}}} N^{-\frac{k}{r-k+1/p'}};$$

3) *для любой полунормы на* L_1

$$\psi(W_1^k) \le \frac{\|\varphi_k\|_\infty}{\|\varphi_r\|_{p'}^{\frac{k}{r+1/p'}}} \psi(W_p^r)^{\frac{k}{r+1/p'}} \psi(W_1^0)^{\frac{r-k+1/p'}{r+1/p'}};$$

4) *для любой функции* $x \in W_1^r$ *и любого* $t > 0$

$$\inf_{x_1 \in L_p^r} \left\{\|x - x_1\|_1 + t\left\|x^{(r)}\right\|_p\right\} \le \frac{\|\varphi_k\|_\infty}{\|\varphi_r\|_{p'}^{\frac{k}{r+1/p'}}} t^{\frac{k}{r+1/p'}}.$$

Константа $\|\varphi_k\|_\infty / \|\varphi_r\|_{p'}^{\frac{k}{r+1/p'}}$ *в неравенствах из утверждений* 1) *и* 3) *неулучшаема на соответствующих классах. Также неулучшаемы константы при* $N^{-\frac{k}{r-k+1/p'}}$ *и при* $t^{\frac{k}{r+1/p'}}$ *в неравенствах из утверждений* 2) *и* 4).

Из теорем 6.5.2 и 7.3.1 сразу следует такая теорема.

Теорема 7.6.3. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $r/2 < k < r$; $p \in [1, \infty]$. *Тогда справедливы следующие эквивалентные утверждения:*

1) *для любой функции* $x \in L_1^r$

$$E_0(x^{(r-k)})_2 \le \frac{\|g_k\|_2}{\|g_r\|_{p'}^{\frac{k-1/2}{r-1+1/p'}}} E_0(x)_{p'}^{\frac{k-1/2}{r-1+1/p'}} \left\|x^{(r)}\right\|_1^{\frac{r-k-1/2+1/p'}{r-1+1/p'}};$$

2) *для любого* $N > 0$

$$E\left(W_2^k, NW_p^r\right)_\infty \le$$

$$\le \frac{r-k-1/2+1/p'}{k-1/2} \frac{\left(\|g_k\|_2 \dfrac{k-1/2}{r-1+1/p'}\right)^{\frac{r-1+1/p'}{r-k-1/2+1/p'}}}{\|g_r\|_{p'}^{\frac{k-1/2}{r-k-1/2+1/p'}}} \times$$

$$\times N^{-\frac{k-1/2}{r-k-1/2+1/p'}};$$

3) *для любой полунормы на* L_1

$$\psi\left(W_1^k\right) \le \frac{\|g_k\|_2}{\|g_r\|_{p'}^{\frac{k-1/2}{r-1+1/p'}}} \psi\left(W_p^r\right)^{\frac{k}{r+1/p'}} \psi\left(W_1^0\right)^{\frac{r-k+1/p'}{r+1/p'}};$$

4) *для любой функции* $x \in W_2^k$ *и любого* $t > 0$

$$\inf_{x_1 \in L_p^r} \left\{\|x - x_1\|_\infty + t\left\|x^{(r)}\right\|_p\right\} \le \frac{\|g_k\|_2}{\|g_r\|_{p'}^{\frac{k-1/2}{r-1+1/p'}}} t^{\frac{k-1/2}{r-1+1/p'}}.$$

Константа $\|g_k\|_2 / \|g_r\|_{p'}^{\frac{k-1/2}{r-1+1/p'}}$ *в неравенствах из утверждений* 1) *и* 3) *неулучшаема на соответствующих классах. Также неулучшаемы константы при* $N^{-\frac{k-1/2}{r-k-1/2+1/p'}}$ *и при* $t^{\frac{k-1/2}{r-1+1/p'}}$ *в неравенствах из утверждений* 2) *и* 4).

Получим теперь с помощью утверждения 1) теоремы 7.6.3 оценку типа Джексона для наилучших равномерных приближений функций $x \in L_2^k$ тригонометрическими полиномами и полиномиальными сплайнами.

Теорема 7.6.4. *Пусть* $k, n, \mu \in \mathbf{N}$ *и* $H_n = \mathcal{T}_n$ *или* $H_n = S_{n,\mu}$, $\mu \geq k-1$. *Тогда для любой функции* $x \in L_2^k$ *справедливо неравенство*

$$E(x, H_n)_\infty \leq \frac{\|g_k\|_2}{n^{k-1/2}} \|x^{(k)}\|_2. \tag{7.6.9}$$

Константа $\|g_k\|_2$ *в правой части этого неравенства неулучшаема в том смысле, что*

$$\sup_n \sup_{x \in L_2^k} \frac{n^{k-1/2} E(x, H_n)_\infty}{\|x^{(k)}\|_2} = \|g_k\|_2. \tag{7.6.10}$$

Доказательство. Для $n \in \mathbf{N}$ положим

$$H_n^\perp := \left\{ x \in L_1 : \|x\|_1 \leq 1 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} x(t)\tau(t)dt = 0 \quad \forall \tau \in H_n \right\},$$

и для $k \in \mathbf{N}$ пусть

$$W^k H_n^\perp := \{x \in W_1^k : x^{(k)} \in H_n^\perp\}.$$

Фиксируем $x \in L_2^k$. Пользуясь теоремой двойственности для наилучших приближений подпространством (см. теорему 10.1.5), интегрируя по частям и применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$E(x, H_n)_\infty = \sup_{y \in H_n^\perp} \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt = \sup_{z \in W^k H_n^\perp} \int_0^{2\pi} x^{(k)}(t)z(t)dt \leq$$

$$\leq \|x^{(k)}\|_2 \sup_{z \in W^k H_n^\perp} \|z\|_2.$$

Выберем произвольное $r \in \mathbf{N}$, такое, что $r/2 < k < r$. Из последнего соотношения получаем

$$E(x, H_n)_\infty \le \|x^{(k)}\|_2 \sup_{z \in W^r H_n^\perp} \|z^{(r-k)}\|_2. \tag{7.6.11}$$

Оценим $\sup\limits_{z \in W^r H_n^\perp} \|z^{(r-k)}\|_2$ при помощи неравенства из утверждения 1) теоремы 7.6.3 при $p = 1$. Учитывая ограничение $\|z^{(r)}\|_1 \le 1$, имеем

$$\left\|z^{(r-k)}\right\|_2 \le \frac{\|g_k\|_2}{\|g_r\|_1^{\frac{k-1/2}{r}}} E_0\left(z\right)_1^{\frac{k-1/2}{r}}. \tag{7.6.12}$$

Согласно неравенству Бора–Фавара–Никольского для функций z, которые ортогональны подпространству $\mathcal{T}_{n-1}$ (см. [214, § 6.9]) или подпространству $S_{n,\mu}$ (см. [209, § 5.4]), выполняется неравенство

$$E_0\left(z\right)_1 \le \frac{\|g_r\|_1}{n^r}. \tag{7.6.13}$$

Соотношения (7.6.9) вытекают теперь из (7.6.11)–(7.6.13). Действительно,

$$E\left(x, H_n\right)_\infty \le \|x^{(k)}\|_2 \sup_{z \in W^r H_n^\perp} \|z^{(r-k)}\|_2 \le$$

$$\le \|x^{(k)}\|_2 \frac{\|g_k\|_2}{\|g_r\|_1^{\frac{k-1/2}{r}}} \sup_{z \in W^r H_n^\perp} E_0(z)_1^{\frac{k-1/2}{r}} \le$$

$$\le \|x^{(k)}\|_2 \frac{\|g_k\|_2}{\|g_r\|_1^{\frac{k-1/2}{r}}} \left(\frac{\|g_r\|_1}{n^r}\right)^{\frac{k-1/2}{r}} = \frac{\|g_k\|_2}{n^{k-1/2}} \|x^{(k)}\|_2.$$

Для доказательства (7.6.10) рассмотрим функцию $x_0 := g_{2k}/\|g_k\|_2$. Имеем следующую оценку снизу:

$$\sup_n \sup_{x \in L_2^k} \frac{n^{k-1/2} E(x, H_n)_\infty}{\|x^{(k)}\|_2} \ge \frac{E_0(x_0)_\infty}{\|x_0^{(k)}\|_2} = \frac{\|g_{2k}\|_\infty}{\|g_k\|_2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\bigvee\limits_{0}^{2\pi}(g_{2k})}{\|g_k\|_2} = \frac{\frac{1}{4}\|g_{2k-1}\|_1}{\|g_k\|_2} = \frac{\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi} g_{2k-1}(t)\mathrm{sgn}g_{2k-1}(t)dt}{\|g_k\|_2} =$$

$$= \frac{\int\limits_{0}^{2\pi} g_k(t)g_k(t)dt}{\|g_k\|_2} = \|g_k\|_2.$$

Теорема доказана.

7.7. Неравенства для верхних граней функционалов как неравенства типа Колмогорова

Для $a > 0$ положим (см. § 10.3)

$$R_{a,0}(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } 0 \le t < a, \\ 0, & \text{если } t \ge a, \end{cases}$$

и

$$R_{a,k}(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{a-t} R_{a,k-1}(u)du, & \text{если } 0 \le t < a, \\ 0, & \text{если } t \ge a, \end{cases}$$

если $k = 1, 2, \ldots$

Обозначим $R(f, \cdot)$ – Σ-перестановку функции f (см. § 10.3). Будем использовать следующие свойства функций $R_{a,k}(t)$ (см. 10.3.1–10.3.3):

$$R(\varphi_r, t) = 4R_{\pi,r}(t), \quad r \in \mathbf{N}, \tag{7.7.1}$$

$$R_{a,k}(\lambda t) = \lambda^k R_{a/\lambda,k}(t), \quad \lambda > 0, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{7.7.2}$$

$$\int\limits_{0}^{\pi} R_{\pi,r-1}(t)\,dt = \|\varphi_r\|_\infty. \tag{7.7.3}$$

Пусть $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, $p = 1$ или $p = \infty$, $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, $k \in \mathbf{N}$. Для $\lambda > 0$ положим

$$\Psi^p_{r,k}(\lambda) := 2^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} \lambda^{\frac{k}{r}} \int\limits_0^\pi R_{\pi,k-1/p}(\pi - t)\, \omega\left(t\lambda^{\frac{1}{r}}\right) dt, \qquad (7.7.4)$$

где $p' = p/(p-1)$, и отметим, что

$$\Psi^p_{1,k}(\lambda^{\frac{1}{r}}) = \Psi^p_{r,k}(\lambda). \qquad (7.7.5)$$

Положим также (здесь $r \in \mathbf{N}$)

$$\Phi^p_{r,k}(\lambda) := \Psi^p_{r,k}\left(\frac{\lambda}{\|\varphi_r\|_\infty}\right). \qquad (7.7.6)$$

Приведем некоторые свойства этих функций.

Лемма 7.7.1. *Пусть $p = 1$ или $p = \infty$, $r \geq k+1$ и ω – выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда $\Psi^p_{r,k}(\lambda)$ является выпуклым вверх модулем непрерывности.*

Доказательство. Из (7.7.4) получаем

$$\Psi^p_{r,k}(\lambda) = 2^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} \int\limits_0^\pi R_{\pi,k-1/p}(\pi - t) \left[\lambda^{\frac{k}{r}} \omega(t\lambda^{1/r})\right] dt.$$

Положим $U(\lambda) = \lambda^\alpha \omega(\lambda^\beta)$. Достаточно показать, что $U(\lambda)$ является выпуклым вверх модулем непрерывности, если $\alpha + \beta \leq 1$, $\alpha, \beta \geq 0$.

Для любых $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ввиду выпуклости $\omega(t)$ имеем

$$\frac{1}{2}\left[U(\lambda_1) + U(\lambda_2)\right] = \frac{\lambda_1^\alpha}{2}\omega\left(\lambda_1^\beta\right) + \frac{\lambda_2^\alpha}{2}\omega\left(\lambda_2^\beta\right) =$$

$$= \frac{\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha}{2}\left[\frac{\lambda_1^\alpha}{\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha}\omega\left(\lambda_1^\beta\right) + \frac{\lambda_2^\alpha}{\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha}\omega\left(\lambda_2^\beta\right)\right] \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha}{2}\omega\left[\frac{\lambda_1^{\alpha+\beta}}{\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha} + \frac{\lambda_2^{\alpha+\beta}}{\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha}\right].$$

Используя неравенство $\omega(t) \leq \gamma\omega\left(\dfrac{t}{\gamma}\right)$, $\gamma > 1$, вытекающее из выпуклости вверх $\omega(t)$, и полагая в нем

$$\gamma = \frac{\left(\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^{\alpha}}{\dfrac{\lambda_1^{\alpha} + \lambda_2^{\alpha}}{2}},$$

получаем

$$\frac{1}{2}\left[U(\lambda_1) + U(\lambda_2)\right] \leq \frac{\lambda_1^{\alpha} + \lambda_2^{\alpha}}{2}\gamma\omega\left[\frac{\lambda_1^{\alpha+\beta}}{\gamma\left(\lambda_1^{\alpha} + \lambda_2^{\alpha}\right)} + \frac{\lambda_2^{\alpha+\beta}}{\gamma\left(\lambda_1^{\alpha} + \lambda_2^{\alpha}\right)}\right] =$$

$$= \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^{\alpha}\omega\left[\frac{\lambda_1^{\alpha+\beta}}{2\left(\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^{\alpha}} + \frac{\lambda_2^{\alpha+\beta}}{2\left(\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^{\alpha}}\right].$$

Используя выпуклость вверх функции $t^{\alpha+\beta}$, имеем

$$\frac{1}{2}\left[U(\lambda_1) + U(\lambda_2)\right] \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^{\alpha}\omega\left[\frac{\left(\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^{\alpha+\beta}}{\left(\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^{\alpha}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^{\alpha}\omega\left[\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^{\beta}\right] = U\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right).$$

Лемма доказана.

Если функция $f(t)$ выпуклая вверх, то функция $f(t)/t$ монотонно не возрастает. Поэтому справедливо такое следствие.

Следствие 7.7.1. *При $p = 1$ или $p = \infty$ функция $t\Psi_{r,k}^{p}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ монотонно не убывает.*

Для $x \in L_1$, $x \perp 1$, положим (определение класса H^ω приведено в § 7.5)

$$S_{H^\omega}(x) := \sup_{f \in H^\omega} \int_0^{2\pi} f(t)x(t)dt.$$

Известны следующие оценки для $S_{H^\omega}(x^{(k)})$, $x \in L_V^r$ или $x \in L_1^r$.

Теорема 7.7.1 (см., например, [209, теорема 7.1.10]). *Пусть ω – выпуклый вверх модуль непрерывности. Если $x \in W_V^r$, $r \in \mathbf{N}$, $x \neq \neq \mathrm{const}$, и $a > 0$ выбрано из условия*

$$E_0(x)_1 = \|R_{a,r}\|_1, \tag{7.7.7}$$

то

$$S_{H^\omega}(x') \le \frac{1}{2} \int_0^a R_{a,r-1}(a-t)\omega(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^r \int_0^\pi R_{\pi,r-1}(\pi - t)\,\omega\left(\frac{at}{\pi}\right)dt. \tag{7.7.8}$$

Если $x \in W_1^r$, $r \in \mathbf{N}$, $r \ge 2$, $x \neq \mathrm{const}$, и $a > 0$ выбрано из условия

$$E_0(x)_1 = \|R_{a,r-1}\|_1, \tag{7.7.9}$$

то

$$S_{H^\omega}(x') \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{r-1} \int_0^\pi R_{\pi,r-2}(\pi - t)\,\omega\left(\frac{at}{\pi}\right)dt. \tag{7.7.10}$$

При $a = \pi/n$, $n = 1, 2, \ldots$, оценки (7.7.8) и (7.7.10) точны на классах W_V^r и W_1^r (см., например, [209, теорема 7.1.10]). Знак равенства в (7.7.8) реализуется на функции $x(t) = g_{n,r+1}(t)$. Точность оценки (7.7.10) следует из того факта, что функция $x(t) = g_{n,r}(t)$ является пределом (в соответствующей топологии) последовательности функций из W_1^r. При доказательстве точности существенно

используется нечетная $2\pi/n$-периодическая функция, определяемая на $[0, \pi/n]$ соотношениями

$$f_n(\omega, t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega\left(2t\right), & \text{если } t \in [0, \pi/2n]; \\ \dfrac{1}{2}\omega\left(2\left(\pi/n - t\right)\right), & \text{если } t \in [\pi/2n, \pi/n]. \end{cases} \tag{7.7.11}$$

Известно (см., например, [214, с. 159]), что если ω – выпуклый вверх модуль непрерывности, то $f_n(\omega, t) \in H^\omega$.

Теорему 7.7.1 можно переформулировать следующим образом в виде неравенства типа Колмогорова.

Теорема 7.7.2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, ω – выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции $x \in W_V^r$*

$$S_{H^\omega}\left(x'\right) \le \Phi_{r+1,r}^1\left(E_0\left(x\right)_1\right) \tag{7.7.12}$$

и любой функции $x \in L_V^r$

$$S_{H^\omega}\left(x'\right) \le \bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})\, \Phi_{r+1,r}^1\left(\frac{E_0\left(x\right)_1}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right). \tag{7.7.13}$$

Если $r \ge 2$, то для любой функции $x \in W_1^r$

$$S_{H^\omega}(x') \le \Phi_{r,r-1}^1\left(E_0\left(x\right)_1\right) \tag{7.7.14}$$

и любой функции $x \in L_1^r$, $r \ge 2$,

$$S_{H^\omega}(x') \le \|x^{(r)}\|_1\, \Phi_{r,r-1}^1\left(\frac{E_0\left(x\right)_1}{\|x^{(r)}\|_1}\right). \tag{7.7.15}$$

Доказательство. Пусть $x \in W_V^r$. Если $x = \mathrm{const}$, то соотношения (7.7.12) и (7.7.14) очевидны. Пусть $x \ne \mathrm{const}$. Выберем a из условия (7.7.7). Используя (7.7.2) и (7.7.3), представляем $\|R_{a,r}\|_1$ в виде

$$\|R_{a,r}\|_1 = \int_0^a R_{a,r}(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^a R_{a,r}\left(\frac{a}{\pi}\frac{\pi t}{a}\right)dt = \left(\frac{a}{\pi}\right)^r \int\limits_0^a R_{\pi,r}\left(\frac{\pi t}{a}\right)dt =$$

$$= \left(\frac{a}{\pi}\right)^{r+1} \int\limits_0^\pi R_{\pi,r}\,(t)\,dt = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{r+1} \|\varphi_{r+1}\|_\infty.$$

Тогда согласно условию (7.7.7) получаем

$$\frac{a}{\pi} = \left(\frac{E_0(x)_1}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r+1}}. \tag{7.7.16}$$

Используя (7.7.16) в (7.7.8), имеем

$$S_{H^\omega}(x') \le \frac{1}{2}\left(\frac{E_0(x)_1}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty}\right)^{\frac{r}{r+1}} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi R_{\pi,r-1}\,(\pi - t)\,\omega\left(t\left(\frac{E_0(x)_1}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r+1}}\right)dt.$$

Принимая во внимание соотношения (7.7.4) и (7.7.6), получаем

$$S_{H^\omega}(x') \le \Psi^1_{r+1,r}\left(\frac{E_0(x)_1}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty}\right) = \Phi^1_{r+1,r}\,(E_0(x)_1). \tag{7.7.17}$$

Неравенство (7.7.12) доказано.

Если $x \in L^r_V$, то

$$\frac{x}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(x^{(r)})} \in W^r_V,$$

и из (7.7.12) имеем

$$S_{H^\omega}\left(\frac{x'}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right) \le \Phi^1_{r+1,r}\left(\frac{E_0(x)_1}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right),$$

или

$$S_{H^\omega}\left(x'\right) \le \bigvee_0^{2\pi}\left(x^{(r)}\right)\Phi^1_{r+1,r}\left(\frac{E_0(x)_1}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right).$$

Соотношения (7.7.12) и (7.7.13) доказаны. Соотношения (7.7.14) и (7.7.15) выводятся из (7.7.10) аналогично.

Используя неравенства Стейна ((2.6.1) при $p = 1$), (7.7.13) и (7.7.15), докажем следующее обобщение теоремы 7.7.2.

Теорема 7.7.3. *Пусть $r, k \in \mathbf{N}$, $k \le r$, ω – выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции $x \in L^r_V$*

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})\,\Phi^1_{r+1,r+1-k}\left(\frac{E_0\,(x)_1}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right) \tag{7.7.18}$$

и любой функции $x \in L^r_1$

$$S_{H^\omega}\left(x^{(k)}\right) \le \|x^{(r)}\|_1\,\Phi^1_{r,r-k}\left(\frac{E_0\,(x)_1}{\|x^{(r)}\|_1}\right). \tag{7.7.19}$$

Докажем только соотношение (7.7.19).

Заметим, что $x^{(k-1)} \in L_1^{r-k+1}$. Чтобы оценить $S_{H^\omega}\left(x^{(k)}\right)$, используем неравенство (7.7.15):

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_1\,\Phi^1_{r-k+1,r-k}\left(\frac{E_0(x^{(k-1)})_1}{\|x^{(r)}\|_1}\right). \tag{7.7.20}$$

Если $k > 1$, то применим неравенство Стейна (2.6.1) для оценки $E_0(x^{(k-1)})_1$. Учитывая, что функция $\Phi^1_{r-k+1,r-k}$ монотонно неубывающая согласно лемме 7.7.1, получаем

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_1\,\Phi^1_{r-k+1,r-k}\left(\frac{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{\frac{r-k+1}{r}}}\left(\frac{E_0\,(x)_1}{\|x^{(r)}\|_1}\right)^{\frac{r-k+1}{r}}\right). \tag{7.7.21}$$

При $k = 1$ соотношение (7.7.21) совпадает с (7.7.15). Применяя определения (7.7.6) и (7.7.5), имеем для любого $\lambda > 0$

$$\Phi^1_{r-k+1,r-k}\left(\frac{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{\frac{r-k+1}{r}}}\lambda^{\frac{r-k+1}{r}}\right) =$$

$$= \Psi^1_{r-k+1,r-k}\left(\frac{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{\frac{r-k+1}{r}}}\frac{\lambda^{\frac{r-k+1}{r}}}{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}\right) =$$

$$= \Psi^1_{r-k+1,r-k}\left(\left(\frac{\lambda}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-k+1}{r}}\right) = \Psi^1_{1,r-k}\left(\left(\frac{\lambda}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r}}\right) =$$

$$= \Psi^1_{r,r-k}\left(\frac{\lambda}{\|\varphi_r\|_\infty}\right) = \Phi^1_{r,r-k}(\lambda). \qquad (7.7.22)$$

Неравенство (7.7.19) теперь следует из (7.7.21) и (7.7.22).

Соотношение (7.7.18) можно доказать аналогично, используя неравенство (7.7.13) вместо неравенства (7.7.15) и неравенство (2.6.12) вместо (2.6.1).

Запишем теперь в виде неравенства типа Колмогорова оценку для $S_{H^\omega}(x^{(k)})$, $x \in L^r_\infty$.

Начнем со следующей теоремы.

Теорема 7.7.4 ([214], теорема 7.3.2). *Пусть $x \in W^r_\infty$, r, $k \in \mathbf{N}$, $2 \le k \le r$, ω – выпуклый вверх модуль непрерывности и число $b > 0$ выбрано из условия*

$$E_0(x)_\infty = b^r\|\varphi_r\|_\infty. \qquad (7.7.23)$$

Тогда

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \int_0^\pi R(x^{(k-1)}, t)\omega'(t)dt \le$$

$$\le b^{r-k}\int_0^{\pi b} R\left(\varphi_{r-k+1}, \frac{t}{b}\right)\omega'(t)dt. \qquad (7.7.24)$$

Неравенство (7.7.24) *при* $b = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, *неулучшаемо и обращается в равенство на функции* $x(t) = \varphi_{n,r}(t)$.

Из теоремы 7.7.4 вытекает такая теорема.

Теорема 7.7.5. *Пусть* r, $k \in \mathbf{N}$, $2 \le k \le r$, ω *– выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции* $x \in W^r_\infty$

$$S_{H^\omega}\left(x^{(k)}\right) \le \Phi^\infty_{r,r-k}(E_0(x)_\infty) \tag{7.7.25}$$

и любой функции $x \in L^r_\infty$

$$S_{H^\omega}\left(x^{(k)}\right) \le \|x^{(r)}\|_\infty \Phi^\infty_{r,r-k}\left(\frac{E_0\,(x)_\infty}{\|x^{(r)}\|_\infty}\right). \tag{7.7.26}$$

Доказательство. Фиксируем любую функцию $x \in W^r_\infty$. Выберем b из условия (7.7.23), т. е.

$$b = \left(\frac{E_0(x)}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Из (7.7.24) следует, что

$$S_{H^\omega}\left(x^{(k)}\right) \le b^{r-k} \int\limits_0^{\pi b} R\left(\varphi_{r-k+1}, \frac{t}{b}\right) \omega'(t)dt.$$

Используя равенство (7.7.1), производя замену переменных в последнем интеграле и интегрируя по частям, переписываем это соотношение следующим образом:

$$S_{H^\omega}\left(x^{(k)}\right) \le 4b^{r-k} \int\limits_0^{\pi b} R_{\pi,r-k+1}\left(\frac{t}{b}\right) \omega'(t)dt =$$

$$= 4b^{r-k+1} \int\limits_0^{\pi} R_{\pi,r-k+1}\,(t)\,\omega'(tb)dt =$$

$$= 2b^{r-k} \int\limits_0^{\pi} R_{\pi,r-k}\,(\pi - t)\,\omega(tb)dt.$$

Таким образом,

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \leq$$
$$\leq 2\left(\frac{E_0(x)}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-k}{r}} \int\limits_0^{\pi} R_{\pi,r-k}\,(\pi - t)\,\omega\left(t\left(\frac{E_0(x)}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r}}\right)dt \tag{7.7.27}$$

для любой функции $x \in W^r_\infty$.

Неравенство (7.7.25) вытекает из (7.7.27), (7.7.4) и (7.7.6), а неравенство (7.7.26) – из (7.7.25).

Для имеющей нулевое среднее значение функции y обозначим через $I_r y$ r-й периодический интеграл от y, также имеющий нулевое среднее значение на периоде.

Комбинируя теоремы 7.7.3 и 7.7.5, получаем следующее утверждение.

Теорема 7.7.6. *Пусть $p = 1$ или $p = \infty$, $r,\ l \in \mathbf{N},\ 1 + 1/p' \leq \leq l \leq r$, ω – выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции $x \in L^r_p$*

$$S_{H^\omega}(x^{(l)}) \leq \|x^{(r)}\|_p\,\Phi^p_{r,r-l}\left(\frac{E_0\,(x)_p}{\|x^{(r)}\|_p}\right). \tag{7.7.28}$$

Для любой функции $x \in L_p$, $x \neq \theta_{L_p}$, с нулевым средним значением на периоде и всех $k = 0, 1, \ldots, r - 1 - 1/p'$

$$S_{W^k H^\omega}\,(x) := \sup_{f \in W^k H^\omega} \int\limits_0^{2\pi} f(t)x(t)dt \leq \|x\|_p\,\Phi^p_{r,k}\left(\frac{E_0\,(I_r x)_p}{\|x\|_p}\right). \tag{7.7.29}$$

В случае, когда $\omega\,(t) = t^\alpha$ для $t \in [0, \pi]$, $\alpha \in (0, 1]$, неравенство (7.7.28) имеет вид

$$S_{H^\alpha}\left(x^{(l)}\right) \leq E_0\,(x)_p^{1-\frac{l-\alpha}{r}}\,\|x^{(r)}\|_p^{\frac{l-\alpha}{r}} \times$$

$$\times \frac{2^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-\frac{l-\alpha}{r}}} \int\limits_0^\pi R_{\pi,r-l-1/p}\,(\pi-t)\,t^\alpha dt.$$

Напомним, что символом $\nu(x)$ мы обозначили число перемен знака функции x на периоде. Справедливо следующее обобщение неравенства (7.7.19).

Теорема 7.7.7. *Пусть $r, k \in \mathbf{N}$, $\quad 1 < k \le r$, ω – выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции $x \in L_1^r$ и любого $p \ge 1$ имеем*

$$S_{H^\omega}\left(x^{(k)}\right) \le \|x^{(r)}\|_1\, \Phi^{1,p}_{r-1+1/p,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p} \frac{E_0\,(x)_p}{\|x^{(r)}\|_1}\right), \tag{7.7.30}$$

где

$$\Phi^{1,p}_{r-1+1/p,r-k}(\lambda) := \Psi^1_{r-1+1/p,r-k}\left(\frac{\lambda}{\|g_r\|_p}\right).$$

Доказательство. Для функций $x \in L_1^r$ справедливо неравенство (7.7.20). Используя неравенство (6.3.1) для оценки $E_0(x^{(k-1)})_1$ и учитывая монотонность функции $\Phi^1_{r-k+1,r-k}$, для любого $p \in$ $\in\ [1,\infty)$ имеем $\left(\text{здесь } \alpha = \dfrac{r-k+1}{r-1+1/p}\right)$

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_1\, \Phi^1_{r-k+1,r-k}\times$$

$$\times\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|g_{r-k+1}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha} E_0\,(x)_p^\alpha\, \|x^{(r)}\|_1^{1-\alpha} \frac{1}{\|x^{(r)}\|_1}\right) =$$

$$= \|x^{(r)}\|_1\, \Phi^1_{r-k+1,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|g_{r-k+1}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha}\left(\frac{E_0\,(x)_p}{\|x^{(r)}\|_1}\right)^\alpha\right).$$

Применяя (7.7.6), равенство $g_r = 1/4\varphi_{r-1}$ и соотношение (7.7.5), получаем:

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_1\, \Psi^1_{r-k+1,r-k}\times$$

$$\times\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha}\frac{\|g_{r-k+1}\|_1}{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}\left(\frac{E_0\,(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right)^{\alpha}\right)=$$

$$=\|x^{(r)}\|_1\,\Psi^1_{r-k+1,r-k}\left(\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p}\frac{E_0\,(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right)^{\alpha}\right)=$$

$$=\|x^{(r)}\|_1\,\Psi^1_{1,r-k}\left(\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p}\frac{E_0\,(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right)^{\frac{\alpha}{r-k+1}}\right).$$

Учитывая значение α, соотношение (7.7.5) и определение функции $\Phi^{1,p}_{r-1+1/p,r-k}(\lambda)$, получаем

$$S_{H^\omega}(x^{(k)})\le$$

$$\le\|x^{(r)}\|_1\,\Psi^1_{1,r-k}\left(\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)}\frac{E_0\,(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right)^{\frac{1}{r-1+1/p}}\right)=$$

$$=\|x^{(r)}\|_1\,\Psi^1_{r-1+1/p,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p}\frac{E_0\,(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right)=$$

$$=\|x^{(r)}\|_1\,\Phi^{1,p}_{r-1+1/p,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p}\frac{E_0\,(x)_p}{\|x^{(r)}\|_1}\right).$$

Теорема 7.7.7 доказана.

С помощью определений (7.7.4) и (7.7.6) можно записать неравенство (7.7.30) в следующем виде:

$$S_{H^\omega}(x^{(k)})\le\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p}\frac{E_0\,(x)_p}{\|x^{(r)}\|_1\|g_r\|_p}\right]^{\frac{r-k}{r-1+1/p}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi R_{\pi,r-k-1}\,(\pi-t)\,\omega\left(t\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p}\left(\frac{E_0\,(x)_p}{\|x^{(r)}\|_p\|g_r\|_p}\right)^{\frac{1}{r-1+1/p}}\right)dt.$$

В случае, когда $\omega(t) = t^\alpha$ для $t \in [0, \pi]$, $\alpha \in (0, 1]$, последнее неравенство имеет вид

$$S_{H^\alpha}\left(x^{(k)}\right) \le E_0(x)_p^{\frac{r-k+\alpha}{r-1+1/p}} \|x^{(r)}\|_p^{\frac{k-1-\alpha+1/p}{r-1+1/p}} \times$$

$$\times \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p} \frac{1}{\|g_r\|_p}\right]^{\frac{r-k+\alpha}{r-1+1/p}} \int\limits_0^\pi R_{\pi,k-1/p}(\pi - t)\, t^\alpha dt.$$

Выше (см. теорему 7.7.6) было доказано, что если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, $p = 1$ или $p = \infty$, $k = 0, 1, \ldots$, $r \in \mathbf{N}$, $r \ge k + 1 + 1/p'$, то для любой функции $y \in L_p$, $y \ne \theta_{L_p}$, $y \perp 1$,

$$S_{W^k H^\omega}(y) \le \|y\|_p\, \Phi_{r,k}^p\left(\frac{E_0\,(I_r y)_p}{\|y\|_p}\right). \tag{7.7.31}$$

Применим теперь теорему эквивалентности для опорных функций (теорему 7.4.1) для получения утверждений, эквивалентных (7.7.31). То, что теорема 7.4.1 справедлива для неравенств типа Колмогорова, записанных в форме неравенств для опорных функций выпуклых множеств, дает единый подход как к традиционным приложениям неравенств типа Колмогорова, так и к некоторым результатам, которые не рассматривались как такого рода приложения.

Так как функция $\Phi_{r,k}^p(\lambda)$ выпукла вверх согласно лемме 7.7.1, из (7.7.31) и теоремы 7.4.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 7.7.8. *Пусть p, k и ω такие, как в неравенстве* (7.7.31), $r \in \mathbf{N}$, $r \ge k + 1 + 1/p$. *Тогда справедливо каждое из следующих эквивалентных утверждений:*

1) *для любой функции $y \in L_{p'}$, $y \ne \theta_{L_{p'}}$, $y \perp 1$,*

$$S_{W^k H^\omega}(y) \le \|y\|_{p'}\, \Phi_{r,k}^{p'}\left(\frac{E_0\,(I_r y)_{p'}}{\|y\|_{p'}}\right);$$

2) *для любой функции $y \in L_{p'}$, $y \perp 1$, и любого $N > 0$*

$$S_{W^k H^\omega}(y) \le \|y\|_{p'} \max_{\lambda > 0}\left[\Phi_{r,k}^{p'}(\lambda) - N\lambda\right] + N E_0\,(I_r y)_{p'};$$

3) *для любого* $N > 0$

$$E\left(W^k H^\omega, N W_p^r\right)_p \le \max_{\lambda>0}\left[\Phi_{r,k}^{p'}(\lambda) - N\lambda\right];$$

4) *если* ψ *– сублинейный функционал на* L_p, *то для любого* $N > 0$ *имеем*

$$\psi\left(W^k H^\omega\right) \le \psi\left(H_{L_p}\right) \max_{\lambda>0}\left[\Phi_{r,k}^{p'}(\lambda) - N\lambda\right] + N\psi\left(W_p^r\right);$$

5) *если* ψ *– сублинейный функционал на* L_p, $\psi \ne 0$, *то*

$$\psi\left(W^k H^\omega\right) \le \psi\left(H_{L_p}\right) \Phi_{r,k}^{p'}\left(\frac{\psi\left(W_p^r\right)}{\psi\left(H_{L_p}\right)}\right);$$

6) *для любой функции* $x \in W^k H^\omega$ *и любого* $t > 0$ *выполняется неравенство*

$$\inf_{x_1 \in L_p^r}\left\{\|x - x_1\|_p + t\left\|x_1^{(r)}\right\|_p\right\} \le \Phi_{r,k}^{p'}(t).$$

7.8. Поперечники и экстремальные подпространства

Пусть W – центрально-симметричное множество в L_s, $s \in [1, \infty]$. Поперечник по Колмогорову $d_m(W)_s$ размерности m ($m \in \mathbf{N}$) определяется равенством

$$d_m(W)_s := \inf\{E(W, X_m)_s : \dim X_m \le m\},$$

где нижняя грань вычисляется по всем подпространствам $X_m \subset L_s$ размерности $\le m$. Говорят, что подпространство X_m является экстремальным для поперечника $d_m(W)_s$, если $d_m(W)_s = E(W, X_m)_s$.

В следующей теореме на примере неравенства Лигуна (6.2.1) показана схема нахождения экстремальных подпространств классов периодических функций при помощи неравенств типа Колмогорова.

Теорема 7.8.1. *Пусть $n, r \in \mathbf{N}$. Если подпространство X_m размерности m ($m = 2n-1$ или $m = 2n$) является экстремальным для поперечника $d_m\left(W_1^r\right)_1$, то это же подпространство X_m экстремально и для поперечников $d_m(W_q^k)_1$ при всех $q \in (1, \infty]$ и всех $k \in \mathbf{N}$, $k < r$.*

Доказательство. Известно, что $d_m(W_p^r)_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}$ для всех $p \in [1, \infty]$ (см., например, [214, теорема 10.3.2]). Поэтому достаточно доказать, что

$$E(W_q^k, X_m)_1 \le \|\varphi_{n,k}\|_{q'}, \tag{7.8.1}$$

если

$$E(W_1^r, X_m)_1 \le \|\varphi_{n,r}\|_\infty. \tag{7.8.2}$$

Пусть выполнено (7.8.2). Применяя неравенство (6.2.1) и утверждение 7.6.1, получаем

$$E(W_q^k, X_m)_1 \le \frac{\|\varphi_k\|_{q'}}{\|\varphi_r\|_\infty^{k/r}} E\left(W_1^r, X_m\right)_1^{k/r}.$$

Отсюда согласно (7.8.2) имеем

$$E(W_q^k, X_m)_1 \le \frac{\|\varphi_k\|_{q'}}{\|\varphi_r\|_\infty^{k/r}} \left(n^{-r} \|\varphi_r\|_\infty\right)^{k/r} = n^{-k} \|\varphi_k\|_{q'} = \left\|\varphi_{n,k}\right\|_{q'}.$$

Тем самым (7.8.1) и теорема доказаны.

Комментарии к главе 7

Настоящая и следующая главы посвящены приложениям неравенств для производных. В данной главе рассматриваются приложения в теории аппроксимации.

Мы начали с задачи С.Б. Стечкина [296, 297] об аппроксимации неограниченных операторов ограниченными и близкой к ней задачи о восстановлении значений оператора по неточной информации.

В § 7.1 приведена постановка задач и изложены общие факты, связанные с этими задачами. При этом нас интересуют главным образом связи этих задач с неравенствами типа Колмогорова.

В § 7.2, следуя статье Стечкина [297], описываем простейшие случаи решения этих задач и приводим соответствующие неравенства типа Колмогорова. По поводу дальнейших, более сложных результатов отсылаем читателя к обзорам [19, 17], в которых имеются также подробные библиографические указания. Некоторые общие формулировки приведены в разделе "Дополнительные результаты".

Другого рода приложения связаны, прежде всего, с задачей приближения одного функционального класса другим. Значение этой задачи для решения многих экстремальных задач теории приближений было понятно благодаря работам Н.П. Корнейчука [206, 207]. В работе [207] был впервые успешно применен метод промежуточного приближения класса H^ω классом KH^1 с последующим использованием результатов по наилучшим тригонометрическим приближениям класса KH^1, для получения точной оценки наилучшего равномерного приближения класса H^ω тригонометрическими полиномами.

В § 7.5 показываем, что из данной Н.П. Корнейчуком оценки приближения класса классом сразу же следует неравенство типа Колмогорова для опорных функций классов H^ω и KH^1 (т. е. для верхних граней значений функционалов на этих классах). Вообще, в известном смысле (см. § 7.4) задача приближения класса классом первична по отношению к неравенствам типа Колмогорова, и ее можно рассматривать как "геометрический источник" таких неравенств.

Задача приближения класса классом в случае непериодических функций, заданных на оси, изучалась (в том числе в связи с задачей Стечкина) Ю.Н. Субботиным [302], Л.В. Тайковым [308], В.В. Арестовым [15] и другими математиками. Однако наиболее выпукло связь задачи приближения класса классом с задачей о точных неравенствах типа Колмогорова проявилась в "периодическом случае". Поэтому мы не углубляемся в изучение этой задачи в непериодическом случае, но подробно обсуждаем периодический случай.

В § 7.3 приведена, в частности, доказанная А.А. Лигуном [237] теорема об эквивалентности трех фактов: наличия некоторого неравенства типа Колмогорова, существования определенной оценки приближения класса классом и, наконец, наличия некоторого нера-

венства для верхних граней полунорм на некоторых классах функций (см. теорему 7.3.1). Четвертый из эквивалентных перечисленных фактов – наличие некоторой оценки для K-функционала – добавлен в теорему 7.3.1 авторами настоящей монографии.

Появившаяся на основе анализа теоремы 7.3.1 общая точка зрения подытожена в § 7.4 в виде общей теоремы эквивалентности (теорема 7.4.1 [59]) неравенств типа Колмогорова для опорных функций выпуклых множеств другим задачам.

В § 7.6, следуя работе [213], записываем известные оценки Н.П. Корнейчука [205, 206] верхних граней функционалов на классах $W^r H^\omega$ как неравенства типа Колмогорова и анализируем их с точки зрения общей теоремы эквивалентности из § 7.4.

§ 7.5 посвящен приложениям в теории аппроксимации неравенств из гл. 6. Здесь приведены вытекающие из таких неравенств оценки приближения класса классом и оценки K-функционалов. Кроме того, проиллюстрировано действие метода промежуточного приближения для точного решения задач приближения функциональных классов тригонометрическими полиномами и сплайнами.

В § 7.8 приведены некоторые другие приложения неравенств типа Колмогорова в теории аппроксимации.

Дополнительные результаты к главе 7

1. Некоторые неравенства типа Колмогорова для функционалов, действующих на пространствах Липшица $H^\alpha_{[0,1]}$, приведены в [226, гл. 3]. В частности, если H^0_1 – пополнение пространства H^1 по норме

$$\|x\|_{H^\alpha} := \sup_{0\le t,\tau\le 1} \frac{|x(t)-x(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha}, \quad 0\le\alpha\le 1,$$

$(H^0_\alpha)'$ – сопряженное к H^0_α пространство, то при $0<\beta<\alpha\le 1$ для $x\in H^1_0$ справедливо неравенство

$$\|x\|_{\left(H^0_\beta\right)'} \le \|x\|^{1-\beta/\alpha}_{(H^0_1)'} \|x\|^{\beta/\alpha}_{(H^0_\alpha)'}.$$

2. Пусть Q – метрически выпуклый компакт с метрикой $\rho(x,y)$, $x,y\in Q$, $C=C(Q)$ – пространство непрерывных на Q функций,

$\omega_x(h)$ – модуль непрерывности x:

$$\omega_x(h) = \sup\{|x(t) - x(s)| : \rho(t,s) \le h\}, \quad h \in [0, \mathrm{diam} Q],$$

$\overline{\omega}_x(h)$ – наименьшая выпуклая вверх мажоранта функции $\omega_x(h)$.

Для заданного модуля непрерывности $\omega(h)$ определим пространство

$$C^\omega = C^\omega(Q) := \{x \in C(Q) : \|x\|_\omega := \sup_{h \in [0, \mathrm{diam} Q]} \frac{\omega_x(h)}{\omega(h)} < \infty\},$$

единичным шаром которого является класс $H^\omega(Q)$.

В частности, если $\omega(h) = h^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, то имеем $\|x\|_\alpha = \sup\{\omega_x(h)h^{-\alpha},\ h \in [0, \mathrm{diam} Q]\}$, и $C^\omega = C^\alpha$ – соответственно липшицеву норму и пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α.

Пусть $T : C^\omega \to C$ – ограниченный сублинейный (т. е. полуаддитивный однородный) оператор, причем $Tx = 0$ для $x = \mathrm{const}$;

$$\|T\|_{\omega \to C} = \sup\{\|Tx\|_C; x \in H^\omega\}.$$

Справедливы следующие утверждения (см. [283a]).

А. Для всех $x \in C$ выполняется неравенство

$$\|Tx\|_C \le \frac{1}{2}\|T\|_{C \to C}(\overline{\omega_x \omega^{-1}})(2\|T\|_{\omega \to C}\|T\|^{-1}_{C \to C}), \qquad (\text{Д}.7.1)$$

причем для каждого оператора T неравенство (Д.7.1) является точным в том смысле, что в правой части ни константу $1/2$, ни аргумент $2\|T\|_{\omega \to C}\|T\|^{-1}_{C \to C}$ для всех $x \in C$ уменьшить нельзя.

Б. Пусть строго монотонные модули непрерывности ω_1 и ω_2 такие, что функция $\omega_1 \omega_2^{-1}$ является выпуклой вверх. Тогда для любого ограниченного сублинейного оператора $T : C \to C$ выполняется неравенство

$$\omega_1^{-1}\left(\frac{2\|T\|_{\omega_1 \to C}}{\|T\|_{C \to C}}\right) \le \omega_2^{-1}\left(\frac{2\|T\|_{\omega_2 \to C}}{\|T\|_{C \to C}}\right), \qquad (\text{Д}.7.2)$$

которое является точным в том смысле, что существуют операторы T, обращающие (Д.7.2) в равенство.

В частности, если $0 < \alpha < \beta \leq 1$, то

$$\|T\|_{\alpha\to C} \leq \left(\frac{1}{2}\|T\|_{C\to C}\right)^{1-\alpha/\beta} \|T\|_{\beta\to C}^{\alpha/\beta}. \qquad (\text{Д}.7.3)$$

Неравенства типа (Д.7.3) обычно называют интегральными теоремами для операторов. Однако их можно интерпретировать и как аналоги неравенств типа Колмогорова; достаточно сравнить (Д.7.3) с неравенствами для верхних граней полунорм из п. 4) теоремы эквивалентности 7.4.1.

Одно из приложений неравенств (Д.7.1) и (Д.7.2) – задачи теории равномерного приближения функций.

Пусть, например, A – подпространство C, P_A – метрическая проекция из C на A. Полагая $T = I - P_A$, получаем

$$\|Tx\|_C = \|(I - P_A)x\|_C = E(x, A),$$

наилучшее приближение x подпространством A. Тогда соотношение (Д.7.3) принимает вид

$$E(x, A) \leq \frac{1}{2}(\overline{\omega_x \omega^{-1}})(2E(H^\omega, A)).$$

В частности, для $\omega(t) = t$ получаем точное соотношение типа теоремы Джексона

$$E(x, A) \leq \frac{1}{2}(\overline{\omega}_x)(2E(H^1, A)).$$

Аналогичным образом соотношение (Д.7.2) превращается в неравенство для наилучших приближений классов H^ω:

$$\omega_1^{-1}\left(2E(H^{\omega_1}, A)\right) \leq \omega_2^{-1}\left(2E(H^{\omega_2}, A)\right).$$

Аналогичные соотношения справедливы и для линейных аппроксимаций. В доказательствах утверждений (Д.7.1) и (Д.7.2) используются идеи работ Н.П. Корнейчука [205] о промежуточном приближении и Ж. Петре [278] о K-функционале; эти же идеи используются и при изучении неравенств типа Колмогорова (см. § 7.4).

3. В работе [185] (см. также [186]) содержится интересный пример применения одного неравенства типа Колмогорова к задачам исследования свойств равномерно ограниченных ортонормированных систем функций.

Для функций $x \in L^1_{1,\infty}(\mathbf{R})$ положим

$$N(x, W_2^{1/2}) := \left(\int\limits_0^\infty \frac{\|\Delta_h x\|^2_{L_2(\mathbf{R})}}{h^2} dh \right)^{1/2}.$$

Функционал $N(x, W_2^{1/2})$ с точностью до константы совпадает с нормой $\left\| x^{(1/2)} \right\|_{L_2(\mathbf{R})}$ дробной производной функции $x(t)$ порядка $1/2$.

В [185] доказано, что выполняется неравенство

$$N(x, W_2^{1/2}) \le C \|x\|^{1/2}_{L_1(\mathbf{R})} \|x'\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbf{R})}, \qquad (\text{Д}.7.4)$$

где

$$\|x'\|_{L_\infty(\mathbf{R})} := \sup\{h^{-1}|\Delta_h x(t)| : t \in \mathbf{R},\ h > 0\};$$

C – некоторая абсолютная постоянная.

Выбирая в качестве $x(t)$ специальным образом подобранную кусочно-линейную функцию, из (Д.7.4) выводим его дискретный аналог:

для любого набора чисел $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, $N \in \mathbf{N}$, справедливо неравенство

$$\left(\max_{1 \le n \le N} |a_n| \right) \sum_{m=1}^N \left| \sum_{n=1}^m a_n \right| \ge C \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{\mu=1}^N \frac{\left(\sum\limits_{n=r+1}^{\mu} a_n \right)^2}{(\mu - r)^2}, \qquad (\text{Д}.7.5)$$

где $c > 0$ – абсолютная константа.

Именно такие числовые неравенства типа (Д.7.5) оказались очень полезными при оценках снизу функций Лебега ортонормированных систем (см. [185, 186]).

4. Обозначим $M(\mathbf{R})$ – банахово пространство ограниченных борелевских мер на $\mathbf{R}$, а $AC(\mathbf{R})$ – подпространство $M(\mathbf{R})$, состоящее из всех мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега. Преобразование Фурье–Стилтьеса меры $\mu \in M(\mathbf{R})$ определяется соотношением

$$\hat{\mu}(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-itu} d\mu(u), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Свертка элементов $M(\mathbf{R})$ определяется обычным образом, так что она соответствует поточечному произведению преобразований Фурье–Стилтьеса.

Пусть μ_1 и μ_2 – заданные элементы из $M(\mathbf{R})$, а μ_0 – третий элемент, такой, что существуют $\nu_1, \nu_2 \in M(\mathbf{R})$ со свойством

$$\mu_0 = \mu_1 * \nu_1 + \mu_2 * \nu_2. \tag{Д.7.6}$$

Предположим, что найдутся вещественное число a и меры σ_0 и $\sigma_2 \in AC(\mathbf{R})$, такие, что для $|t| > a$ выполняются соотношения

$$\hat{\mu}_1(t) \neq 0, \tag{Д.7.7}$$

$$\hat{\mu}_2(t) = \hat{\mu}_1(t)\hat{\sigma}_2(t), \tag{Д.7.8}$$

$$\hat{\mu}_0(t) = \hat{\mu}_1(t)\hat{\sigma}_0(t). \tag{Д.7.9}$$

Обозначим H – множество всех пар (ν_1, ν_2) ограниченных борелевских мер, которые удовлетворяют условиям (Д.7.6)–(Д.7.9), а L – множество всех пар (ν_1, ν_2) ограниченных борелевских мер, таких, что

$$\mu_1 * \nu_1 + \mu_2 * \nu_2 = 0.$$

Наконец, сформируем класс K всех пар (ψ_1, ψ_2) функций из $L_\infty(\mathbf{R})$, таких, что при обычном определении свертки элементов из $L_\infty(\mathbf{R})$ и $AC(\mathbf{R})$ имеем

$$\psi_1 * \nu_1 + \psi_2 * \nu_2 = 0$$

для любых элементов $\nu_1, \nu_2 \in AC(\mathbf{R})$, таких, что $(\nu_1, \nu_2) \in L$. Имеет место такая теорема.

Теорема 1 [168]. *Справедливы следующие предположения:*

1) *если* $(\nu_1, \nu_2) \in H$, *то* $\nu_1 \in AC(\mathbf{R})$;

2) *если* $(\psi_1, \psi_2) \in K$, *то* ψ_2 *можно изменить на множестве лебеговой меры нуль так, что она станет непрерывной;*

3) *при этом предположении относительно* ψ_2 *для любых* $(\psi_1, \psi_2) \in K$ *и* $(\nu_1, \nu_2) \in H$ *определим функционал*

$$F(\psi_1, \psi_2) = F(\psi_1, \psi_2; \nu_1, \nu_2) = \int\limits_{\mathbf{R}} \psi_1(-t)\nu_1'(t)dt + \int\limits_{\mathbf{R}} \psi_2(-t)d\nu_2(t), \tag{Д.7.10}$$

значения которого не зависят от выбора (ν_1, ν_2);

4) *пусть* (A, B) *– фиксированная пара положительных чисел и пусть также* $K(A, B)$ *– множество таких пар* $(\psi_1, \psi_2) \in K$, *что* $\|\psi_1\|_\infty \le A$, $\|\psi_2\|_\infty \le B$. *Тогда существует пара* $(\Psi_1, \Psi_2) \in K$, *такая, что*

$$\forall (\psi_1, \psi_2) \in K(A, B) \quad |F(\psi_1, \psi_2)| \le F(\Psi_1, \Psi_2);$$

5) *существует пара* $(\nu_1, \nu_2) \in H$, *такая, что*

$$F(\Psi_1, \Psi_2) = A \int\limits_{\mathbf{R}} |\nu_1'(t)|dt + B \int\limits_{\mathbf{R}} |d\nu_2(t)|. \tag{Д.7.11}$$

Обсудим один важнейший пример.

Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. Нетрудно проверить, что все наши предположения будут выполнены, если выберем μ_1, μ_2 и μ_0 так, чтобы

$$\hat{\mu}_1(t) = e^{-t^2}(it)^r, \quad \hat{\mu}_2(t) = e^{-t^2}, \quad \hat{\mu}_0(t) = e^{-t^2}(it)^k.$$

Используя определение K, находим, что K состоит из всех пар ограниченных функций вида $\psi^{(r)}$, ψ, где ψ локально абсолютно непрерывна вместе со всеми производными до порядка $r - 1$.

Определим непрерывную функцию $\psi_0 = \psi^{(r)} * \nu_1 + \psi * \nu_2$, где $(\nu_1, \nu_2) \in H$. Сворачивая ее с произвольной мерой μ, имеющей компактный носитель и “высокие” дифференциальные свойства, нетрудно видеть, что $\psi_0 * \mu = \psi * \mu^{(k)}$, где $\mu^{(k)}$ – k-я производная меры μ в

смысле обобщенных функций. Следовательно, $\psi_0 = \psi^{(k)}$. Подставляя $t = 0$ в $\psi^{(k)}(t)$, получаем $\psi^{(k)}(0) = F(\psi^{(r)}, \psi; \nu_1, \nu_2)$. Значит, теорема 1 показывает, что для любой пары (A, B) положительных чисел существует представление

$$\psi^{(k)}(0) = \int\limits_{\mathbf{R}} \psi^{(r)}(-t)\nu_1'(t)dt + \int\limits_{\mathbf{R}} \psi_2(-t)d\nu_2(t),$$

такое, что равенство в итоговом неравенстве

$$|\psi^{(k)}(0)| \le A \int\limits_{\mathbf{R}} |\nu_1'(t)|dt + \int\limits_{\mathbf{R}} \psi_2(-t)|d\nu_2(t)|, \qquad (\text{Д}.7.12)$$

где $\|\psi^{(r)}\|_\infty \le A$, $\|\psi_2\|_\infty \le B$, достижимо.

Из результата Колмогорова (см. теорему 2.3.1) следует, что экстремальная функция в неравенстве (Д.7.12) имеет вид $\psi(t) = a\varphi_{\lambda,r}(t + c)$ при подходящих a, λ и любом c. С учетом этого теорему 1 в рассматриваемом случае можно конкретизировать следующим образом (см. [168, теорема 2; 126, теорема A]).

Теорема 2. *Для любой пары чисел $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, найдутся две меры $\mu_{r,k}$ и $\nu_{r,k}$, из которых $\mu_{r,k}$ абсолютно непрерывна, а $\nu_{r,k}$ сосредоточена в точках $\pi j + \pi k/2$, $j \in \mathbf{Z}$, такие, что для любой функции $x \in W^r_\infty(\mathbf{R})$ выполняется равенство*

$$x^{(k)}(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} x^{(r)}(t + \tau)\mu_{r,k}'(\tau)d\tau + \int\limits_{\mathbf{R}} x(t + \tau)d\nu_{r,k}(\tau), \qquad (\text{Д}.7.13)$$

причем для функций $x_{r,k}(t) = \varphi_r(t - (k - 1)\pi/2)$ равенство (Д.7.13) *при $t = 0$ имеет вид*

$$x^{(k)}(0) = \int\limits_{\mathbf{R}} |\mu_{r,k}'(\tau)|d\tau + \|\varphi_r\|_\infty \int\limits_{\mathbf{R}} |d\nu_{r,k}|.$$

Напомним, что

$$E_{r,k}(N) := \inf_{s \in \mathcal{L}_N} \sup_{x \in W^r_\infty(\mathbf{R})} \|D^k x - Sx\|_\infty. \qquad (\text{Д}.7.14)$$

Экстремальный оператор в задаче (Д.7.14), если он существует, обозначим $S_{r,k}(x;N)$. Положим

$$N_{r,k} = \frac{(r-k)\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{r\|\varphi_r\|_\infty}.$$

В.В. Арестов [6] доказал, что

$$S_{r,k}(x;N_{r,k})(t) = x * d\nu_{r,k} = \int\limits_{\mathbf{R}} x(t+\tau)d\nu_{r,k} \qquad (\text{Д}.7.15)$$

и

$$E_{r,k}(N_{r,k}) = k\|\varphi_{r-k}\|_\infty/r. \qquad (\text{Д}.7.16)$$

Там же им доказано, что при $0 < l < k < r$

$$S_{r,k}(x;N_{r,k}) = S_{r-k+l,l}(S_{r,k-l}(x;N_{r,k-l});N_{r-k+l,l}). \qquad (\text{Д}.7.17)$$

В работе [263] Мичелли рассмотрел задачу о дифференцировании функций, заданных с ошибкой на классах, задаваемых с помощью дифференциальных операторов вида

$$\mathcal{L} = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt} - t_j\right)\left(\frac{d}{dt} + t_j\right), \quad t_j \geq 0.$$

Использовав теорию обобщенных сплайнов на $\mathbf{R}$, имеющих нули в заданных точках, в [263] было установлено следующее представление:

$$x'(0) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} c_j^{(2m)} x(\pi) + \pi/2 - \int\limits_{\mathbf{R}} H(t)(\mathcal{L}_k)(t)dt, \quad x \in W_\infty^{2m}(\mathbf{R}), \qquad (\text{Д}.7.18)$$

где

$$c_{-j}^{(2m)} = c_{j-1}^{(2m)}, \quad \mathrm{sgn} c_j^{(2m)} = (-1)^j,$$

$$\mathrm{sgn} H(t) = (-1)^{j+m}, \quad t \in (\pi j, \pi(j+1)).$$

Это представление является обобщением представления (Д.7.13) при $r = 2m$.

В работе [4] Арестов привел явные формулы для мер $\mu_{4,1}$ и $\nu_{4,1}$, $\mu_{5,1}$ и $\nu_{5,1}$ в случае $\mathcal{L} = (d/dt)^4$, $\mathcal{L} = (d/dt)^5$, и тем самым для оператора $S_{r,1}$ (при $r = 4, 5$). Эти формулы для $S_{r,1}$ имеют вид

$$S_{r,1}(x, N_{r,1})(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(r)}(x((2j-1)\pi/2 + t) - x(t - (2j-1)\pi/2)), \tag{Д.7.19}$$

где $c_j^{(r)}$, $j > 1$, есть геометрическая прогрессия со знаменателем ξ_r, $-1 < \xi_r < 0$, $r = 4, 5$. В случае $r = 2m$ Мичелли [263] показал, что $c_j^{(2m)}$ оказывается суммой $(m-1)$ геометрических прогрессий, знаменатели которых являются собственными числами некоторой матрицы.

А.П. Буслаевым [126] для $\mathcal{L} = (d/dt)^r$ даны явные формулы для $c_j^{(r)}$ и установлена представимость $c_j^{(r)}$ суммой $([r/2] - 1)$ геометрических прогрессий.

Явные формулы для $c_j^{(r)}$ имеют следующий вид.

Если $r = 2m$, то $S_{r,1}(x, N_{r,1})$ имеет вид (Д.7.19), где

$$c_j^{(r)} = (1-r)4^{-1} \int_{-2}^{2} \left\{ \frac{(d/dt)^{r-2}\mathrm{ctg}(\pi t/2)}{(d/dt)^{r-1}(\sin \pi t/2)^{-1}} \right\} \sin \pi t(j - 2^{-1})dt. \tag{Д.7.20}$$

Если же $r = 2m+1$, $m \in \mathbf{N}$, то $S_{r,1}(x, N_{r,1})$ имеет вид (Д.7.19), где

$$c_j^{(r)} = (1-r)4^{-1} \int_{-2}^{2} \left\{ \frac{(d/dt)^{r-2}(\sin \pi t/2)^{-1}}{(d/dt)^{r-1}\mathrm{ctg}(\pi t/2)} \right\} \sin \pi t(j - 2^{-1})dt. \tag{Д.7.21}$$

Формулы, подобные (Д.7.20) и (Д.7.21), приведены в работе [201].

Утверждение о представимости c_j^r суммой $([r/2] - 1)$ геометрических прогрессий содержится в следующей теореме [126, теорема 1].

Теорема 3. *Пусть* $r, m \in \mathbf{N}$, $r > 2$. *Тогда:*

а) рациональная функция

$$S_{2m-1}(z) = \left(z\frac{d}{dz}\right)^{2m-1}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)$$

имеет в интервале $(0,1)$ $m-1$ *различных простых нулей* $\{s_j\}_{j=1}^{m-1}$ *и однократный нуль в точке* $s=0$;

б) рациональная функция

$$R_{2m}(z) = \left(z\frac{d}{dz}\right)^{2m}\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)$$

имеет в интервале $(0,1)$ $m-1$ *различных простых нулей* $\{r_j\}_{j=1}^{m-1}$ *и нуль при* $s=0$ *кратности* 2;

в) если $r = 2m$, *то*

$$c_\nu^{(r)} = (-1)^{\nu-1}\frac{4(r-1)}{\pi}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{R_{r-2}(s_j)s_j^{2\nu-2}}{S'_{r-1}(s_j)}, \quad \nu \geq 1;$$

г) если $r = 2m+1$, *то*

$$c_\nu^{(r)} = \frac{4(r-1)}{\pi}\left\{\frac{S_{r-2}(z)z^{2\nu-2}}{R'_{r-1}(z)}\right\}_{z=0} + (-1)^{\nu-1}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{S_{r-2}(r_j)r_j^{2\nu-2}}{R'_{r-1}(r_j)},$$

$$\nu \geq 1;$$

д)

$$\mu'_{r,1}(-t) = t_+^{r-2}/(r-2)! -$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(r)}\left((t+\pi(2j-1)/2)_+^{r-1} - (t-\pi(2j-1)/2)_+^{r-1}\right).$$

5. Рассмотрим соболевский класс $\mathcal{W}_{p,s}^\gamma$, соответствующий соболевскому пространству $\mathcal{L}_{p,s}^\gamma$ (см. дополнительные результаты к гл. 6, п. 3). Его можно определить равенством

$$\mathcal{W}_{p,s}^\gamma := \mathcal{W}_{p,s}^\gamma(\mathbf{T}^m) := \left\{y \in \mathcal{L}_{p,s}^\gamma : y = I_\gamma x + h;\ \|x\|_p \leq 1\right\}$$

или равенством

$$\mathcal{W}_{p,s}^{\gamma} := \left\{ y \in \mathcal{L}_{p,s}^{\gamma} : \left\| \mathcal{D}^{\gamma} y \right\|_p \leq 1 \right\}.$$

Для $N = (N_1, \ldots, N_m) \in \mathbf{R}^m$ и $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbf{N}^m$ обозначим $\sum\limits_{j=1}^{m} N_j \mathcal{W}_{1,1}^{r_j e_j}$ – множество функций ψ вида $\psi = \sum\limits_{j=1}^{m} N_j \psi_j$, где $\psi_j \in \mathcal{W}_{1,1}^{r_j e_j}$.

В качестве приложения неравенства для первообразных (см. (Д.6.1)) в работе [62] рассмотрена проблема приближения класса $\mathcal{W}_{2,1}^{\gamma}$, где $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $N_j > 0$, $r_j, |\gamma| \in \mathbf{N}$, $r_j > |\gamma|$, $j = 1, \ldots, m$, классом $\sum\limits_{j=1}^{m} N_j W_{1,1}^{r_j e_j}$.

Теорема 4 [62]. *Имеет место соотношение*

$$E\left(W_{2,1}^{\gamma}, \sum_{j=1}^{m} N_j W_{1,1}^{r_j e_j} \right)_1 \leq$$

$$\leq \left(1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j}{r_j} \right) \left(\frac{\left\| \varphi_{|\gamma|} \right\|_{L_2(\mathbf{T}^1)}}{\prod\limits_{j=1}^{m} \left\| \varphi_{r_j} \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^1)}^{\gamma_j / r_j}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\gamma_j}{r_j N_j} \right)^{\frac{\gamma_j}{r_j}} \right)^{\frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j}{r_j}}}.$$

Методом промежуточного приближения с использованием теоремы 4 в работе [62] были найдены точные значения наилучших приближений классов $\mathcal{W}_{2,1}^{\gamma}(\mathbf{T}^m)$ квазиполиномами в L_1-метрике.

Для $p \in [1, \infty]$, $n \in \mathbf{Z}_+^m$ обозначим $Q_{n,p}$ – множество квазиполиномов вида

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=-n_j}^{n_j} f_{k,j}\left(t^j\right) e^{ikt_j},$$

где $f_{k,j}$ – комплекснозначные функции, для которых $\mathrm{Re} f_{k,j}, \mathrm{Im} f_{k,j} \in$ $\in L_p(\mathbf{T}^{m-1})$ и $f_{-k,j} = \overline{f}_{k,j}$ (черта вверху обозначает комплексное сопряжение).

Заметим, что различные проблемы аппроксимации квазиполиномами изучались в работах С.Н. Бернштейна [108], Ю.А. Брудного [122] и других математиков.

Теорема 5 [62]. *Пусть* $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbf{N}^m$ *и* $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbf{N}^m$. *Тогда для любого* $(N_1, \ldots, N_m) \in \mathbf{R}_+^m$

$$E\left(\sum_{j=1}^{m} N_j \mathcal{W}_{1,1}^{r_j e_j}, Q_{n-1,1}\right)_1 = \sum_{j=1}^{m} N_j \frac{\|\varphi_{r_j}\|_{L_\infty(\mathbf{T}^1)}}{n_j^{r_j}},$$

где $n - 1 = (n_1 - 1, \ldots, n_m - 1)$.

Теорема 6 [62]. *Пусть* $m \in \mathbf{N}$, $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbf{N}^m$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbf{R}^m$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, $|\gamma| \in \mathbf{N}$. *Тогда*

$$E(\mathcal{W}_{2,1}^{\gamma}, Q_{n-1,1})_1 = \frac{\|\varphi_{|\gamma|}\|_{L_2(\mathbf{T}^1)}}{n^{\gamma}},$$

где $n^{\gamma} = n_1^{\gamma_1}, \ldots, n_m^{\gamma_m}$.

В случае $m = 1$ квазиполиномы превращаются в тригонометрические полиномы и теорема 5 дает результат С.М. Никольского [269], а теорема 6 – результат Л.В. Тайкова (для $p = 2$) [308].

6. Приведем аналог теоремы эквивалентности для неравенств типа Колмогорова, заданных в виде неравенств для сублинейных (т. е. выпуклых и однородных) функций. Пусть, как в § 7.4, X – вещественное линейное пространство, θ_X – нулевой элемент в X, $\|\cdot\|$ – норма в X, X^* – сопряженное пространство для X, $\langle x, y\rangle$ – значение функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, $p, p_1, \ldots, p_m$ – сублинейные функции, заданные на X. Пусть

$$\partial p := \{y \in X^* : \forall x \in X \ \ \langle x, y\rangle \le p(x)\}$$

есть субдифференциал p;

$$p^*(y) := \sup\{\langle x, y\rangle : p(x) \le 1\};$$

$$E\,(x, M_1)_{X,p} := \inf\{p\,(x - u) : u \in M_1\},$$

$$E\,(M, M_1)_{X,p} := \sup\{E\,(x, M_1)_{X,p} : x \in M\},$$

$$\psi\,(M) := \sup\{\psi\,(x) : x \in M\}.$$

Для заданной вогнутой функции $\Phi : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}_+$ положим

$$\overline{\Phi}(t) := \inf_{N \in \mathbf{R}_+^m} \left\{ \Phi(N) + \sum_{j=1}^m N_j t_j \right\}, \quad t = (t_1, \ldots, t_m).$$

Пусть, наконец,

$$K\left(X^*; p_1, \ldots, p_m; y; t\right) :=$$

$$:= \inf_{\substack{y_j \in \operatorname{cone} \partial p_j, \\ j=1,\ldots,m}} \left\{ \left\| y - \sum_{j=1}^m y_j \right\| + \sum_{j=1}^m t_j p_j^* \left(y_j\right) \right\}.$$

Теорема 7 [43]. *Если выпуклые однородные функции $p, p_1, \ldots, p_m$ замкнуты, то эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\forall N \in \mathbf{R}_+^m \;\; E\left(\partial p; \sum\limits_{j=1}^m N_j \partial p_j\right)_{X^*} \leq \Phi\left(N\right);$

2) $\forall N \in \mathbf{R}_+^m \; \forall x \in X \;\; p(x)\left(x\right) \leq \Phi\left(N\right) \|x\| + \sum\limits_{j=1}^m N_j p_j\left(x\right);$

3) $\forall x \in X \quad (x \neq 0) \;\; p\left(x\right) \leq \|x\| \, \overline{\Phi}\left(\dfrac{p_1(x)}{\|x\|}, \ldots, \dfrac{p_m(x)}{\|x\|}\right);$

4) *если полунорма ψ на X^* такова, что значения $\psi\left(\partial p\right)$, $\psi\left(\partial p_j\right)$, $j = 1, \ldots, m$, конечны, то*

$$\psi\left(\partial p\right) \leq \Phi\left(N\right) \psi\left(B_X\right) + \sum_{j=1}^m N_j \psi\left(\partial p_j\right);$$

5) *если ψ из* 4) *такова, что $\psi\left(B_X\right) \neq 0$, то*

$$\psi\left(\partial p\right) \leq \psi\left(B_X\right) \overline{\Phi}\left(\frac{\psi\left(\partial p_1\right)}{\psi\left(B_X\right)}, \ldots, \frac{\psi\left(\partial p_m\right)}{\psi\left(B_X\right)}\right);$$

6) $\forall y \in \partial p$ *и* $\forall t \in \mathbf{R}_+^m \;\; K\left(X^*; p_1, \ldots, p_m; y; t\right) \leq \overline{\Phi}(t).$

7. Будем использовать обозначения из п. Д.2.12. Нам понадобятся также следующие обозначения. Пусть $\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}(b) := \|\tilde{\varphi}_{b,\mathcal{P}}(b^{-1}(\cdot))\|_1$.

Функция $\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}(b)$ непрерывна и с ростом b строго убывает от $+\infty$ до 0. Поэтому в $(0,\infty)$ определена обратная к $\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}(b)$ функция – $\tilde{\Psi}_{\mathcal{P}}(y)$, также строго убывающая с ростом y. Положим $\tilde{\Theta}_{\mathcal{P},Q}(t) = (\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}/Q} \circ \tilde{\Psi}_{\mathcal{P}})(t)$.

Рассмотрим задачу наилучшего приближения классов $\tilde{W}_{\infty}^{Q}$ классами $NW_1^{\mathcal{P}}$ в пространстве L_1.

Теорема 8. *Пусть*

$$\mathcal{P}(t) = t^l \prod_{p=1}^{(r-l)/2} (t^2 - a_p^2), \quad \mathcal{Q}(t) = t^m \prod_{p=1}^{(r-m)/2} (t^2 - a_p^2), \quad N > 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$E(\tilde{W}_{\infty}^{\mathcal{Q}}, NW_1^{\mathcal{P}})_1 \le \sup_{\lambda}\{\tilde{\Theta}_{\mathcal{P},\mathcal{P}/\mathcal{Q};1}(\lambda) - N\lambda\}.$$

Пусть теперь ψ – произвольная, вообще говоря, несимметричная, полунорма на пространстве L_1, и $\psi(M) = \sup\limits_{f\in M} \psi(f)$.

Теорема 9 [50]**.** *В условиях теоремы* 8

$$\psi(\tilde{W}_{\infty}^{\mathcal{Q}}) \le \psi(W_1^0)\tilde{\Theta}_{\mathcal{P},\mathcal{P}/\mathcal{Q};1}\left(\frac{\psi(W_1^{\mathcal{P}})}{\psi(W_1^0)}\right),$$

где $W_1^0 = \{f \in L_1 : \|f\|_1 \le 1\}$.

Полагая $\psi(f) = E(f, H_n)_1$, где H_n – некоторое n-мерное подпространство пространства L_1, устанавливаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 10 [50]. *В условиях теоремы* 8 *для любого* n*-мерного подпространства* H_n *пространства* L_1 *имеем*

$$E(\tilde{W}_{\infty}^{\mathcal{Q}}, H_n)_1 \le \tilde{\Theta}_{\mathcal{P},\mathcal{P}/\mathcal{Q};1}\left(E(\tilde{W}_1^{\mathcal{P}}, H_n)_1\right).$$

Следствие. *Для* $k < r$

$$d_n(\tilde{W}_{\infty}^{\mathcal{Q}}, L_1)_1 \le \tilde{\Theta}_{\mathcal{P},\mathcal{P}/\mathcal{Q};1}\left(d_n(\tilde{W}_1^{\mathcal{P}}, L_1)_1\right).$$

Глава

8

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ И СПЛАЙНОВ

8.1. Неравенства типа Бернштейна для полиномов

Покажем, как при помощи неравенств типа Колмогорова можно получать точные неравенства типа Бернштейна для тригонометрических полиномов. Для начала докажем неравенство Бернштейна, основываясь на идее сравнения производных, близкой к теореме сравнения Колмогорова.

Напомним, что символом $\mathcal{T}_n$ обозначается пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n ($n \in \mathbf{N}$).

Теорема 8.1.1. *Пусть $k, n \in \mathbf{N}$. Для любого тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ справедливо неравенство*

$$\left\| T_n^{(k)} \right\|_\infty \le n^k \left\| T_n \right\|_\infty. \tag{8.1.1}$$

Неравенство (8.1.1) *точное и обращается в равенство для полиномов вида $T_n(t) = a\cos(nt + b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Достаточно доказать (8.1.1) для $k = 1$. Фиксируем произвольный полином $T_n \in \mathcal{T}_n$, не равный тождественно нулю, и выберем точку t_0 так, чтобы $|T_n'(t_0)| = \left\| T_n' \right\|_\infty$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ построим полином

$$S_n(t) := (\left\| T_n \right\|_\infty + \varepsilon)\sin(nt + \alpha),$$

где α выбрано так, чтобы выполнялись условия

$$T_n(t_0) = S_n(t_0), \qquad \mathrm{sgn} T_n'(t_0) = \mathrm{sgn} S_n'(t_0).$$

Покажем, что тогда

$$|T_n'(t_0)| \le |S_n'(t_0)|. \tag{8.1.2}$$

Предположим противное, и пусть a – первая слева от t_0 точка локального экстремума $S_n(t)$. Тогда на каждом из $2n$ промежутков монотонности $S_n(t)$, лежащих в $(a, a+2\pi)$, разность $r_n(t) :=$ $:= S_n(t) - T_n(t)$ имеет по крайней мере по одному нулю, причем на том из промежутков, который содержит точку t_0, ввиду нашего предположения будет не менее трех нулей. Таким образом, разность $r_n(t)$ имеет на периоде не менее $2n+2$ нулей, что невозможно, так как $r_n \in \mathcal{T}_n$. Тем самым (8.1.2) доказано. Из (8.1.2) получаем

$$\left\|T_n'\right\|_\infty = |T_n'(t_0)| \le n\left(\|T_n\|_\infty + \varepsilon\right).$$

Отсюда из произвольности ε следует (8.1.1) для $k = 1$. Теорема доказана.

Получим теперь из неравенства Лигуна (6.2.1) соответствующее неравенство типа Бернштейна.

Теорема 8.1.2. *Пусть $k, n \in \mathbf{N}$; $q \in [1, \infty)$. Для любого тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ выполнено неравенство*

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_q \le n^k \left\|\cos(\cdot)\right\|_q \|T_n\|_\infty. \tag{8.1.3}$$

Неравенство (8.1.3) *точное и обращается в равенство для полиномов вида $T_n(t) = a\cos(nt+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Фиксируем произвольный полином $T_n \in \mathcal{T}_n$ и выберем любое $r \in \mathbf{N}$, $r > k$. Применяя к T_n неравенство (6.2.1), получаем

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|T_n\|_\infty^{1-k/r} \left\|T_n^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}.$$

Оценивая $\left\|T_n^{(r)}\right\|_\infty$ при помощи неравенства Бернштейна (8.1.1), имеем

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|T_n\|_\infty^{1-k/r} \left(n^r \|T_n\|_\infty\right)^{k/r} =$$

$$= n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|T_n\|_\infty . \tag{8.1.4}$$

Перейдя в (8.1.4) к пределу при $r \to \infty$ с учетом того, что при этом

$$\|\varphi_r\|_p \to \frac{4}{\pi} \|\cos(\cdot)\|_p \tag{8.1.5}$$

для любого $p \in [1, \infty]$, получим (8.1.3). Точность (8.1.3) очевидна. Теорема доказана.

Получим теперь точное неравенство типа Бернштейна из неравенства Лигуна (6.3.1), учитывающего число перемен знака производных.

Теорема 8.1.3. *Пусть* $k, n \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty)$. *Для любого тригонометрического полинома* $T_n \in \mathcal{T}_n$ *выполнено неравенство*

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_1 \le \frac{4n^k}{\|\cos(\cdot)\|_p} \|T_n\|_p . \tag{8.1.6}$$

Неравенство (8.1.6) *точное и обращается в равенство для полиномов вида* $T_n(t) = a\cos(nt + b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Фиксируем произвольный полином $T_n \in \mathcal{T}_n$, выберем любое $r \in \mathbf{N}$, $r > k$, и применим к T_n неравенство (6.3.1). Имеем

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_1 \le \left(\frac{\nu(T_n')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|g_{r-k}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha} \|T_n\|_p^\alpha \left\|T_n^{(r)}\right\|_1^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r-k}{r-1+1/p}$. Оценивая $\left\|T_n^{(r)}\right\|_1$ при помощи неравенства (8.1.3) (с $q = 1$) и учитывая, что $\nu(T_n') \le 2n$, получаем

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_1 \le n^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|g_{r-k}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha} \|T_n\|_p^\alpha \left(4n^r \|T_n\|_\infty\right)^{1-\alpha} =$$

$$= n^{(1-1/p)\alpha+r(1-\alpha)} \frac{\|g_{r-k}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha} \|T_n\|_p^\alpha \|T_n\|_\infty^{1-\alpha}. \tag{8.1.7}$$

Перейдем в (8.1.7) к пределу при $r \to \infty$. Учитывая, что $g_r := 4^{-1}\varphi_{r-1}$ и для φ_r справедливо (8.1.5), а также то, что $\alpha \to 1$ и

$$(1-1/p)\alpha + r(1-\alpha) =$$

$$= (1-1/p)\frac{r-k}{r-1+1/p} + r\frac{k-1+1/p}{r-1+1/p} \to$$

$$\to (1-1/p) + k - 1 + 1/p = k$$

при $r \to \infty$, из (8.1.7) получаем (8.1.6). Точность (8.1.6) очевидна. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь применения неравенств типа Колмогорова, для которых соответствующая точка $(k, 1/q)$ (см. § 4.1) лежит в габушинской области Γ, для получения неравенств типа Бернштейна, на примере неравенства (6.4.1).

Теорема 8.1.4. *Для всех* $n, k \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty)$ *и произвольного полинома* $T_n \in \mathcal{T}_n$

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{n^{k+\frac{1}{p}}}{\|\cos(\cdot)\|_p} \|T_n\|_p. \tag{8.1.8}$$

Неравенство (8.1.8) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{T_n\in\mathcal{T}_n \\ T_n\neq 0}} \frac{\left\|T_n^{(k)}\right\|_\infty}{n^{k+\frac{1}{p}} \|T_n\|_p} = \frac{1}{\|\cos(\cdot)\|_p}.$$

Доказательство. Фиксируем любое $r \in \mathbf{N}$, $r > k$. Применяя неравенство (6.4.1), имеем

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|T_n\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left\|T_n^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}.$$

Оценивая $\left\|T_n^{(r)}\right\|_\infty$ при помощи неравенства Бернштейна (8.1.1), получаем

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|T_n\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left(n^r \|T_n\|_\infty\right)^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}. \tag{8.1.9}$$

Переходя в (8.1.9) к пределу при $r \to \infty$ и используя соотношение (8.1.5), получаем (8.1.8).

Ясно, что неравенство (8.1.8) обращается в равенство для полинома $T(t) = \cos t$. Отсюда следует второе утверждение теоремы. Теорема доказана.

Неравенство Бернштейна (8.1.1) в сочетании с методом Стейна (см. § 2.6) позволяет легко установить следующее обобщение неравенства Бернштейна, принадлежащее Зигмунду [171, т. 2, с. 21].

Теорема 8.1.5. *Пусть* $k, n \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty)$. *Для любого тригонометрического полинома* $T_n \in \mathcal{T}_n$ *справедливо неравенство*

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_p \le n^k \|T\|_p. \tag{8.1.10}$$

Неравенство (8.1.10) *точное и обращается в равенство для полиномов вида* $T_n(t) = a\cos(nt + b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Фиксируем $T_n \in \mathcal{T}_n$ и рассмотрим функцию

$$\tau_n(t) := \int_0^{2\pi} T_n(t+u) \left|T_n^{(k)}(u)\right|^{p-1} \operatorname{sgn} T_n^{(k)}(u) du. \tag{8.1.11}$$

Ясно, что $\tau_n \in \mathcal{T}_n$. Поэтому согласно неравенству (8.1.1) имеем

$$\left\|\tau_n^{(k)}\right\|_\infty \le n^k \|\tau_n\|_\infty. \tag{8.1.12}$$

Заметим, что

$$\tau_n^{(k)}(t) = \int_0^{2\pi} T_n^{(k)}(t+u) \left|T_n^{(k)}(u)\right|^{p-1} \operatorname{sgn} T_n^{(k)}(u) du,$$

и, следовательно,

$$\tau_n^{(k)}(0) \le \left\|\tau_n^{(k)}\right\|_\infty = \left\|T_n^{(k)}\right\|_p^p. \tag{8.1.13}$$

Из (8.1.11) с помощью неравенства Гельдера имеем

$$\|\tau_n\|_\infty \le \left\{\int\limits_0^{2\pi} |T_n(t+u)|^p\,du\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int\limits_0^{2\pi} \left|T_n^{(k)}(u)\right|^p du\right\}^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$= \|T_n\|_p \left\|T_n^{(k)}\right\|_p^{p-1}. \tag{8.1.14}$$

Теперь из (8.1.12)–(8.1.14) получаем

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_p^p \le n^k \|T_n\|_p \left\|T_n^{(k)}\right\|_p^{p-1},$$

откуда и следует (8.1.11).

Точность (8.1.11) очевидна. Теорема доказана.

8.2. Неравенства типа Бернштейна для сплайнов

В настоящем параграфе при помощи неравенств типа Колмогорова будут получены неравенства типа Бернштейна для полиномиальных сплайнов, которые являются аналогами соответствующих неравенств из предыдущего параграфа.

Напомним, что символом $S_{n,r}$ обозначается пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r ($r \in \mathbf{N}$) минимального дефекта с узлами в точках $\nu\pi/n$, $\nu \in \mathbf{Z}$, а $E_0(x)_p$ и $c_p(x)$ обозначают соответственно наилучшее приближение и константу наилучшего приближения функции x в L_p-метрике.

Лемма 8.2.1. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$

$$\|s^{(r)}\|_\infty \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty} E_0(s)_\infty. \tag{8.2.1}$$

Доказательство. Учитывая равенство $n^{-r}\|\varphi_r\|_\infty = \|\varphi_{n,r}\|_\infty$, перепишем неравенство (8.2.1) в виде

$$\frac{\|s^{(r)}\|_\infty}{E_0(s)_\infty}\|\varphi_{n,r}\|_\infty \le 1.$$

Предположим, что доказываемое неравенство неверно для некоторого сплайна $s \in S_{n,r}$. Тогда существует $\gamma \in (0,1)$, такое, что

$$\gamma\frac{\|s^{(r)}\|_\infty}{E_0(s)_\infty}\|\varphi_{n,r}\|_\infty = 1. \tag{8.2.2}$$

Рассмотрим сплайн

$$s_\gamma(t) := \gamma\frac{s(t) - c_\infty(s)}{E_0(s)_\infty}\|\varphi_{n,r}\|_\infty.$$

Ясно, что $s_\gamma \in S_{n,r}$. Так как $\|s_\gamma\|_\infty < \|\varphi_{n,r}\|_\infty$, то каждая из разностей

$$\delta_\pm(t) := \pm\varphi_{n,r}(t) - s_\gamma(t)$$

имеет не менее $2n$ перемен знака на периоде. Следовательно, по теореме Ролля каждая из разностей

$$\delta_\pm^{(r)}(t) = \pm\varphi_{n,r}^{(r)}(t) - s_\gamma^{(r)}(t)$$

также имеет не менее $2n$ перемен знака на периоде.

С другой стороны, согласно (8.2.2)

$$\|s_\gamma^{(r)}\|_\infty = 1 = \|\varphi_{n,r}^{(r)}\|_\infty.$$

Это означает, что существует отрезок $[k\pi/n,\ (k+1)\pi/n]$, $k = 1,\dots,n-1$, на котором одна из разностей $\delta_\pm^{(r)}(t)$ тождественно равна нулю. Так как эта разность постоянна на отрезках $[k\pi/n,\ (k+1)\pi/n]$, то число ее перемен знака на периоде меньше $2n$, что противоречит предыдущему. Лемма доказана.

Теорема 8.2.1. *Пусть* $n, k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $q \in [1, \infty]$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$

$$\|s^{(k)}\|_q \le n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty} \|s\|_\infty. \tag{8.2.3}$$

Неравенство (8.2.3) *точное и обращается в равенство для сплайнов* $s(t) = \varphi_{n,r}(t)$, $a \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Фиксируем $s \in S_{n,r}$. Ясно, что $s \in L^r_\infty$. Поэтому применив неравенство Лигуна (6.2.1) (при $q \in [1, \infty)$) или неравенство Колмогорова (2.3.1) (при $q = \infty$), получим

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|s\|_\infty^{1-k/r} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}.$$

Оценим $\left\|s^{(r)}\right\|_\infty$ через $\|s\|_\infty$ при помощи (8.2.1). Учитывая очевидное неравенство $E_0(s)_\infty \le \|s\|_\infty$, имеем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|s\|_\infty^{1-k/r} \left(\frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty} \|s\|_\infty\right)^{k/r} =$$

$$= n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty} \|s\|_\infty.$$

Неравенство (8.2.3) доказано. Его точность очевидна. Теорема доказана.

Лемма 8.2.2. *При всех* $n, r \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty]$, *для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *выполняется точное на* $S_{n,r}$ *неравенство*

$$\bigvee_0^{2\pi} (s^{(r)}) \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty} \bigvee_0^{2\pi} s. \tag{8.2.4}$$

Доказательство. Фиксируем $s \in S_{n,r}$ и пусть $s^{(r)}$ принимает значения c_i на $(i\pi/n, (i+1)\pi/n)$, $i = 1, \dots, 2n$. Тогда

$$\bigvee_0^{2\pi} (s^{(r)}) \le 2 \sum_{i=1}^{2n} |c_i|, \qquad \left\|s^{(r)}\right\|_1 = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{2n} |c_i|.$$

Поэтому

$$\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \le \frac{2n}{\pi}\left\|s^{(r)}\right\|_1 = \frac{n}{\|\varphi_1\|_\infty}\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r-1)}). \tag{8.2.5}$$

Применяя для оценки правой части (8.2.5) неравенство Стейна в форме (2.6.12), имеем

$$\bigvee_0^{2\pi}\left(s^{(r)}\right) \le \frac{n}{\|\varphi_r\|_\infty}\frac{\|\varphi_1\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1/r}}\left(\bigvee_0^{2\pi}(s)\right)^{1/r}\left(\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)})\right)^{1-1/r}.$$

Отсюда сразу следует (8.2.4). Неравенство (8.2.4) обращается в равенство для сплайнов $s(t) = \varphi_{n,r}(t)$, $a \in \mathbf{R}$. Лемма доказана.

Теорема 8.2.2. *При всех $n, r \in \mathbf{N}$ и $p \in [1,\infty]$ для любого сплайна $s \in S_{n,r}$ выполняются точные на $S_{n,r}$ неравенства*

$$\left\|(s^{(k)})\right\|_1 \le n^k\frac{\|\varphi_{r-k}\|_1}{\|\varphi_r\|_p}\|s\|_p, \quad k = 1,\dots,r, \tag{8.2.6}$$

и

$$\bigvee_0^{2\pi} s^{(k)} \le n^{k+1}\frac{\bigvee_0^{2\pi}(\varphi_{r-k})}{\|\varphi_r\|_p}\|s\|_p, \quad k = 0,1,\dots,r. \tag{8.2.7}$$

Доказательство. Докажем (8.2.7). Неравенство (8.2.6) сразу следует из (8.2.7). Фиксируем $s \in S_{n,r}$ и применим неравенство (6.3.2). Учитывая, что $\nu(s') \le 2n$, имеем

$$\bigvee_0^{2\pi}\left(s^{(k)}\right) \le n^{(1-1/p)\alpha}\frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^\alpha}\left(4\|s\|_p\right)^\alpha\left[\bigvee_0^{2\pi}\left(s^{(r)}\right)\right]^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r-k}{r+1/p}$. Оценивая $\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)})$ через $\bigvee_0^{2\pi}(s^{(k)})$ при помощи (8.2.4), получаем для $k = 0,1,\dots,r-1$

$$\bigvee_0^{2\pi}\left(s^{(k)}\right) \le n^{(1-1/p)\alpha}\frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^\alpha}\left(4\|s\|_p\right)^\alpha\left[\frac{n^{r-k}}{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}\bigvee_0^{2\pi}(s^{(k)})\right]^{1-\alpha}$$

или

$$\bigvee_0^{2\pi}\left(s^{(k)}\right) \le n^{(1-1/p)+(r-k)(1/\alpha-1)}\frac{4\left\|\varphi_{r-k}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_r\right\|_p}\left\|s\right\|_p.$$

Отсюда согласно равенству

$$1-\frac{1}{p}+(r-k)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)=1-\frac{1}{p}+(r-k)\left(\frac{r+1/p}{r-k}-1\right)=$$

$$=1-\frac{1}{p}+r+\frac{1}{p}-r+k=k+1$$

следует (8.2.7) для $k=0,1,\dots,r-1$.

Осталось доказать (8.2.7) при $k=r$. Применяя (8.2.5) и (8.2.7) при $k=r-1$, получаем

$$\bigvee_0^{2\pi}\left(s^{(r)}\right) \le \frac{n}{\|\varphi_1\|_\infty}\bigvee_0^{2\pi}\left(s^{(r-1)}\right) \le$$

$$\le \frac{n}{\|\varphi_1\|_\infty}n^r\frac{\bigvee_0^{2\pi}\varphi_1}{\|\varphi_r\|_p}\left\|s\right\|_p=\frac{4n^{r+1}}{\|\varphi_r\|_p}\left\|s\right\|_p,$$

что эквивалентно (8.2.7) при $r=k$. Неравенства (8.2.6) и (8.2.7) обращаются в равенство для $s(t)=a\varphi_{n,r}(t)$. Теорема доказана.

Теорема 8.2.3. *Пусть* $n,r,k\in\mathbf{N}$, $k<r$, *и* $p\in[1,\infty]$. *Для произвольного сплайна* $s\in S_{n,r}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le n^{k+\frac{1}{p}}\frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_r\right\|_p}\left\|s\right\|_p. \tag{8.2.8}$$

Неравенство (8.2.8) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\sup_{\substack{s\in S_{n,r}\\ s\ne 0}}\frac{\left\|s^{(k)}\right\|_\infty}{n^{k+\frac{1}{p}}\left\|s\right\|_p}=\frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_r\right\|_p}.$$

Доказательство. Оценивая $\left\|s^{(k)}\right\|_\infty$ при помощи неравенства (6.4.1), имеем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|s\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}. \tag{8.2.9}$$

Отметим, что $s^{(k)} \in S_{n,r-k}$. Оценивая теперь $\|s^{(r)}\|_\infty$ при помощи неравенства (8.2.1), находим

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{n^{r-k}}{\|\varphi_{r-k}\|_\infty} \left\|s^{(k)}\right\|_\infty. \tag{8.2.10}$$

Подставляя (8.2.10) в (8.2.9), получаем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} \|s\|_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left(\frac{n^{r-k}}{\|\varphi_{r-k}\|_\infty} \left\|s^k\right\|_\infty\right)^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}.$$

Отсюда следует (8.2.8). Второе утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

8.3. Неравенства типа Бернштейна для опорных функций классов $W^r H^\omega$

Приведем неравенства типа Бернштейна для тригонометрических полиномов и сплайнов, которые выводятся с помощью неравенства (7.7.28).

Теорема 8.3.1. *Пусть $p \in [1, \infty]$, $n, k \in \mathbf{N}$, и если $p > 1$, то $k \ge 2$; ω – выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для полиномов $\tau \in \mathcal{T}_n$ справедливо неулучшаемое неравенство*

$$S_{H^\omega}\left(\tau^{(k)}\right) \le \frac{n^k E_0(\tau)_p}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt. \tag{8.3.1}$$

В частности, при $\omega(t) = t^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1])$, *для* $t \in [0,\pi]$ *имеем*

$$S_{H^{\alpha}}\left(\tau^{(k)}\right) \le \frac{n^{k-\alpha}}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int\limits_0^{\pi} t^{\alpha} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt E_0(\tau)_p. \qquad (8.3.2)$$

Доказательство. Докажем сначала (8.3.1) при $p = 1$, т. е. докажем, что

$$S_{H^{\omega}}\left(\tau^{(k)}\right) \le \frac{n^k}{4} E_0(\tau)_1 \int\limits_0^{\pi} \omega\left(\frac{t}{n}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt. \qquad (8.3.3)$$

Фиксируем $\tau \in \mathcal{T}_n$. Согласно (7.7.28) при $p = 1$

$$S_{H^{\omega}}\left(\tau^{(k)}\right) \le \|\tau^{(r)}\|_1 \, \Phi^1_{r,r-k}\left(\frac{E_0(\tau)_1}{\|\tau^{(r)}\|_1}\right)$$

для любого $r \in \mathbf{N}$, $r \ge k$. Ввиду выпуклости вверх функции $\Phi^1_{r,r-k}(\lambda)$ (лемма 7.7.1) функция $\lambda\Phi(c/\lambda)$ $(c = \mathrm{const})$ не убывает с ростом λ. Оценивая $\|\tau^{(r)}\|_1$ с помощью неравенства (8.1.6) (при $p = 1$), которое можно переписать в виде

$$\left\|\tau^{(r)}\right\|_1 \le n^r E_0(\tau)_1,$$

а затем применяя (7.7.6) и (7.7.4), получаем

$$S_{H^{\omega}}\left(\tau^{(k)}\right) \le n^r E_0(\tau)_1 \, \Phi^1_{r,r-k}\left(\frac{1}{n^r}\right) =$$

$$= n^r E_0(\tau)_1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^r\|\varphi_r\|_{\infty}}\right)^{\frac{r-k}{r}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi} R_{\pi,r-k-1}(\pi - t)\, \omega\left(\frac{t}{n\|\varphi_r\|_{\infty}^{1/r}}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} n^k E_0(\tau)_1 \frac{1}{\|\varphi_r\|_{\infty}^{(r-k)/r}} \int\limits_0^{\pi} R_{\pi,r-k-1}(\pi - t)\, \omega\left(\frac{t}{n\|\varphi_r\|_{\infty}^{1/r}}\right) dt.$$

Устремляя $r \to \infty$ и учитывая, что при этом

$$\|\varphi_r\|_\infty \to \frac{4}{\pi}$$

и

$$R_{\pi,r-k-1}(\pi - t) \to \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

получаем

$$S_{H^\omega}\left(\tau^{(k)}\right) \le \frac{n^k}{4}\int\limits_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dtE_0(\tau)_1.$$

Пусть теперь p — произвольное. Используя (8.3.3), имеем

$$S_{H^\omega}\left(\tau^{(k)}\right) \le \frac{1}{4}n\int\limits_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dtE_0\left(\tau^{(k-1)}\right)_1.$$

Чтобы оценить правую часть, используем следующий вариант неравенства (8.1.6): для любого $\tau \in \mathcal{T}_n$

$$E_0\left(\tau^{(k-1)}\right)_1 \le n^{k-1}\frac{4}{\|\cos(\cdot)\|_p}E_0(\tau)_p.$$

Тогда

$$S_{H^\omega}\left(\tau^{(k)}\right) \le \frac{1}{4}nn^{k-1}\frac{4}{\|\cos(\cdot)\|_p}\int\limits_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dtE_0(\tau)_p =$$

$$= \frac{n^k}{\|\cos(\cdot)\|_p}\int\limits_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dtE_0(\tau)_p.$$

Для доказательства точности оценки (8.3.1) рассмотрим полином $\tau(t) = \sin(nt - k\pi/2)$ и функцию $f_n(\omega, t)$, определенную в (7.7.11). Имеем

$$S_{H^\omega}\left(\tau^{(k)}\right) \ge n^k\int\limits_0^{2\pi} f_n(\omega,t)\sin ntdt = n^k\int\limits_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{n^k E_0(\tau)_p}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int\limits_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt.$$

Теорема доказана.

В случае, когда $\omega(t) = t$ для $t \in [0, \pi]$, имеем

$$E_0\left(\tau^{(k-1)}\right)_1 = \sup_{f \in W_\infty^1} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\tau^{(k)}(t)dt = S_{W_\infty^1}\left(\tau^{(k)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{n^{k-1}}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int\limits_0^\pi t \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt E_0(\tau)_p = \frac{4n^{k-1}}{\|\cos(\cdot)\|_p} E_0(\tau)_p.$$

Таким образом,

$$E_0\left(\tau^{(k-1)}\right)_1 \leq \frac{4n^{k-1}}{\|\cos(\cdot)\|_p} E_0(\tau)_p,$$

и, следовательно, получаем вариант неравенства (8.1.6).

Теорема 8.3.2. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $n, r, k \in \mathbf{N}$, $k \leq r$, *и если* $p > 1$, *то* $k \geq 2$; ω *– выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для сплайнов* $s \in S_{n,r}$ *справедливо неулучшаемое неравенство*

$$S_{H^\omega}\left(s^{(k)}\right) \leq \frac{2n^k E_0(s)_p}{\|\varphi_r\|_p} \int\limits_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi - t)\omega\left(\frac{t}{n}\right) dt. \qquad (8.3.4)$$

В частности, при $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, *для* $t \in [0, \pi]$ *имеем*

$$S_{H^\alpha}\left(s^{(k)}\right) \leq 2n^{k-\alpha} \frac{E_0(s)_p}{\|\varphi_r\|_p} \int\limits_0^\pi t^\alpha R_{\pi,r-k}(\pi - t)dt. \qquad (8.3.5)$$

Доказательство. Докажем сначала (8.3.4) при $p = 1$, т. е. докажем, что

$$S_{H^\omega}\left(s^{(k)}\right) \leq 2n^k \frac{E_0(s)_1}{\|\varphi_r\|_1} \int\limits_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi - t)\omega\left(\frac{t}{n}\right) dt. \qquad (8.3.6)$$

Используя (7.7.18) и следующий вариант неравенства (8.2.7):

$$\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \le 4n^{r+1}\frac{E_0\left(s\right)_1}{\|\varphi_r\|_1},$$

учитывая монотонность функции $t\Phi^1_{r+1,r+1-k}\left(E_0\left(s\right)_1/t\right)$ и применяя (7.7.4), получаем для $s \in S_{n,r}$:

$$S_{H^\omega}\left(s^{(k)}\right) \le \bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)})\ \Phi^1_{r+1,r+1-k}\left(\frac{E_0\left(s\right)_1}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(s^{(r)})}\right) \le$$

$$\le 4n^{r+1}\frac{E_0\left(s\right)_1}{\|\varphi_r\|_1}\Phi^1_{r+1,r+1-k}\left(\frac{E_0\left(s\right)_1}{4n^{r+1}\dfrac{E_0\left(s\right)_1}{\|\varphi_r\|_1}}\right) \le$$

$$\le 4n^{r+1}\frac{E_0\left(s\right)_1}{\|\varphi_r\|_1}\Psi^1_{r+1,r+1-k}\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right) =$$

$$= 2n^{r+1}\frac{E_0\left(s\right)_1}{\|\varphi_r\|_1}\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)^{\frac{r+1-k}{r+1}}\int\limits_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt =$$

$$= 2n^k\frac{E_0\left(s\right)_1}{\|\varphi_r\|_1}\int\limits_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Пусть теперь p – любое. Перепишем (8.3.6) в следующем виде:

$$S_{H^\omega}\left(s^{(k)}\right) \le 2n^{k-1}\frac{E_0\left(s'\right)_1}{\|\varphi_{r-1}\|_1}\int\limits_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt. \quad (8.3.7)$$

Чтобы оценить правую часть неравенства (8.3.7), применим неравенство (8.2.6):

$$\|s'\|_1 \le n\frac{\|\varphi_{r-1}\|_1}{\|\varphi_r\|_p}E_0\left(s\right)_p, \quad s \in S_{2n,r}.$$

Получим

$$S_{H^\omega}\left(s^{(k)}\right) \le 2n^{k-1}\frac{1}{\|\varphi_{r-1}\|_1}n\frac{\|\varphi_{r-1}\|_1}{\|\varphi_r\|_p}E_0\left(s\right)_p \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt =$$

$$= \frac{2n^k E_0\left(s\right)_p}{\|\varphi_r\|_p}\int\limits_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Осталось заметить, что для $s(t) = \varphi_{n,r}(t)$ неравенство (8.3.4) обращается в равенство. Теорема доказана.

В случае, когда $\omega(t) = t$, для $t \in [0,\pi]$ неравенство (8.3.5) является вариантом неравенства (8.2.6).

8.4. Неравенства типа Никольского для полиномов

В данном параграфе получены некоторые точные неравенства разных метрик типа Никольского для тригонометрических полиномов, которые устанавливаются при помощи неравенств типа Колмогорова.

Лемма 8.4.1. *Пусть $p, q \in (0,\infty]$, $q > p$; x – неотрицательная периодическая функция, такая, что $0 < \|x\|_q < \infty$. Тогда для любого $c > 0$*

$$\frac{\|x+c\|_q}{\|x+c\|_p} \le \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p}.$$

Доказательство. Так как $c > 0$, то существует $\gamma > 1$, такое, что

$$\|x+c\|_p = \|\gamma x\|_p. \tag{8.4.1}$$

Докажем неравенство

$$\|x+c\|_q \le \|\gamma x\|_q.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\|r(x+c,\cdot)\|_q \le \|r(\gamma x,\cdot)\|_q.$$

Чтобы доказать последнее соотношение, согласно теореме 10.2.4 достаточно доказать, что

$$\int_0^t r^p(x+c,u)du \le \int_0^t r^p(\gamma x,u)du, \quad t>0. \tag{8.4.2}$$

Докажем (8.4.2). Заметим прежде всего, что

$$|r'(x+c,u)| \le |r'(\gamma x,u)|, \quad u>0,$$

так как $\gamma > 1$. Поэтому согласно (8.4.1) существует $u_0 > 0$, такое, что

$$r(x+c,u) \le r(\gamma x,u), \quad u \in (0,u_0),$$

и

$$r(x+c,u) \ge r(\gamma x,u), \quad u > u_0.$$

Таким образом,

$$r^p(x+c,0) \le r^p(\gamma x,0).$$

Кроме того, разность $r^p(x+c,u) - r^p(\gamma x,u)$ меняет знак (с "$-$" на "$+$") не более одного раза. Отсюда следует (8.4.2) ввиду (8.4.1). Лемма доказана.

Теорема 8.4.1. *Пусть $n \in \mathbf{N}$ и $p,q \in (0,\infty], q > p$. Тогда для любого полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$*

$$\|T_n\|_q \le n^{1/p-1/q} \sup_{c\in[0,1]} \frac{\|\cos(\cdot)+c\|_q}{\|\cos(\cdot)+c\|_p} \|T_n\|_p. \tag{8.4.3}$$

Неравенство (8.4.3) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{T_n\in\mathcal{T}_n\\ T_n\ne 0}} \frac{\|T_n\|_q}{n^{1/p-1/q}\|T_n\|_p} = \sup_{c\in[0,1]} \frac{\|\cos(\cdot)+c\|_q}{\|\cos(\cdot)+c\|_p}.$$

Доказательство. Фиксируем любые $n \in \mathbf{N}$ и $\hat{T}_n \in \mathcal{T}_n$. Предположим сначала, что $\hat{T}_n$ не имеет нулей. Пусть, например, $\hat{T}_n(t) > 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$. Рассмотрим полином $T_n(t) := \hat{T}_n(t) - \min\limits_t \hat{T}_n(t)$. Ясно, что T_n – неотрицательный полином, имеющий нули. Согласно лемме 8.4.1 имеем

$$\frac{\|\hat{T}_n\|_q}{\|\hat{T}_n\|_p} \le \frac{\|T_n\|_q}{\|T_n\|_p}.$$

Поэтому достаточно доказать (8.4.3) для полиномов T_n, имеющих нули. Тогда по теореме 6.8.1 для любого $r \in \mathbf{N}$

$$\|T_n\|_q \le \sup_{c\in[0,\|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} \|T_n\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \left\|T_n^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}. \tag{8.4.4}$$

Оценивая в (8.4.4) норму $\|T_n^{(r)}\|_\infty$ при помощи неравенства Бернштейна (8.1.1), получаем

$$\|T_n\|_q \le \sup_{c\in[0,\|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} \|T_n\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \left(n^r \|T_n\|_\infty\right)^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}. \tag{8.4.5}$$

Заметим, что для любых $s > 0$ и $c \in \mathbf{R}$

$$\|\varphi_r + c\|_s \to \frac{4}{\pi} \left\|\cos(\cdot) + \frac{\pi}{4}c\right\|_s, \quad r \to \infty. \tag{8.4.6}$$

Поэтому переходя в (8.4.5) к пределу при $r \to \infty$, имеем

$$\|T_n\|_q \le n^{1/p-1/q} \sup_{c\in[0,4/\pi]} \frac{\left\|\cos(\cdot) + \frac{\pi}{4}c\right\|_q}{\left\|\cos(\cdot) + \frac{\pi}{4}c\right\|_p} \|T_n\|_p. \tag{8.4.7}$$

Теперь (8.4.3) следует из (8.4.7).

Неравенство (8.4.3) становится равенством для $T_1(u) = \cos u + \overline{c}$, где $\overline{c}$ – константа, реализующая $\sup$ в (8.4.3). Теорема доказана.

Замечание 8.4.1. Легко видеть, что для любого $p \geq 1$

$$\sup_{c\in[0,1]} \frac{\|\cos(\cdot)+c\|_\infty}{\|\cos(\cdot)+c\|_p} > \max\left\{\frac{\|\cos(\cdot)\|_\infty}{\|\cos(\cdot)\|_p},\ \frac{\|\cos(\cdot)+1\|_\infty}{\|\cos(\cdot)+1\|_p}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{1}{\|\cos(\cdot)\|_p},\ \frac{2}{\|\cos(\cdot)+1\|_p}\right\}$$

и

$$\sup_{c\in[0,1]} \frac{\|\cos(\cdot)+c\|_2}{\|\cos(\cdot)+c\|_1} > \max\left\{\frac{\|\cos(\cdot)\|_2}{\|\cos(\cdot)\|_1},\ \frac{\|\cos(\cdot)+1\|_2}{\|\cos(\cdot)+1\|_1}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2\pi}\right\} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2\pi}.$$

Замечание 8.4.2. С.Б. Стечкин доказал (см. [3]) неравенство

$$\|T\|_q \leq 2^{\frac{q-p}{q}} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T\|_p, \quad 0 < p \leq q \leq \infty.$$

Полагая

$$C_{q,p} = \sup_{c\in[0,1]} \frac{\|\cos(\cdot)+c\|_q}{\|\cos(\cdot)+c\|_p}$$

и используя идею Стечкина из [3], легко доказать, что для любых $0 < p < \ q \leq \infty$

$$C_{q,p} \leq \left(C_{\infty,p}\right)^{1-\frac{p}{q}}.$$

Принимая во внимание то, что $\forall c \in [0,1]$

$$\|\cos(\cdot)+c\|_p = (2\pi)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\cos t + c|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq (2\pi)^{\frac{1}{p}} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|\cos t + c| dt\right) = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1}{p}},$$

получаем

$$C_{\infty,p} \le \frac{\|\cos(\cdot)+1\|_\infty}{\|\cos(\cdot)\|_p} \le \frac{2}{\frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1}{p}}},$$

и, следовательно,

$$C_{q,p} \le \frac{4^{1-\frac{p}{q}}}{(2\pi)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}.$$

Это – оценка Бадкова [99], которая в случае $0 < p < \ln(2\pi)/\ln 2$ улучшает оценку Стечкина.

Пусть $q > p > 2$. Учитывая, что

$$C_{\infty,2} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}},$$

получаем

$$C_{\infty,p} \le C_{\infty,2}(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

и

$$C_{q,p} \le (C_{\infty,p})^{1-\frac{p}{q}} \le \left(C_{\infty,2}(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)^{1-\frac{p}{q}} = \frac{3^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right)}}{(2\pi)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}.$$

Таким образом, в случае $q > p > 2$ получаем оценку для $C_{q,p}$, которая улучшает оценки Стечкина и Бадкова.

Пусть теперь $0 < p < 2$. Используя неравенство

$$\|\cos(\cdot)+c\|_p \ge \left(\frac{\|\cos(\cdot)+c\|_2^2}{\|\cos(\cdot)+c\|_\infty^{2-p}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

получаем

$$C_{q,p} \le (C_{\infty,p})^{1-\frac{p}{q}} \le (C_{\infty,2})^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Замечание 8.4.3. Исследуем величину

$$C_{\infty,p}^p = \sup_{c\in[0,1]}\left(\frac{\|\cos(\cdot)+c\|_\infty}{\|\cos(\cdot)+c\|_p}\right)^p = \sup_{c\in[0,1]}\frac{(1+c)^p}{\int\limits_0^{2\pi}|\cos t+c|^p dt}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sup_{c\in[0,1]} \frac{(1+c)^p}{\int\limits_0^{2\pi} |\cos t + c|^p dt} = \frac{(1+c_0)^p}{\int\limits_0^{2\pi} |\cos t + c_0|^p dt},$$

где c_0 – единственное решение уравнения

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos t\, |\cos t + c_0|^{p-1} \operatorname{sgn}(\cos t + c_0) dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} |\cos t + c_0|^{p-1} \operatorname{sgn}(\cos t + c_0) dt,$$

и

$$C_{\infty,p} = \frac{(1+c_0)}{\left(\int\limits_0^{2\pi} |\cos t + c_0|^{p-1} \operatorname{sgn}(\cos t + c_0) dt\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

В случае $p = 1$ получаем

$$C_{\infty,1} = \frac{1}{4\xi} = 0{,}33825602594988284849297 22\ldots,$$

где

$$\xi = 0{,}7390851332151606416553121\ldots$$

единственное решение уравнения

$$\cos t = t.$$

Напомним, что $c_m(x)$ – константа наилучшего приближения x в L_m.

Теорема 8.4.2. *Пусть* $n \in \mathbf{N}$; $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$, $m = p+1$ *или* $m = \infty$. *Тогда для любого полинома* $T_n \in \mathcal{T}_n$

$$\|T_n - c_m(T_n)\|_q \le n^{1/p-1/q} \frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p} \|T_n - c_m(T_n)\|_p, \qquad (8.4.8)$$

$$E_0^{\pm}(T_n)_q \le n^{1/p-1/q}\frac{\|\cos(\cdot)+1\|_q}{\|\cos(\cdot)+1\|_p}E_0^{\pm}(T_n)_p \tag{8.4.9}$$

и

$$E_0(T_n)_\infty \le \frac{n^{1/p}}{\|\cos(\cdot)\|_p}E_0(T_n)_p. \tag{8.4.10}$$

Неравенства (8.4.8)–(8.4.10) *неулучшаемы в том смысле, что*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\sup_{\substack{T_n\in\mathcal{T}_n\\ T_n\ne\mathrm{const}}}\frac{\|T_n-c_m(T_n)\|_q}{n^{1/p-1/q}\|T_n-c_m(T_n)\|_p}=\frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p},$$

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\sup_{\substack{T_n\in\mathcal{T}_n\\ T_n\ne\mathrm{const}}}\frac{E_0^{\pm}(T_n)_q}{n^{1/p-1/q}E_0^{\pm}(T_n)_p}=\frac{\|\cos(\cdot)+1\|_q}{\|\cos(\cdot)+1\|_p}$$

и

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\sup_{\substack{T_n\in\mathcal{T}_n\\ T_n\ne\mathrm{const}}}\frac{E_0(T_n)_\infty}{n^{1/p}E_0(T_n)_p}=\frac{1}{\|\cos(\cdot)\|_p}.$$

Доказательство. Докажем сначала (8.4.8). Согласно (6.8.5) для любого $r\in\mathbf{N}$

$$\|T_n-c_m(T_n)\|_q\le\frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}}\|T_n-c_m(T_n)\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}\left\|T_n^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}.$$

Оценивая норму $\|T_n^{(r)}\|_\infty$ при помощи неравенства Бернштейна (8.1.1), имеем

$$\|T_n-c_m(T_n)\|_q\le$$

$$\le\frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}}\|T_n-c_m(T_n)\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}\left(n^r\|T_n\|_\infty\right)^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $r\to\infty$ и принимая во внимание (8.4.6), получаем (8.4.8).

Используя (6.8.6) вместо (6.8.5), аналогично устанавливаем (8.4.9).

Доказательство неравенства (8.4.10) лишь некоторыми деталями отличается от доказательства неравенства (8.1.8).

Неравенства (8.4.8)–(8.4.10) обращаются в равенство для $T_1(u) = \cos u$. Теорема доказана.

Следствие 8.4.1. *Пусть* $n \in \mathbf{N}$; $q \in [1, \infty]$. *Тогда для любого полинома* $T_n \in \mathcal{T}_n$, $T_n \perp 1$,

$$\|T_n\|_q \le n^{1-1/q} \frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{4} \|T_n\|_1.$$

Это неравенство неулучшаемо в том смысле, что

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{T_n\in\mathcal{T}_n,\, T_n\ne 0 \\ \int_0^{2\pi} T_n(u)du=0}} \frac{\|T_n\|_q}{n^{1-1/q}\,\|T_n\|_p} = \frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{4}.$$

Для доказательства следствия достаточно заметить, что $c_2(T_n) = 0$, так как $T_n \perp 1$.

8.5. Неравенства типа Никольского для сплайнов

В настоящем параграфе при помощи неравенств типа Колмогорова получены некоторые точные неравенства разных метрик типа Никольского для полиномиальных сплайнов, которые являются аналогами неравенств для полиномов из предыдущего параграфа.

Лемма 8.5.1. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$; $p \in (0, \infty]$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *имеем*

$$\|s^{(r)}\|_\infty \le \frac{n^{r+1/p}}{\|\varphi_r\|_p} E_0(s)_p. \tag{8.5.1}$$

Доказательство. Применяя лемму 8.2.1 и оценивая $E_0(s)_\infty$ с помощью неравенства (6.8.11), получаем

$$\|s^{(r)}\|_\infty \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty} E_0(s)_\infty \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty} \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} E_0(s)_p^\alpha \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha := \dfrac{r}{r+1/p}$, и, следовательно,

$$\|s^{(r)}\|_\infty^\alpha \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} E_0(s)_p^\alpha.$$

Из последнего неравенства следует (8.5.1), так как $r\dfrac{1}{\alpha} = r + \dfrac{1}{p}$. Лемма доказана.

Теорема 8.5.1. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$ *и* $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$, $m = p+1$ *или* $m = \infty$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *имеем*

$$\|s\|_q \le n^{1/p-1/q} \sup_{c\in[0,\|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p} \|s\|_p. \tag{8.5.2}$$

Неравенство (8.5.2) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{s\in S_{n,r}\\ s\ne 0}} \frac{\|s\|_q}{n^{1/p-1/q}\|s\|_p} = \sup_{c\in[0,\|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p}.$$

Доказательство. Согласно лемме 8.4.1 достаточно доказать (8.5.2) для сплайнов $s \in S_{n,r}$, имеющих нули. Положим $\alpha := \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$. Применяя неравенство (6.8.1), оценивая $\|s^{(r)}\|_\infty$ при помощи неравенства (8.5.1) и используя очевидное соотношение $E_0(s)_p \le \|s\|_p$, имеем

$$\|s\|_q \le \sup_{c\in[0,\|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^\alpha} \|s\|_p^\alpha \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha} \le$$

$$\le \sup_{c\in[0,\|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^\alpha} \|s\|_p^\alpha \left(\frac{n^{r+1/p}}{\|\varphi_r\|_p} E_0(s)_p\right)^{1-\alpha} \le$$

$$\le \sup_{c\in[0,\|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p} n^{(r+1/p)(1-\alpha)} \|s\|_p.$$

Отсюда следует (8.5.2), так как $(r+1/p)(1-\alpha) = 1/p - 1/q$.

Неравенство (8.5.2) обращается в равенство для сплайна $s = \varphi_r + c_1$, где c_1 – константа, реализующая sup в правой части (8.5.2). Теорема доказана.

Следующие две леммы являются аналогами леммы 8.5.1.

Лемма 8.5.2. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *имеем*

$$\|s^{(r)}\|_\infty \le \frac{n^r}{2\|\varphi_r\|_\infty} E_0^{\pm}(s)_\infty. \tag{8.5.3}$$

Доказательство. Докажем неравенство для $E_0^+(s)_\infty$. Неравенство для $E_0^-(s)_\infty$ доказывается аналогично.

Так как $2n^{-r}\|\varphi_r\|_\infty = \|\varphi_{n,r} + \|\varphi_{n,r}\|_\infty\|_\infty$, неравенство (8.5.3) можно переписать в виде

$$\frac{\|s^{(r)}\|_\infty}{\|s + \min\limits_t s(t)\|_\infty} \|\varphi_{n,r} + \|\varphi_{n,r}\|_\infty\|_\infty \le 1.$$

Предположим, что последнее неравенство неверно для некоторого сплайна $s \in S_{n,r}$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{\|s^{(r)}\|_\infty}{\|s + \min\limits_t s(t) + \varepsilon\|_\infty} \|\varphi_{n,r} + \|\varphi_{n,r}\|_\infty\|_\infty > 1.$$

Для таких ε существует $\gamma(\varepsilon) \in (0,1)$, удовлетворяющее условию

$$\frac{\gamma(\varepsilon)\|s^{(r)}\|_\infty}{\|s + \min\limits_t s(t) + \varepsilon\|_\infty} \|\varphi_{n,r} + \|\varphi_{n,r}\|_\infty\|_\infty = 1. \tag{8.5.4}$$

Рассмотрим сплайн

$$\sigma(t) := \gamma(\varepsilon) \frac{s(t) + \min\limits_t s(t) + \varepsilon}{\|s + \min\limits_t s(t) + \varepsilon\|_\infty} \|\varphi_{n,r} + \|\varphi_{n,r}\|_\infty\|_\infty.$$

Ясно, что $\sigma \in S_{n,r}$. Так как для любого $t \in \mathbf{R}$

$$\min_t\{\pm\varphi_{n,r}(t) + \|\varphi_{n,r}\|_\infty\} = 0 < \sigma(t) < \max_t\{\pm\varphi_{n,r}(t) + \|\varphi_{n,r}\|_\infty\},$$

то обе разности

$$\delta_{\pm}(t) := \pm\varphi_{n,r}(t) + \|\varphi_{n,r}\|_{\infty} - \sigma(t)$$

имеют по крайней мере $2n$ перемен знака на периоде. Применяя теорему Ролля, заключаем, что обе разности

$$\delta_{\pm}^{(r)}(t) := \pm\varphi_{n,r}^{(r)}(t) - \sigma^{(r)}(t)$$

также имеют по крайней мере $2n$ перемен знака на периоде.

С другой стороны, согласно (8.5.4)

$$\|\sigma^{(r)}\|_{\infty} = 1 = \|\varphi_{n,r}^{(r)}\|_{\infty}.$$

Следовательно, существует интервал $(k\pi/n,\ (k+1)\pi/n)$, $k = 1, \ldots, n-1$, такой, что одна из разностей $\delta_{\pm}^{(r)}(t)$ тождественно равна нулю на этом интервале. Так как эта разность постоянна на каждом из интервалов $(k\pi/n, (k+1)\pi/n)$, $k = 1, \ldots, n-1$, приходим к выводу, что эта разность имеет не более $2n-1$ перемен знака на периоде. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 8.5.3. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$; $p \in (0, \infty]$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *имеем*

$$\|s^{(r)}\|_{\infty} \le \frac{n^{r+1/p}}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_{\infty}\|_p} E_0^{\pm}(s)_p. \tag{8.5.5}$$

Доказательство. Применяя неравенство (8.5.3) и оценивая $E_0^{\pm}(s)_{\infty}$ при помощи неравенства (6.8.6) (с $q = \infty$), имеем

$$\|s^{(r)}\|_{\infty} \le \frac{n^r}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_{\infty}\|_{\infty}} E_0^{\pm}(s)_{\infty} \le$$

$$\le \frac{n^r}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_{\infty}\|_{\infty}} \frac{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_{\infty}\|_{\infty}}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_{\infty}\|_p^{\alpha}} E_0^{\pm}(s)_p^{\alpha} \left\|s^{(r)}\right\|_{\infty}^{1-\alpha},$$

где $\alpha := \dfrac{r}{r+1/p}$. Следовательно,

$$\|s^{(r)}\|_{\infty}^{\alpha} \le \frac{n^r}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_{\infty}\|_p^{\alpha}} E_0^{\pm}(s)_p^{\alpha},$$

и получаем (8.5.5), так как $r\dfrac{1}{\alpha} = r + \dfrac{1}{p}$.

Теорема 8.5.2. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$; $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$, $m = p + 1$ *или* $m = \infty$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *имеем*

$$\|s - c_m(s)\|_q \le n^{1/p-1/q} \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p} \|s - c_m(s)\|_p, \tag{8.5.6}$$

$$E_0^{\pm}(s)_q \le n^{1/p-1/q} \frac{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_q}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_p} E_0^{\pm}(s)_p \tag{8.5.7}$$

и

$$E_0(s)_\infty \le \frac{n^{1/p}\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p} E_0(s)_p. \tag{8.5.8}$$

Неравенства (8.5.6)–(8.5.8) *неулучшаемы в том смысле, что*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{s\in S_{n,r}\\ s\ne\mathrm{const}}} \frac{\|s - c_m(s)\|_q}{n^{1/p-1/q}\|s - c_m(s)\|_p} = \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p},$$

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{s\in S_{n,r}\\ s\ne\mathrm{const}}} \frac{E_0^{\pm}(s)_q}{n^{1/p-1/q}E_0^{\pm}(s)_p} = \frac{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_q}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_p}$$

и

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{s\in S_{n,r}\\ s\ne\mathrm{const}}} \frac{E_0(s)_\infty}{n^{1/p}E_0(s)_p} = \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p}.$$

Доказательство. Докажем сначала (8.5.6). Положим $\alpha := \dfrac{r + 1/q}{r + 1/p}$. Применяя неравенство (6.8.5), оценивая $\|s^{(r)}\|_\infty$ при помощи неравенства (8.5.1) и учитывая очевидное соотношение $E_0(s)_p \le \|s - c_m(s)\|_p$, имеем

$$\|s - c_m(s)\|_q \le \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} \|s - c_m(x)\|_p^\alpha \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha} \le$$

$$\le \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} \|s - c_m(x)\|_p^\alpha \left(\frac{n^{r+1/p}}{\|\varphi_r\|_p} E_0(s)_p\right)^{1-\alpha} \le$$

$$\leq \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p} n^{(r+1/p)(1-\alpha)} \|s - c_m(x)\|_p .$$

Докажем теперь (8.5.7). Применяя неравенство (6.8.6) и лемму 8.5.3, получаем

$$E_0^{\pm}(s)_q \leq \frac{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_q}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} E_0^{\pm}(s)_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}} \leq$$

$$\leq \frac{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_q}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} E_0^{\pm}(s)_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \times$$

$$\times \left(\frac{n^{r+1/p}}{\|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_p} E_0^{\pm}(s)_p \right)^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}} .$$

Отсюда следует (8.5.7).

Осталось доказать (8.5.8). Применяя неравенство (6.8.11) и лемму 8.5.1, имеем

$$E_0(s)_\infty \leq \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p} E_0(s)_p^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p} E_0(s)_p^\alpha \left(\frac{n^{r+1/p}}{E_0(\varphi_r)_p} E_0(s)_p \right)^{1-\alpha} =$$

$$= n^{(r+1/p)(1-\alpha)} \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p} E_0(s)_p,$$

где $\alpha = \dfrac{r}{r+1/p}$. Отсюда следует (8.5.8).

Неравенства (8.5.6)–(8.5.8) обращаются в равенство для сплайна $s = \varphi_r$. Теорема доказана.

8.6. О некоторых экстремальных свойствах совершенных сплайнов и моносплайнов

Символом $\Gamma_{n,r}$ обозначим множество совершенных сплайнов порядка r, имеющих не более $2n$ узлов, т. е. множество функций $x \in L^r_\infty$, у которых $\nu(x^{(r)}) \le 2n$, и $|x^{(r)}(t)| = 1$ для почти всех $t \in \mathbf{R}$.

Следующее свойство совершенных сплайнов играет важную роль (см., например, [214, гл. 10]) при оценке снизу поперечников $d_n(W^r_p)_1$.

Теорема 8.6.1. *Для всех $n, r \in \mathbf{N}$ и любого совершенного сплайна $s \in \Gamma_{n,r}$ выполняется неравенство*

$$\|s\|_p \ge n^{-r}\|\varphi_r\|_p. \tag{8.6.1}$$

Доказательство. Фиксируем $s \in \Gamma_{n,r}$. Применяя к нему неравенство (6.3.2) при $k = r-1$, получаем

$$\bigvee_0^{2\pi}\left(s^{(r-1)}\right) \le \left(\frac{\nu(s')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|\varphi_1\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p^\alpha}\left(4\,\|s\|_p\right)^\alpha \left[\bigvee_0^{2\pi}\left(s^{(r)}\right)\right]^{1-\alpha}, \tag{8.6.2}$$

где $\alpha = 1/(r+1/p)$. Из определения $\Gamma_{n,r}$ сразу следует, что $\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \le 4n$, $\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r-1)}) = \|s^{(r)}\|_1 = 2\pi$, $\nu(s') \le 2n$. Учитывая также равенство $\|\varphi_1\|_\infty = \pi/2$, из (8.6.2) получаем

$$2\pi \le n^{(1-1/p)\alpha}\frac{\pi}{2}\left(\frac{4\|s\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right)^\alpha (4n)^{1-\alpha},$$

или

$$n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha}} \le \frac{\|s\|_p}{\|\varphi_r\|_p}.$$

Отсюда следует (8.6.1), так как $1/p - 1/\alpha = -r$. Теорема доказана.

Ниже приведена теорема (теорема 8.6.2), из которой, в частности, следует как неравенство (8.6.1) (при $p = \infty$), так и неравенство (8.2.3) (при $q = \infty$), играющие важную роль в теории аппроксимации. Кроме того, в дальнейшем приведен (теорема 8.6.3)

несимметричный вариант теоремы 8.6.2, из которого в пределе получается аналог неравенства 8.6.1 (при $p = \infty$) для моносплайнов (следствие 8.6.2).

Пусть $r \in \mathbf{N}$. Для $x \in L_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ и $\varepsilon \in (0,1)$ положим

$$A_{\pm}^{\varepsilon}(x) = \left\{ t \in \mathbf{R} : \pm x^{(r)}(t) \geq \pm(1-\varepsilon) \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty} \right\}. \tag{8.6.3}$$

Теорема 8.6.2. *Если для функции $x \in L_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ одно из множеств $A_{\pm}^{\varepsilon}(x)$ содержит интервал длины π/λ при любом $\varepsilon \in (0,1)$, то*

$$\|x\|_{\infty} \geq \left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_{\infty} \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty}, \tag{8.6.4}$$

и для любого $k = 1, 2, \ldots, r-1$

$$\|x\|_{\infty} \geq \frac{\left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_{\infty}}{\left\| \varphi_{\lambda,r-k} \right\|_{\infty}} \left\| x^{(k)} \right\|_{\infty}. \tag{8.6.5}$$

Доказательство. Пусть $(a_{\varepsilon}, b_{\varepsilon})$ – интервал, о котором идет речь в условии теоремы. Тогда

$$\frac{\pi}{\lambda} \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \left| \int\limits_{a_{\varepsilon}}^{b_{\varepsilon}} x^{(r)}(t)dt \right| \leq \frac{2}{1-\varepsilon} \left\| x^{(r-1)} \right\|_{\infty}.$$

Отсюда ввиду произвольности ε имеем

$$\frac{\pi}{\lambda} \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty} \leq 2 \left\| x^{(r-1)} \right\|_{\infty}.$$

Применяя неравенство Колмогорова (2.3.1) при $k = r-1$, получаем

$$\frac{\pi}{\lambda} \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty} \leq 2 \frac{\|\varphi_1\|_{\infty}}{\|\varphi_r\|_{\infty}^{1/r}} \|x\|_{\infty}^{1/r} \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty}^{1-1/r}.$$

Отсюда, учитывая, что $\|\varphi_1\|_{\infty} = \pi/2$ и $\left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_{\infty} = \lambda^{-r} \|\varphi_r\|_{\infty}$, выводим

$$\left\| x^{(r)} \right\|_{\infty}^{1/r} \leq \lambda \left(\frac{\|x\|_{\infty}}{\|\varphi_r\|_{\infty}} \right)^{1/r} = \left(\frac{\|x\|_{\infty}}{\left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_{\infty}} \right)^{1/r},$$

что эквивалентно (8.6.4).

Для доказательства (8.6.5) запишем (8.6.4) в виде

$$\|x\|_\infty^{k/r} \geq \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty^{k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}$$

и неравенство Колмогорова (2.3.1) – в виде

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}.$$

Сопоставление этих двух неравенств дает

$$\|x\|_\infty^{k/r} \geq \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty^{k/r} \left\|x^{(k)}\right\|_\infty \frac{\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty^{1-k/r}}{\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_\infty} \|x\|_\infty^{k/r-1},$$

что эквивалентно (8.6.5). Теорема доказана.

Если $s \in S_{n,r}$, то L_∞-норма $s^{(r)}(t)$ достигается на некотором интервале длиной π/n и неравенство (8.6.5) приводит к неравенству (8.2.3) при $q = \infty$.

С другой стороны, если $s \in \Gamma_{n,r}$, то $\left|s^{(r)}(t)\right| = 1$ для почти всех $t \in \mathbf{R}$ и $\nu\left(s^{(r)}\right) \leq 2n$. Поэтому для любого $\varepsilon \in (0,1)$ одно из множеств $A_\pm^\varepsilon(x)$ содержит интервал длины π/n, и неравенство (8.6.4) приводит к неравенству (8.6.1) при $p = \infty$.

Пусть $\lambda, \alpha, \beta > 0$, $r \in \mathbf{N}$. Напомним, что символом $\varphi_{\lambda,0}(t;\alpha,\beta)$ обозначается $2\pi/\lambda$-периодическая функция, равная α для $t \in [0, 2\pi\beta/\lambda(\alpha+\beta)]$ и $-\beta$ для $t \in [2\pi\beta/\lambda(\alpha+\beta), 2\pi/\lambda]$, а символом $\varphi_{\lambda,r}(t;\alpha,\beta)$ – r-й $2\pi/\lambda$-периодический интеграл от $\varphi_{\lambda,0}(t;\alpha,\beta)$ со средним значением, равным нулю на периоде.

Теорема 8.6.3. *Пусть* $x \in L_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ *и* $\alpha := \left\|x_+^{(r)}\right\|_\infty$, $\beta := \left\|x_-^{(r)}\right\|_\infty$. *Если для любого* $\varepsilon > 0$ *множество* $A_+^\varepsilon(x)$ (*см.* (8.6.2)) *содержит интервал длины* $2\pi\beta/(\lambda(\alpha+\beta))$ *или множество* $A_-^\varepsilon(x)$ *содержит интервал длины* $2\pi\alpha/(\lambda(\alpha+\beta))$, *то*

$$E_0(x)_\infty \geq E_0(\varphi_{\lambda,r}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty. \tag{8.6.6}$$

Доказательство. Пусть, например, для любого $\varepsilon > 0$ множество $A_+^\varepsilon(x)$ содержит интервал $(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$ длины $2\pi\beta/(\lambda(\alpha+\beta))$. Тогда

$$\frac{2\pi\beta}{\lambda(\alpha+\beta)}\left\|x_+^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{1}{1-\varepsilon}\left|\int\limits_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} x^{(r)}(t)dt\right| \le \frac{2}{1-\varepsilon}E_0\left(x^{(r-1)}\right)_\infty .$$

Отсюда ввиду произвольности ε имеем

$$\frac{\pi\beta\alpha}{\lambda(\alpha+\beta)} \le E_0\left(x^{(r-1)}\right)_\infty .$$

Применяя неравенство Хермандера (2.9.1) при $k = r-1$ и учитывая, что согласно определению чисел α и β $\left\|x^{(r)}\right\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1$, получаем

$$\frac{\pi\beta\alpha}{\lambda(\alpha+\beta)} \le \frac{\|\varphi_1(\cdot;\alpha,\beta)\|_\infty}{E_0\left(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta)\right)_\infty^{1/r}}E_0\left(x\right)_\infty^{1/r} .$$

Отсюда следует (8.6.6) ввиду очевидных равенств

$$\|\varphi_1(\cdot;\alpha,\beta)\|_\infty = \frac{\pi\beta\alpha}{\alpha+\beta}, \quad E_0\left(\varphi_{\lambda,r}(\cdot;\alpha,\beta)\right)_\infty =$$

$$= \lambda^{-r}E_0\left(\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta)\right)_\infty .$$

Теорема доказана.

Для $n, r \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta > 0$ обозначим $\Gamma_{n,r}(\alpha,\beta)$ – множество 2π-периодических (α,β)-совершенных сплайнов порядка r, имеющих не более $2n$ узлов, т. е. множество функций $\sigma \in L_\infty^r(\mathbf{T})$, таких, что $\left(\alpha^{-1}\sigma_+^{(r)} + \beta^{-1}\sigma_-^{(r)}\right)(t) = 1$ для почти всех $t \in \mathbf{R}$, и $\nu(\sigma^{(r)}) \le 2n$.

Следствие 8.6.1. *Для любых $n, r \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta > 0$ и для произвольного сплайна $\sigma \in \Gamma_{n,r}(\alpha,\beta)$*

$$E_0(\sigma)_\infty \ge E_0(\varphi_{n,r}(\cdot;\alpha,\beta))_\infty.$$

Для $n, r \in \mathbf{N}$ обозначим через $B_{n,r}(t)$ $(r-1)$-й периодический интеграл от $2\pi/n$-периодической функции $B_n(t)$, равной $t-\pi/n$ для $t \in (0, 2\pi/n)$, в среднем равной нулю на периоде.

Нетрудно проверить (см., например, [209, с. 109], что для всех $t \in \mathbf{R}$

$$\lim_{\beta\to\infty} \varphi_{n,r}(t; 1, \beta) = B_{n,r}(t), \quad r \in \mathbf{N}.$$

Функции $M(t)$ вида

$$M(t) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu B_r(t - t_\nu), \qquad p_\nu \geq 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1,$$

называются моносплайнами порядка r. Любой моносплайн $M(t)$ является пределом $(1, \beta)$-совершенных сплайнов при $\beta \to \infty$.

Следующее утверждение получается из следствия 8.6.1 предельным переходом при $\beta \to \infty$.

Следствие 8.6.2. *Для любого $r \in \mathbf{N}$ и для произвольного моносплайна $M(t)$*

$$E_0(M)_\infty \geq E_0(B_{n,r})_\infty.$$

Комментарии к главе 8

В данной главе собраны приложения неравенств типа Колмогорова для периодических функций к исследованию экстремальных свойств тригонометрических полиномов и полиномиальных сплайнов. Такие приложения относятся, на наш взгляд, к числу наиболее интересных и красивых.

В § 8.1 приводится, во-первых, основанное на идее сравнения производных (восходящей к теореме сравнения Колмогорова) доказательство неравенства Бернштейна для тригонометрических полиномов, а также некоторых его уточнений. Аналогичная работа для периодических сплайнов проводится в § 8.2.

Далее в § 8.1 с помощью неравенства Лигуна (теорема 6.2.1) устанавливается следующее обобщение неравенства Бернштейна (см., например, [306]):

$$\|T_n^{(k)}\|_p \leq n^k \|\cos(\cdot)\|_p \|T_n\|_\infty.$$

Аналогичное неравенство для периодических полиномиальных сплайнов (см. [317]) получено в § 8.2.

В § 8.1 для тригонометрических полиномов, а в § 8.2 для сплайнов с помощью неравенства Лигуна из § 6.3, учитывающего число перемен знака производных, устанавливаются неравенства, оценивающие L_1-норму производной полинома (или сплайна) через L_p-норму самого полинома или сплайна. Здесь же даются приложения и других неравенств типа Колмогорова из гл. 6. Кроме того, в § 8.1 (см. теорему 8.1.5) при помощи приема Стейна доказано неравенство Зигмунда (см., например, [171, т. 2, с. 21]).

Отметим, что неравенство (8.1.8) в отличие от неравенств (8.1.3) и (8.1.6) не является точным на классе $\mathcal{T}_n$ при каждом фиксированном n. Это связано с тем, что для неравенств типа Колмогорова (6.2.1) и (6.3.1), которые применялись при выводе неравенств (8.1.3) и (8.1.6), соответствующая точка $(k, 1/q)$ (см. § 4.1) лежит в колмогоровской области $\mathcal{K}$, в то время как для неравенства (6.4.1), которое применялось при выводе (8.1.8), соответствующая точка $(k, 1/q)$ лежит в габушинской области Γ. В связи с этим экстремалями в неравенствах (6.2.1) и (6.3.1) являются сплайны $\varphi_{n,r}$ при любом $n \in \mathbf{N}$, в то время как в неравенстве (6.4.1) сплайны $\varphi_{n,r}$ являются экстремалями только при $n = 1$.

В § 8.3 с помощью результатов из § 7.7 устанавливаются неравенства типа Бернштейна для значений на тригонометрических полиномах или периодических сплайнах опорных функций классов $W^r H^\omega$. Эти результаты получены в работах [212, 213].

§ 8.4 и § 8.5 посвящены приложениям неравенств типа Надя из § 6.8. Здесь получены неулучшаемые константы в неравенствах разных метрик типа Никольского для тригонометрических полиномов вида

$$\|T_n\|_q \le C n^{k+1/q-1/p} \|T_n\|_p$$

в случае $q > p$ и точные константы в аналогичных неравенствах для сплайнов. Эти результаты получены в [80, 82].

В § 8.6 приводятся приложения неравенств типа Хермандера к исследованию экстремальных свойств совершенных сплайнов, во-

обще говоря несимметричных, и моносплайнов. Такие приложения были рассмотрены в работе [87].

Систематическое изложение близких вопросов можно найти в книге [211].

Дополнительные результаты к главе 8

1. В работе [221] доказано следующее неравенство типа Бернштейна для тригонометрических полиномов T_n порядка не выше n:

$$\left\|T_n^{(k)}\right\|_q \le n^{k+1/p-1/q}\frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p}\|T_n\|_p, \quad k \in \mathbf{N},$$

для $q \in (0,\infty]$, $p \in (0,1)$, $q > p$.

2. В работе [221] доказано также, что неравенства (8.4.8) и (8.5.6) в условиях теорем 8.4.2 и 8.5.2 справедливы для всех $m \in [p+1, \infty]$.

3. При помощи неравенств типа Колмогорова с локальными "нормами" (см. (Д.6.3)–(Д.6.5)) в работе [222] получены следующие неравенства типа Бернштейна.

Теорема 1. *Пусть* $k, n \in \mathbf{N}$; $q \in [1,\infty]$, $p \in (0,\infty]$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $\tau \in \mathcal{T}_n$ *выполняется неравенство*

$$\|\tau^{(k)}\|_q \le n^{k+1/p}\,\frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{|||\cos(\cdot)|||_p}|||\tau|||_p, \tag{Д.8.1}$$

где величина $|||\cdot|||_p$ *определена равенством* (Д.6.2).

Неравенство (Д.8.1) *точное на пространстве* $\mathcal{T}_n$ *и обращается в равенство для полиномов вида* $\tau(t) = a\cos(nt+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

При $p = \infty$ неравенство (Д.8.1) является усилением неравенства (8.1.3).

Теорема 2. *Пусть* $n, k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $q \in [1,\infty]$, $p \in (0,\infty]$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *справедливо неравенство*

$$\|s^{(k)}\|_q \le n^{k+\frac{1}{p}}\frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{|||\varphi_r|||_p}|||s|||_p. \tag{Д.8.2}$$

Неравенство (Д.8.2) *точное на классе* $S_{n,r}$ *и обращается в равенство для сплайнов вида* $s(t) = a\varphi_r(nt)$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

При $p = \infty$ неравенство (Д.8.2) является усилением неравенства (8.2.3).

4. По поводу результатов данного пункта см. [214, § 6.5].

Пусть $r = 1, 2, \ldots$, $\Im_r(t) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k t^{r-k}$ – произвольный полином степени не выше r с вещественными коэффициентами и

$$\Im_r(D) = \sum_{k=0}^{r} a_k D^{r-k},$$

$D = \dfrac{d}{dt}$ – соответствующий дифференциальный оператор.

Функция $s \in C^{r-1}$ называется периодическим $\Im$-сплайном (соответствующим оператору $\Im_r(D)$) с $2n$ равноотстоящими узлами на периоде, если $\Im_r(D)(\cdot) \in S_{2n,0}$. Множество таких сплайнов обозначим $S_{2n,\Im_r}$.

Ясно, что если $\Im_r(t) = t^r$, то $S_{2n,\Im_m} = S_{2n,r}$.

Обозначим через $\varphi_{n,\Im_r}(t)$ $2\pi/n$-периодическую функцию, в среднем равную нулю на периоде, такую, что $\Im_m(D)\varphi_{n,\Im_r}(t) = \varphi_{n,0}(t)$.

При $\Im_r(t) = t^r$ имеем $\varphi_{n,\Im_r}(t) = \varphi_{n,r}(t)$.

Теорема 3. *Пусть* $r, n \in \mathbf{N}$, *полином* $\Im_m$ *имеет лишь вещественные корни и*

$$\Im_r(t) = \Im_k(t)\Im_{r-k}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, r-1.$$

Тогда для любого $\Im$*-сплайна* $s \in S_{2n,\Im_r}$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\|\Im_k(D)s\|_\infty}{\|\varphi_{n,\Im_{r-k}}\|_\infty} \le \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_\infty}. \tag{Д.8.3}$$

В частности,

$$\|\Im_r(D)s\|_\infty \le \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_\infty}. \tag{Д.8.4}$$

Неравенства (Д.8.3) *и* (Д.8.4) *неулучшаемы на множестве* $S_{2n,\Im_r}$.

Теорема 4. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$, *полином* $\Im(t)$ *имеет лишь вещественные корни и представим в виде* $\Im_r(t) = \Im_k(t)\Im_{r-k}(t)$, *где* $\Im_k(t) = t\Im_{k-1}(t)$, $\Im_{k-1} \in P_{k-1}$, $\Im_{r-k} \in P_{r-k}$. *Тогда для любого* $\Im$*-сплайна* $s \in S_{2n,\Im_r}$, *для любого* λ *и для любого* $p \in [1, \infty]$

$$\|\Im_k(D)(s) - \lambda\|_p \le \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_\infty}\|\varphi_{n,\Im_{r-k}} - \lambda\|_p.$$

Теорема 5. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$ *и полином* $\Im(t)$ *имеет только вещественные нули* t_k *и представим в виде* $\Im_r(t) = \Im_k(t)\Im_{r-k}(t)$, *где* $\Im_k \in \pi_k$, $\Im_{r-k} \in \pi_{r-k}$. *Тогда для* $n > \max\limits_k |\operatorname{Im} t_k|$ *и любого* $\Im$*-сплайна* $s \in S_{2n,\Im_r}$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\|\Im_k(D)(s)\|_\infty}{\|\varphi_{n,\Im_{r-k}}\|_\infty} \le \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_\infty}.$$

В частности,

$$\|\Im_r(D)(s)\|_\infty \le \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_\infty}.$$

5. Результаты данного пункта обобщают и дополняют результаты предыдущего.

Теорема 1 [51]. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$ *и полином* $\Im(x)$ *с нулями* t_k *представим в виде* $\Im_r(t) = \Im_k(t)\Im_{r-k}(t)$, *где* $\Im_k \in \pi_k$, $\Im_{r-k} \in$ $\in \pi_{r-k}$. *Тогда для* $n > 2\max\limits_k |\operatorname{Im} t_k|$ *и любого* $\Im$*-сплайна* $s \in S_{2n,\Im_r}$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\|\Im_k(D)(s)\|_p}{\|\varphi_{n,\Im_{r-k}}\|_p} \le \frac{\|s\|_p}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_p}, \quad p = 1, 2, \infty. \tag{Д.8.5}$$

В частности, имеем

$$(2\pi)^{-1}\|\Im_r(D)(s)\|_p \le \frac{\|s\|_p}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_p}. \tag{Д.8.6}$$

Далее, если $\Im_k(0) = 0$, *то для любого* $s \in S_{2n,\Im_r}$ *и любого* $p \in [1, \infty]$ *имеем*

$$\frac{\|\Im_k(D)(s)\|_p}{\|\varphi_{n,\Im_{r-k}}\|_p} \le \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_\infty}. \tag{Д.8.7}$$

Если полином $\Im_r$ имеет только вещественные нули, то для любого $q \in [1, \infty]$

$$\frac{\bigvee\limits_0^{2\pi}(\Im_k(D)(s))}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(\varphi_{n,\Im_{r-k}})} \le \frac{\|s\|_q}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_q}. \tag{Д.8.8}$$

Следовательно, если $\Im_k(0) = 0$, то

$$\frac{\|\Im_k(D)(s)\|_1}{\|\varphi_{n,\Im_{r-k}}\|_1} \le \frac{\|s\|_q}{\|\varphi_{n,\Im_r}\|_q}. \tag{Д.8.9}$$

Справедливы также аналоги (Д.8.5)–(Д.8.9) для тригонометрических полиномов.

Теорема 2 [51]. *Пусть $n, r \in \mathbf{N}$. Если для полинома $\Im(t)$ с нулями t_k выполнено условие $n > 2\max\limits_k |\operatorname{Im} t_k|$, то для любого тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ и для любого $p \in [1, \infty]$ имеем $\|\Im_r(D)T_n\|_p \le |\Im_r(in)|\|T_n\|_p$.*

Далее, если $\Im_r(0) = 0$, то для любых $p, q \in [1, \infty]$ будет

$$\frac{\|\Im_k(D)(T_n)\|_p}{\|\cos(\cdot)\|_p} \le |\Im_r(in)|\|T_n\|_\infty$$

и

$$\frac{\|\Im_k(D)(T_n)\|_1}{4|\Im_r(in)|} \le \frac{\|T_n\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_q}.$$

Глава 9

ОБЗОР ДРУГИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Настоящая глава носит в основном справочный характер. В ней собрана информация о случаях решения задачи о неулучшаемых неравенствах вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(G)} \le C_{r,k}(G;q,p,s)\,\|x\|^{\alpha}_{L_p(G)}\left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_{L_s(G)}$$

для функций $x \in L^r_{p,s}(G)$, заданных на оси $(G = \mathbf{R})$ (см. § 9.2), полуоси $(G = \mathbf{R}_+)$ (см. § 9.3), окружности $(G = \mathbf{T})$ (см. § 9.4) и конечном отрезке $(G = \mathbf{I})$ (см. § 9.5). Приведены формулировки известных в этом направлении точных результатов, не вошедших в предыдущие главы. Не имея возможности привести доказательства всех этих результатов (а иногда и формулировок ввиду их громоздкости) и желая проиллюстрировать хотя бы некоторые методы их получения, мы все же приводим доказательства некоторых из них. В § 9.1 приведены некоторые результаты, связанные с задачей Колмогорова (см. § 2.4).

9.1. Задача Колмогорова о функциях с заданными нормами производных

Как уже отмечалось в § 2.4, А.Н. Колмогоров в 1926 г. (см. [286]) поставил следующую задачу $(\mathcal{K})$.

Пусть заданы целые числа

$$k_0 = 0 < k_1 < \ldots < k_m.$$

Требуется найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять система положительных чисел

$$M_{k_0},\ M_{k_1}, \dots, M_{k_m}, \tag{9.1.1}$$

для того чтобы нашлась функция $x \in L^{km}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, для которой при всех $i = 0, 1, \dots, m$

$$\|x^{(k_i)}\|_\infty = M_{k_i}. \tag{9.1.2}$$

Для троек чисел M_0, M_k, M_r $(k, r \in \mathbf{N},\ k < r)$ эта задача была полностью решена в работах Ж. Адамара [1] $(k = 1,\ r = 2)$, Г.Е. Шилова [357] $(k < r,\ r \le 4$ и $k = 2,\ r = 5)$ и А.Н. Колмогорова (общий случай). А.Н. Колмогоров доказал (см. § 2.4), что для того чтобы задача $(\mathcal{K})$ была разрешимой для тройки чисел, необходимо и достаточно, чтобы числа M_0, M_k и M_r были связаны неравенством

$$M_k \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r}. \tag{9.1.3}$$

Ясно, что задача Колмогорова может быть сформулирована не только для функций, заданных на всей числовой оси, но также и для функций, заданных на полуоси, окружности, конечном отрезке и т. д.

Напомним, что в работах Э. Ландау [233], А.П. Маторина [255], И.Е. Шенберга и А. Каваретты [355, 356] для функций $x \in$ $\in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$ было доказано неулучшаемое неравенство

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \frac{|s_r^{(k)}(0)|}{|s_r(0)|^{1-k/r}}\, \|x\|_\infty^{1-k/r}\, \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r},$$

где s_r – некоторый идеальный сплайн порядка r на полуоси, имеющий бесконечное число узлов (подробнее см. § 3.3), – идеальный сплайн Шенберга–Каваретты. При этом

$$\frac{|s_2'(0)|}{|s_2(0)|^{1/2}} = 2, \qquad \frac{|s_3'(0)|}{|s_3(0)|^{2/3}} = \frac{3^{5/3}}{2}, \qquad \frac{|s_3''(0)|}{|s_3(0)|^{1/3}} = 2 \cdot 3^{1/3}.$$

Из этих результатов, следуя схеме рассуждений А. Н. Колмогорова (см. § 2.4), нетрудно извлечь решение задачи $(\mathcal{K})$ для троек M_0,

M_k, M_r в случае функций, заданных на полуоси (при этом вместо использованного Колмогоровым эйлерова сплайна φ_r надо, конечно, использовать идеальный сплайн Шенберга–Каваретты):

Для того чтобы задача $(\mathcal{K})$ *для тройки чисел была разрешимой в классе* $L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_+)$, *необходимо и достаточно, чтобы числа* M_0, M_k *и* M_r *удовлетворяли неравенству*

$$M_k \le \frac{|s_r^{(k)}(0)|}{|s_r(0)|^{1-k/r}} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r}. \tag{9.1.4}$$

Изменение класса функций, среди которых ищется функция, имеющая заданные нормы M_{k_i} $(i = 0, 1, \dots, m)$ последовательных производных, конечно, не может не влиять на необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Колмогорова. Проиллюстрируем это на следующем примере. Обозначим $L^{r,0}_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_-)$ (см. § 3.6) – класс функций $L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_-)$, у которых все производные до порядка $r-1$ неотрицательны (это класс $(r-1)$-монотонных функций). В.М. Оловянишников доказал (см. § 3.6), что для любой функции $L^{r,0}_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_-)$ выполняется неулучшаемое неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{(r!)^{1-k/r}}{(r-k)!} \|x\|_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r},$$

что приводит к следующему необходимому условию разрешимости задачи $(\mathcal{K})$ в классе функций $L^{r,0}_{\infty,\infty}(\mathbf{R}_-)$ для тройки положительных чисел M_0, M_k и M_r :

$$M_k \le \frac{(r!)^{1-k/r}}{(r-k)!} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r}. \tag{9.1.6}$$

Им же доказано [275], что условие (9.1.6) является и достаточным.

Для систем чисел $\{M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2}, \dots, M_{k_m}\}$, состоящих более чем из трех элементов (т. е., когда $m \ge 3$), проблема Колмогорова далека от полного решения. Для функций, заданных на всей оси, нам известны только работы [286, 287, 160, 161], посвященные исследованиям в этом направлении. Сейчас достаточно подробно обсудим

некоторые подходы к решению задачи $(\mathcal{K})$ на оси для четверок чисел.

Откажемся теперь в формулировке задачи $(\mathcal{K})$ от требования $k_0 = 0$ и рассмотрим следующую задачу $(\mathcal{K}')$. Пусть задана система чисел

$$0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_m.$$

Требуется найти необходимые и достаточные условия на систему положительных чисел

$$M_{k_1},\ M_{k_2}, \ldots, M_{k_m},$$

обеспечивающие существование функции $x \in L^{k_m}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, для которой

$$M_{k_i}(x) = M_{k_i}, \quad i = 1, \ldots, m \tag{9.1.7}$$

(здесь и ниже $M_k(x) := \|x^{(k)}\|_\infty$). Сначала приведем решение этой задачи для $m = 3$.

Теорема 9.1.1. *Для того чтобы тройке чисел M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, $0 < k_1 < k_2 < k_3$, соответствовала функция $x \in L^{k_3}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, для которой*

$$M_{k_i}(x) = M_{k_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{9.1.8}$$

необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$M_{k_2} \le C_{k_3-k_1,k_2-k_1} M_{k_1}^{1-\frac{k_2-k_1}{k_3-k_1}} M_{k_3}^{\frac{k_2-k_1}{k_3-k_1}}, \tag{9.1.9}$$

где

$$C_{r,k} = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}.$$

Доказательство. Необходимость, как и в теореме Колмогорова (теорема 2.4.1), очевидна.

Докажем достаточность. Для $0 \le h \le \pi/2$ положим

$$\psi_{r,h}(t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_r(t+h) - \varphi_r(t-h)\right).$$

Рассмотрим семейство функций вида

$$y_{r;b,h}(t) = b^{-r} M_r \psi_{r,h}(bt).$$

Ясно, что

$$\|y_{k_3;b,h}\|_\infty = b^{-k_3} M_{k_3} \|\psi_{k_3,h}\|_\infty,$$

$$\|y^{(k_1)}_{k_3;b,h}\|_\infty = b^{-k_3+k_1} M_{k_3} \|\psi_{k_3-k_1;h}\|_\infty, \tag{9.1.10}$$

$$\|y^{(k_2)}_{k_3;b,h}\|_\infty = b^{-k_3+k_2} M_{k_3} \|\psi_{k_3-k_2;h}\|_\infty, \tag{9.1.11}$$

$$\|y^{(k_3)}_{k_3;b,h}\|_\infty = M_{k_3}. \tag{9.1.12}$$

Приравнивая правые части (9.1.10) и (9.1.11) к M_{k_1} и M_{k_2} соответственно, имеем

$$b = \left(\frac{M_{k_3} \|\psi_{k_3-k_1;h}\|_\infty}{M_{k_1}} \right)^{\frac{1}{k_3-k_1}} \tag{9.1.13}$$

и

$$M_{k_3} \left(\frac{M_{k_3} \|\psi_{k_3-k_1;h}\|_\infty}{M_{k_1}} \right)^{-\frac{k_3-k_2}{k_3-k_1}} \|\psi_{k_3-k_1;h}\|_\infty = M_{k_2}.$$

Из последнего соотношения получаем

$$\frac{\|\psi_{k_3-k_2;h}\|_\infty}{\|\psi_{k_3-k_1;h}\|_\infty^{\frac{k_3-k_2}{k_3-k_1}}} = \frac{M_{k_2}}{M_{k_1}^{\frac{k_3-k_2}{k_3-k_1}} M_{k_3}^{\frac{k_2-k_1}{k_3-k_1}}}. \tag{9.1.14}$$

Согласно условию (9.1.9) правая часть этого равенства не превосходит величины $C_{k_3-k_1,k_2-k_1}$. С другой стороны, левая часть непрерывно зависит от $h \in (0, \pi/2]$, причем при $h = \pi/2$ она, очевидно, равна $C_{k_3-k_1,k_2-k_1}$, а при $h \to 0$ стремится к нулю. Действительно, при $h \to 0$

$$\|\psi_{k_3-k_2,h}\|_\infty \asymp h,$$

$$\|\psi_{k_3-k_1,h}\|_\infty \asymp h,$$

следовательно,

$$\frac{\|\psi_{k_3-k_2;h}\|_\infty}{\|\psi_{k_3-k_1;h}\|_\infty^{\frac{k_3-k_2}{k_3-k_1}}} \to 0,$$

поскольку $\dfrac{k_3-k_2}{k_3-k_1} < 1$.

Таким образом, уравнение (9.1.14) относительно неизвестного h имеет решение (обозначим его h_0).

Ясно, что для функции $x(t) = y_{k_3;b,h_0}(t)$, где b выбрано из условия (9.1.13), справедливы соотношения (9.1.8). Теорема доказана.

Пусть теперь заданы положительные числа

$$M_{k_1}, \quad M_{k_2}, \quad M_{k_3},$$

удовлетворяющие неравенству (9.1.9). Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\|x\|_\infty \to \inf, \quad x \in L^{k_3}_{\infty,\infty}(\mathbf{R}), \qquad M_{k_j}(x) = M_{k_j}, \quad j = 1,2,3 \tag{9.1.15}$$

(отметим, что верхняя грань норм функций, удовлетворяющих ограничениям задачи (9.1.15), очевидно, равна $+\infty$). Согласно предыдущей теореме множество функций, удовлетворяющих ограничениям задачи (9.1.15), непусто. Кроме того, решение этой задачи, очевидно, существует. Обозначим $\Psi(M_1, M_2, M_3)$ – значение задачи (9.1.15).

Теорема 9.1.2. *Пусть заданы целые числа* $0 = k_0 < k_1 < k_2 < k_3$ *и положительные числа* $M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}$. *Для того чтобы нашлась функция* $x \in L^{k_3}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, *для которой*

$$M_{k_j}(x) = M_{k_j}, \quad j = 0,1,2,3,$$

необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:

1) *числа* M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3} *удовлетворяют неравенству* (9.1.9);

2) $$M_{k_0} \geq \Psi(M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}). \tag{9.1.16}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности обозначим x_0 – функцию из $L^{k_3}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, реализующую $\inf$ в задаче (9.1.15). Согласно условию 2 имеем

$$\|x_0\|_\infty \leq M_{k_0}.$$

Поэтому при подходящем $c \in \mathbf{R}$ функция $x_0(t) + c$ будет требуемой. Теорема доказана.

Таким образом, решение проблемы $(\mathcal{K})$ для четверок чисел M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3} сводится к решению экстремальной задачи (9.1.15).

Для заданных чисел M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, удовлетворяющих неравенству (9.1.9), выберем $b > 0$ и $h \in [0, \pi/2]$ так, чтобы для функции $y_{k_3;b,h}(t) = b^{-r} M_{k_3} \psi_{k_3,h}(bt)$ выполнялись соотношения

$$\|y^{(k_1)}_{k_3;b,h}\|_\infty = M_{k_1}, \quad \|y^{(k_2)}_{k_3;b,h}\|_\infty = M_{k_2}, \quad \|y^{(k_3)}_{k_3;b,h}\|_\infty = M_{k_3}$$

(возможность такого выбора была доказана при доказательстве теоремы 9.1.1). Положим

$$M_0(M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}) := \|y_{k_3;b,h}\|_\infty.$$

Теорема 9.1.3. *Если для чисел* M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2} *и* M_{k_3} *выполняются условия:*

1) M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3} *удовлетворяют неравенству* (9.1.9);

2) $$M_{k_0} \geq M_0(M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}), \tag{9.1.17}$$

то существует функция $x \in L^{k_3}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, *такая, что*

$$M_{k_j}(x) = M_{k_j}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Эта теорема сразу следует из теоремы 9.1.2 с учетом того, что из неравенства (9.1.17) вытекает неравенство (9.1.16).

Покажем, что в случае $k_3 = k_2 + 1$ достаточное условие из теоремы 9.1.3 является также необходимым.

Пусть для чисел M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3} $(k_3 = k_2 + 1)$ существует функция $x \in L^{k_3}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, такая, что

$$M_{k_j}(x) = M_{k_j}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Условие 1 теоремы 9.1.3 выполнено в силу неравенства Колмогорова. Докажем, что выполнено условие 2.

Рассуждая от противного, предполагаем, что

$$M_{k_0} < M_0(M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}) = \|y_{k_3;b,h}\|_\infty, \tag{9.1.18}$$

где $b > 0$ и $h > 0$ выбраны так, чтобы

$$M_{k_j}(y_{k_3;b,h}) = M_{k_j}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{9.1.19}$$

Тогда при подходящем $h_0 \in (0, h)$ имеем

$$M_{k_j}(y_{k_3;b,h_0}) = M_{k_j}, \quad j = 0, 2, 3. \tag{9.1.20}$$

Но тогда для функций x и $y_{k_3;b,h_0}$ выполнены условия теоремы сравнения производных (см. теорему 2.2.1), и, следовательно,

$$M_{k_1}(x) \le M_{k_1}(y_{k_3;b,h_0}) < M_{k_1}(y_{k_3;b,h}) = M_{k_1}$$

(неравенство $M_{k_1}(y_{k_3;b,h_0}) < M_{k_1}(y_{k_3;b,h})$ справедливо в силу того, что при $h, h_0 \in (0, \pi/2]$, $h_0 < h$, будет $\|\psi_{k_3,h_0}\|_\infty < \|\psi_{k_3,h}\|_\infty$). Но это противоречит тому, что для функции x $M_{k_1}(x) = M_{k_1}$. Необходимость условия 2 доказана.

Подытоживаем сказанное.

Теорема 9.1.4. *Пусть заданы целые $k_0 = 0 < k_1 < k_2 < k_3$ и положительные M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3} числа.*

Для существования функции $x \in L^{k_3}_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, такой, что

$$M_{k_j}(x) = M_{k_j}, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

достаточно, а в случае, когда $k_3 = k_2 + 1$, *и необходимо выполнение следующих условий:*

1) *числа* M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3} *удовлетворяют неравенству* (9.1.9);

2) $$M_{k_0} \geq M_0(M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}) = \|y_{k_3;b,h}\|_\infty.$$

Видим, что даже в случае четверки чисел вида M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_2+1} необходимые и достаточные условия разрешимости задачи $(\mathcal{K})$ являются весьма сложными. В более явном виде их можно записать только для малых гладкостей. Так, например (см. [160, 161]), для четверки M_0, M_1, M_2, M_3 проблема $(\mathcal{K})$ разрешима тогда и только тогда, когда

$$M_2 \leq (2M_1M_0)^{1/2} \quad \text{и} \quad M_0 \geq \frac{M_1^2}{2M_2} + \frac{M_1M_2}{2M_3} - \frac{M_2^2}{24M_3^2}.$$

В заключение данного параграфа приведем обобщение задачи $(\mathcal{K})$, в котором L_∞-нормы заменяются интегральными нормами. Точнее, пусть заданы целые числа

$$k_0 = 0 < k_1 < \ldots < k_m$$

и числа $p_0, p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty]$. Требуется найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять положительные числа

$$M_{k_0},\ M_{k_1}, \ldots, M_{k_m},$$

для того чтобы нашлась функция $x \in L^{k_m}_{\infty,\infty}(G)$ (G – числовая ось, полуось, окружность или конечный отрезок), для которой при всех $i = 0, 1, \ldots, m$

$$\left\|x^{(k_i)}\right\|_{p_i} = M_{k_i}.$$

Следует отметить, что эта задача является нетривиальной даже в случае троек чисел.

9.2. Точные неравенства для норм производных на оси

Ниже приведен перечень случаев решения задачи о точной константе $C_{r,k}(q,p,s)$ в неравенствах вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(\mathbf{R})} \le C_{r,k}(q,p,s)\,\|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{R})}\left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{R})}$$

для функций $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$, где q,p,s,r,k связаны соотношениями

$$\frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s} \le \frac{r-k}{r},$$

а

$$\alpha = \frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}.$$

Сначала напомним случаи, когда константа $C_{r,k}(q,p,s)$ известна для всех $k,r \in \mathbf{N}$; $k<r$:

1) $q=p=s=\infty$ (Ландау [233], Адамар [1], Шилов [357], Колмогоров [200]) (см. § 1.2 и § 2.3);

2) $q=p=s=2$ (Харди, Литлвуд, Полиа [327]) (см. § 1.6);

3) $q=p=s=1$ (Стейн [295]) (см. § 2.6);

4) $q=\infty$, $p=s=2$ (Тайков [310]) (см. § 5.7).

Теперь перечислим случаи, когда константа $C_{r,k}(q,p,s)$ найдена для некоторых частных значений k и r:

5) $r=2$, $k=1$; $q=2$, $p\in[1,\infty]$, $s=p/(p-1)$ (Харди, Литлвуд [327]) (см. § 1.5);

6) $r=1$, $k=0$; $q,p\in(0,\infty)$, $q>p$, $s\in[1,\infty)$ (Надь [266]) (см. § 2.10);

7) $r=2$, $k=0,1$; $q=s=\infty, p>0$ (Габушин [140]);

8) $r=2$, $k=1$ или $r=3$, $k=1,2$; $q=\dfrac{rp}{r-k}$, $p\ge 1-1/r$, $s=\infty$ (Габушин [140], Буслаев [127]);

9) $r=2$, $k=1$; $q\ge 2s$, $p=\infty$, $s\in[1,\infty]$ (Арестов [7]);

10) $r=3$, $k=1,2$; $q=p=\infty$, $s\in[1,\infty]$ (Арестов [7]);

11) $r=2$, $k=0$; $q=\infty$, $p\in[1,\infty]$, $s=1$ (Магарил-Ильяев [248]);

12) $r = 3$, $k = 1$; $q = \infty$, $p \in [1, \infty]$, $s = 1$ (Магарил-Ильяев [249]);

13) $r = 2k$, $k \in N$; $q = 2$, $p \in [1, \infty]$, $s = p/(p-1)$ (Соляр [294]) (см. § 5.9);

14) $r = 2$, $k = 1$; $q = \dfrac{2p}{p+1}$, $p \in [1, \infty]$, $s = 1$ (Арестов, Бердышев [18]);

15) $r = 4$, $k = 3$; $q = 4/3$, $p = s = \infty$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [85]);

16) $r = 6$, $k = 4, 5$; $q = \dfrac{r}{r-k}$, $p = 1$, $s = \infty$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [85]).

Приведем формулировки некоторых результатов 7–14, не вошедших в предыдущие главы.

Теорема 9.2.1 [133]. *Пусть* $1 \le p < \infty$; γ – *единственный на* $(0, 1/2]$ *корень уравнения* $\rho(v) = 0$, *где*

$$\rho(v) = 2^{p+1/2}(2p+1)\left(\int\limits_0^1 + \int\limits_0^{\tau(v)} + \int\limits_0^{\kappa(v)}\right)|1-t^2|^p dt -$$

$$-(1-v)^{p+1}v^{-p-1/2}(1+v)^{-1/2} + (1-v)^{p+1}(1+v)^{-1/2},$$

$$\tau(v) = \sqrt{1/2 + v/2}, \qquad \kappa(v) = \sqrt{1/2 + 1/(2v)}.$$

Пусть далее

$$\omega(v) = \sqrt{2}\left(\int\limits_0^{\tau(v)} |1-t^2|^p dt + v^{p+1/2}\int\limits_0^{\kappa(v)} |1-t^2|^p dt\right).$$

Тогда

$$C_{2,0}(\infty, p, \infty) = \left[(1-\gamma^{p+1/2})/(2\omega(\gamma))\right]^{2/(2p+1)}$$

и

$$C_{2,1}(\infty, p, \infty) =$$

$$= \sqrt{2}\left\{2\sqrt{2}\int\limits_0^1 (1-t^2)^p dt + \left(C_{2,0}(\infty, p, \infty)\right)^{-p-1/2}\right\}^{-\frac{1}{2p+1}}.$$

Теорема 9.2.2 [133]. *Пусть* $r = 2$, $k = 1$ *или* $r = 3$, $k = 1, 2$; $q = rp/(r-k)$, $p \geq 1 - 1/r$, $s = \infty$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_{p,\infty}(\mathbf{R})$ *справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq 2^{\frac{\alpha}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{L_q(\mathbf{T})}}{E_0\left(\varphi_r\right)^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})}} \|x\|_p^{\alpha} \left\|x^{(r)}\right\|_{\infty}^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$.

Теорема 9.2.3 [7]. *Пусть* $G = \mathbf{R}$ *или* $G = \mathbf{R}_+$, $1 \leq s < \infty$ *и* $2s \leq q \leq \infty$. *Тогда для любой функции* $x \in L^2_{\infty,s}(G)$ *справедливо точное неравенство*

$$\|x'\|_q \leq C_{2,1}(G; q, \infty, s)\|x\|_{\infty}^{\alpha}\|x''\|_s^{1-\alpha},$$

в котором $\alpha = 1 - (1-q^{-1})(2-s^{-1})$,

$$C_{2,1}(G; q, \infty, s) = \begin{cases} 2Q, & \text{если } G = \mathbf{R}_+, \\ 2^{\alpha}Q, & \text{если } G = \mathbf{R}, \end{cases}$$

где

$$Q = \left\{\frac{2s-1}{2s} H\left(\frac{2s-1}{s(q-1)}, \frac{s-1}{s}\right)\right\}^{\beta},$$

$$H(u,v) = \frac{z(u+v)}{z(u)z(v)},$$

$$z(u) := \begin{cases} u^{-u}\Gamma(1+u), & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u = 0. \end{cases}$$

В частности, для $x \in L^2_{\infty,s}(G)$, $G = \mathbf{R}_+$ *или* $G = \mathbf{R}$, $1 \leq s < \infty$ *выполнено точное неравенство*

$$\|x'\|_{\infty} \leq C_{2,1}(G; \infty, \infty, s)\|x\|_{\infty}^{\frac{s-1}{2s-1}}\|x''\|_s^{\frac{s}{2s-1}},$$

где

$$C_{2,1}(\mathbf{R}_+; \infty, \infty, s) = 2^{\frac{s-1}{2s-1}}\left(\frac{2s-1}{s}\right)^{\frac{s}{2s-1}};$$

$$C_{2,1}(\mathbf{R}; \infty, \infty, s) = 2^{-\frac{1}{2s-1}}\left(\frac{2s-1}{2s}\right)^{\frac{s}{2s-1}}.$$

Теорема 9.2.4 [7]. *Для* $\alpha \in [1,\infty)$, $t \in (-\infty,\infty)$ *положим*

$$\phi(t) = \phi(t,\alpha) = t^2 - 2t\frac{\alpha^{3s-2}}{\alpha^{3s-2}+1} + \frac{\alpha^{3s-3}(\alpha^{3s-2}-1)}{(\alpha^{3s-3}+1)(\alpha^{3s-2}+1)},$$

$$\psi(t) = \psi(t,\alpha) = |\phi(t,\alpha)|^{\frac{1}{s-1}}\mathrm{sgn}\phi(t,\alpha),$$

$$R(\alpha) = \int\limits_0^1 \left(t - \frac{1}{1+\alpha^2}\right)\psi(t,\alpha)dt.$$

Тогда для любого $s \in [1,\infty]$ *и для любой функции* $x \in L^3_{\infty,s}(\mathbf{R})$ *справедливо точное неравенство*

$$\|x''\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le C_{3,2}(\infty,\infty,s)\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{\frac{1-1/s}{3-1/s}}\|x'''\|_{L_s(\mathbf{R})}^{\frac{2}{3-1/s}},$$

где

$$C_{3,2}(\infty,\infty,s) = \frac{3-1/s}{(1-1/s)^{\frac{1-1/s}{3-1/s}}\phi(0)4^{\frac{2}{3-1/s}}}\frac{\left(\int\limits_0^1 |\phi(\tau)|^{\frac{s}{s-1}}d\tau\right)^{\frac{2-2/s}{3-1/s}}}{(1-\alpha^{1-3s})^{\frac{3-3/s}{3-1/s}}},$$

α *– наибольший нуль функции* R.

Теорема 9.2.5 [18]. *Пусть* $p \in (1,\infty)$. *Для функций* $x \in L^2_{p,1}(\mathbf{R})$ *выполняется точное неравенство*

$$\|x'\|_{L_{\frac{2p}{p+1}}(\mathbf{R})} \le (p+1)^{\frac{1}{2p}}\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}^{\frac{1}{2}}\|x''\|_{L_1(\mathbf{R})}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Положим, для краткости, $\|x\|_p = \|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$. Докажем, что выполняется точное неравенство

$$\|x'\|_{\frac{2p}{p+1}} \le (p+1)^{\frac{1}{2p}}\|x\|_p^{\frac{1}{2}}V(x')^{\frac{1}{2}} \tag{9.2.1}$$

для функций $x \in L_p(\mathbf{R})$, у которых производная имеет ограниченную вариацию $V(x')$ на всей оси (обозначим множество таких функций символом $L^1_{p,V}(\mathbf{R})$). Отсюда, очевидно, будет следовать утверждение теоремы. Пусть для функций $x \in L^1_{p,V}(\mathbf{R})$, $x \neq 0$, имеем

$$\Phi(x) := \frac{\|x'\|_{\frac{2p}{p+1}}}{\|x\|_p^{\frac{1}{2}} V(x')^{\frac{1}{2}}}, \tag{9.2.2}$$

$$K_p := \sup_{x \in L^1_{p,V}(\mathbf{R})} \Phi(x). \tag{9.2.3}$$

При вычислении верхней грани в (9.2.3) можно, во-первых, рассматривать лишь финитные функции x, во-вторых, сглаживая эти функции, можно считать, что в (9.2.3) функции x – бесконечно дифференцируемые. И, наконец, можно показать, что достаточно ограничиться функциями с конечным числом локальных экстремумов.

Для такой функции x пусть $\{a_k;\ k = 1, 2, \ldots\}$ – все последовательные точки перемены знака ее производной. Обозначим через x_k и x'_k сужение соответственно функций x и x' на отрезок $[a_k, a_{k+1}]$. Заметим, что x_k – монотонная, а x'_k – знакопостоянная функции.

Пусть далее

$$\beta_k := \|x'_k\|_\infty, \quad h_k := \|x'_k\|_\infty^{-1} |x(a_{k+1}) - x(a_k)|.$$

Очевидно, что $V(x'_k) \geq 2\beta_k$ и

$$V(x') = \sum_k V(x'_k) \geq 2 \sum_k \beta_k. \tag{9.2.4}$$

Покажем, что для любого $q \geq 1$

$$\|x'_k\|^q_{L_q[a_k, a_{k+1}]} \leq \beta_k^q h_k. \tag{9.2.5}$$

Для этого перестановку $r(x'_k, t)$ функции x'_k сравним с функцией $\psi_k(t) := \beta_k \cdot \chi_{[0,h_k]}(t)$. Обе эти функции совпадают в нуле и имеют

одинаковые интегралы, так как

$$\int\limits_0^{a_{k+1}-a_k} r(x_k', t)dt = \int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} |x_k'(t)|dt =$$

$$= |x(a_{k+1}) - x(a_k)| = \beta_k h_k = \int\limits_0^{h_k} \psi_k(t)dt.$$

Отсюда следует, что для всех $u \geq 0$

$$\int\limits_0^u r(x_k', t)dt \leq \int\limits_0^u \psi_k(t)dt,$$

а это, в свою очередь, влечет (9.2.5). Из (9.2.5) следует, что

$$\|x'\|_q = \left(\sum_k \|x_k'\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_k \beta_k^q h_k\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (9.2.6)$$

Теперь оценим $\|x_k\|_p$ снизу. Пусть для определенности x_k возрастает.

Рассмотрим случай $x_k(a_k) < 0$, $x_k(a_{k+1}) > 0$. К графику функции x_k сделаем дополнительные построения. Из точки графика $(a_k, x_k(a_k))$ проведем отрезок до встречи с горизонтальной осью (пусть это будет точка v) с угловым коэффициентом β_k. Ясно, что этот отрезок располагается выше соответствующего участка отрицательной части графика x_k. Далее, из точки $(a_{k+1} - (h_k - v), 0)$ проведем такой же отрезок до точки графика $(a_{k+1}, x_k(a_{k+1}))$, который расположится уже ниже соответствующего участка положительной части графика x_k. Отсюда следует, что

$$\|x_k\|_p^p \geq \min_{0 \leq v \leq h_k} \int\limits_{-v}^{h_k - v} |\beta_k t|^p dt = \int\limits_{-h_k/2}^{h_k/2} |\beta_k t|^p dt = \frac{\beta_k^p h_k^{p+1}}{2^p(p+1)}. \qquad (9.2.7)$$

Нетрудно провести подобные рассуждения и в случаях $\mathrm{sgn} x_k(a_k) = \mathrm{sgn} x_k(a_{k+1})$. Тогда из (9.2.7) выводим, что

$$\|x\|_p = \left(\sum_k \|x_k\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{2(p+1)^{1/p}} \left(\sum_k \beta_k^p h_k^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (9.2.8)$$

Теперь для оценки $\Phi(x)$ в (9.2.2) используем (9.2.4), (9.2.6) и (9.2.8):

$$\Phi(x) \leq \frac{\left(\sum\limits_k \beta_k^{\frac{2p}{p+1}} h_k\right)^{\frac{p+1}{2p}}}{2^{-1/2}(p+1)^{-\frac{1}{2p}} \left(\sum\limits_k \beta_k^p h_k^{p+1}\right)^{\frac{1}{2p}} \left(2\sum\limits_k \beta_k\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= (p+1)^{\frac{1}{2p}} \frac{\left(\sum\limits_k \left(\beta_k^{\frac{p}{p+1}} h_k\right) \beta_k^{\frac{p}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{2p}}}{\left(\sum\limits_k \beta_k^p h_k^{p+1}\right)^{\frac{1}{2p}} \left(\sum\limits_k \beta_k\right)^{\frac{1}{2}}} \leq (p+1)^{\frac{1}{2p}}.$$

На последнем шаге мы применили в числителе неравенство Гельдера с показателями $\left(p+1, \dfrac{p+1}{p}\right)$.

Неравенство (9.2.1) доказано. Для доказательства точности рассмотрим последовательность функций y_m, равных нулю вне $[-2m-1, 2m+1]$, линейных на отрезках $[-2m-1, -2m]$, $[2m, 2m+1]$, $[2k, 2k+2]$ для $k = -m, \ldots, m-1$, и $y_m(2k) = (-1)^k$. Имеем

$$V(y_m') = 4(m+1), \quad \|y_m\|_p = \left(\frac{4m+2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|y_m'\|_q = (4m+2)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда

$$\lim_{m\to\infty} \Phi(y_m) = (p+1)^{\frac{1}{2p}}.$$

Теорема доказана.

В заключение приведем два неравенства на оси, которые в отличие от всех предыдущих были получены из соответствующих периодических аналогов (см. теоремы 9.4.4 и 9.4.5) с помощью теоремы 4.5.2 о совпадении констант $C_{r,k}(\mathbf{R}; q, p, s)$ и $C_{r,k}(\mathbf{T}; q, p, s)$ на колмогоровском отрезке.

Теорема 9.2.6 [85]. *Пусть $r = 4$ и $k = 3$ или $r = 6$ и $k = 4, 5$. Пусть также $q_k = \dfrac{r}{r-k}$. Тогда для любой функции $x \in L^r_{1,\infty}(\mathbf{R})$ выполняется точное неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_{q_k}(\mathbf{R})} \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{L_{q_k}(\mathbf{T})}}{\|\varphi_r\|^{1-\frac{k}{r}}_{L_1(\mathbf{T})}} \|x\|^{1-\frac{k}{r}}_{L_1(\mathbf{R})} \left\|x^{(r)}\right\|^{\frac{k}{r}}_{L_\infty(\mathbf{R})}.$$

Теорема 9.2.7 [85]. *Для любой функции $x \in L^4_{\infty,1}(\mathbf{R})$ справедливо точное неравенство*

$$\|x'''\|_{L_{4/3}(\mathbf{R})} \le \frac{\|g_1\|_{L_{4/3}(\mathbf{T})}}{\|g_4\|^{\frac{1}{4}}_{L_\infty(\mathbf{T})}} \|x\|^{\frac{1}{4}}_{L_\infty(\mathbf{R})} \left\|x^{(4)}\right\|^{\frac{3}{4}}_{L_1(\mathbf{R})}.$$

9.3. Точные неравенства для норм производных на полуоси

Ниже приведен перечень случаев решения задачи о точной константе $C_{r,k}(q, p, s)$ в неравенствах вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(\mathbf{R}_+)} \le C_{r,k}(q, p, s) \|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{R}_+)} \left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{R}_+)}$$

для функций $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R}_+)$, где q, p, s, r, k связаны соотношениями

$$\frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s} \le \frac{r-k}{r},$$

а

$$\alpha = \frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}.$$

Сначала напомним случаи, когда константа $C_{r,k}(q,p,s)$ известна для всех $k,r \in \mathbf{N}$; $k<r$:

1) $q=p=s=\infty$ (Ландау [233], Маторин [255], Шенберг и Каваретта [355, 356], см. § 1.2, § 3.1 и § 3.3);

2) $q=p=s=2$ (Харди, Литлвуд, Полиа [327], см. § 1.6, Любич [245], Купцов [228], см. § 5.1 и § 5.12);

3) $q=\infty, p=s=2$ (Габушин [134], см. § 5.10).

Теперь перечислим случаи, когда константа $C_{r,k}(q,p,s)$ найдена для некоторых частных значений k и r:

4) $r=2, k=1$; $q \geq 2s$, $p=\infty, s \in [1,\infty]$ (Арестов [7]);

5) $r=2, k=1$; $q=p=s=1$ (Бердышев [107]);

6) $r=2, k=0,1$; $q=s=\infty, p>0$ (Магарил-Ильяев [246]);

7) $r=2, k=0$ или $r=3, k=1$; $q=\infty, p \in [1,\infty], s=1$ (Магарил-Ильяев [248, 249]);

8) $r=2, k=1$; $q=\dfrac{2p}{p+1}, p \in [1,\infty], s=1$ (Арестов, Бердышев [18]).

Некоторые из результатов 4 – 8 представлены в предыдущем параграфе (см. теорему 9.2.3). Приведем другие результаты.

Теорема 9.3.1 [7]. *Для $x \in L^3_{\infty,1}(\mathbf{R}_+)$ выполняется точное неравенство*

$$\|x'\|_\infty < 2\|x\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|x'''\|_1^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 9.3.2 [107]. *Если $x \in L^2_{1,1}(\mathbf{R}_+)$, то*

$$\|x'\|_1 \leq \sqrt{\frac{5}{2}}\|x\|_1^{\frac{1}{2}}\|x''\|_1^{\frac{1}{2}}. \tag{9.3.1}$$

Если $x \in L_1(\mathbf{R}_+)$, x локально абсолютно непрерывна и $\bigvee\limits_0^\infty(x') < \infty$, то

$$\|x'\|_1 \leq \sqrt{\frac{5}{2}}\|x\|_1^{\frac{1}{2}}\bigvee_0^\infty(x')^{\frac{1}{2}}. \tag{9.3.2}$$

Неравенства (9.3.1) *и* (9.3.2) *являются точными. Неравенство* (9.3.2) *обращается в равенство для любой функции вида (и толь-*

ко для функций такого вида)

$$x(t) = ax_*(bt), \qquad a \neq 0, \quad b > 0,$$

где функция $x_*(t)$ *непрерывна на* $[0, \infty)$, *линейна на отрезках* $[0, 3/4]$, $[i - 1/4, i + 3/4]$, *и принимает значения*

$$x_*(0) = -1, \quad x_*\left(i - \frac{1}{4}\right) = (-1)^{i-1}2^{-1}3^{1-i}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{9.3.3}$$

Неулучшаемость неравенства (9.3.1) *проверяется с помощью сглаживания функции* $x_*(t)$.

Доказательство. Приведем сначала подробное доказательство неравенства (9.3.1).

Для $t \in \mathbf{R}_+$ и $h > 0$ положим

$$S_h x(t) = \frac{1}{4h}\{(x(t + 3h) - x(t + h)) + (x(t + 2h) - x(t))\} =$$

$$= \frac{1}{4h}\left\{\int\limits_{t+h}^{t+3h} x'(\tau)d\tau + \int\limits_{t}^{t+2h} x'(\tau)d\tau\right\}, \tag{9.3.4}$$

если $t \in [0, h]$, и

$$S_h x(t) = \frac{1}{4h}\{(x(t + 3h) - x(t - h))\} = \frac{1}{4h}\int\limits_{t-h}^{t+3h} x'(\tau)d\tau, \tag{9.3.5}$$

если $t \geq h$.

Ниже покажем, что для любой функции $x \in L_{1,1}(\mathbf{R})$ справедливы оценки

$$\|S_h x\|_1 \leq \frac{1}{2h}\|x\|_1, \tag{9.3.6}$$

$$\|x' - S_h x\|_1 \leq \frac{5}{4}h\|x''\|_1. \tag{9.3.7}$$

Сопоставляя (9.3.6) и (9.3.7), получаем

$$\|x'\|_1 \le \|x' - S_h x\|_1 + \|S_h x\|_1 \le \frac{5}{4} h \|x''\|_1 + \frac{1}{2h} \|x\|_1,$$

и, следовательно,

$$\|x'\|_1 \le \min_{h>0} \left(\frac{5}{4} h \|x''\|_1 + \frac{1}{2h} \|x\|_1 \right) = \left(\frac{5}{2} \|x\|_1 \|x''\|_1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

и неравенство (9.3.1) будет доказано.

Докажем справедливость оценки (9.3.6). Используя (9.3.4) и (9.3.5), имеем

$$\|S_h x\|_1 = \int_0^\infty |S_h x(t)| dt = \int_0^h |S_h x(t)| dt + \int_h^\infty |S_h x(t)| dt =$$

$$= \frac{1}{4h} \int_0^h |x(t+3h) - x(t+h) + x(t+2h) - x(t)| dt +$$

$$+ \frac{1}{4h} \int_h^\infty |x(t+3h) - x(t-h)| dt \le$$

$$\le \frac{1}{4h} \left\{ \int_0^h |x(t+3h)| dt + \int_0^h |x(t+h)| dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^h |x(t+2h)| dt + \int_0^h |x(t)| dt \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4h} \left\{ \int_h^\infty |x(t+3h)| dt + \int_h^\infty |x(t-h)| dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{4h}\left\{\left(\int\limits_{4h}^{\infty}+\int\limits_{0}^{\infty}+\int\limits_{3h}^{4h}+\int\limits_{h}^{2h}+\int\limits_{2h}^{3h}+\int\limits_{0}^{h}\right)|x(t)|dt\right\}=$$

$$= \frac{1}{4h}2\int\limits_{0}^{\infty}|x(t)|dt = \frac{1}{2h}\|x\|_1,$$

и оценка (9.3.6) доказана.

Докажем справедливость оценки (9.3.7). Используя (9.3.4) и (9.3.5), имеем

$$4h\|x'-S_hx\|_1 = 4h\left\{\left(\int\limits_{0}^{h}+\int\limits_{h}^{\infty}\right)|x'(t)-S_hx(t)|dt\right\}=$$

$$= 4h\int\limits_{0}^{h}\left|x'(t)-\frac{1}{4h}\int\limits_{t+h}^{t+3h}x'(\tau)d\tau-\frac{1}{4h}\int\limits_{t}^{t+2h}x'(\tau)d\tau\right|dt+$$

$$+4h\int\limits_{h}^{\infty}\left|x'(t)-\frac{1}{4h}\int\limits_{t-h}^{t+3h}x'(\tau)d\tau\right|dt=$$

$$= \int\limits_{0}^{h}\left|\int\limits_{t+h}^{t+3h}(x'(t)-x'(\tau))d\tau+\int\limits_{t}^{t+2h}(x'(t)-x'(\tau))d\tau\right|dt+$$

$$+\int\limits_{h}^{\infty}\left|\int\limits_{t-h}^{t+3h}(x'(t)-x'(\tau))d\tau\right|dt\le$$

$$\le\left(\int\limits_{h}^{\infty}\int\limits_{t-h}^{t+3h}+\int\limits_{0}^{h}\int\limits_{t+h}^{t+3h}+\int\limits_{0}^{h}\int\limits_{t}^{t+2h}\right)|x'(t)-x'(\tau)|d\tau dt=$$

$$= \left(\int\limits_h^\infty \int\limits_{t-h}^t + \int\limits_h^\infty \int\limits_t^{t+3h} + \int\limits_0^h \int\limits_{t+h}^{t+3h} + \int\limits_0^h \int\limits_t^{t+h} + \int\limits_0^h \int\limits_{t+h}^{t+2h} \right) |x'(t) - x'(\tau)| d\tau dt =$$

$$= \left(\int\limits_h^\infty \int\limits_{t-h}^t + \int\limits_0^\infty \int\limits_t^{t+3h} + \int\limits_0^h \int\limits_{t+h}^{t+2h} \right) |x'(t) - x'(\tau)| d\tau dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим I_1:

$$I_1 \le \int\limits_h^\infty \int\limits_{t-h}^t \int\limits_\tau^t |x''(\xi)| d\xi d\tau dt = \int\limits_h^\infty \int\limits_{t-h}^t \int\limits_{\tau-t}^0 |x''(u+t)| du d\tau dt =$$

$$= \int\limits_h^\infty \int\limits_{-h}^0 \int\limits_v^0 |x''(u+t)| du dv dt =$$

$$= \int\limits_{-h}^0 \int\limits_0^v \int\limits_h^\infty |x''(u+t)| dt du dv \le \int\limits_{-h}^0 \int\limits_0^v du dv \|x''\|_1 = \frac{h^2}{2} \|x''\|_1.$$

Таким образом, имеем

$$I_1 \le \frac{h^2}{2} \|x''\|_1. \tag{9.3.8}$$

Оценим I_2:

$$I_2 \le \int\limits_0^\infty \int\limits_t^{t+3h} \int\limits_t^\tau |x''(\xi)| d\xi d\tau dt = \int\limits_0^\infty \int\limits_t^{t+3h} \int\limits_0^{\tau-t} |x''(u+t)| du d\tau dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{3h} \int\limits_0^v |x''(u+t)| du dv dt =$$

$$= \int\limits_0^{3h} \int\limits_0^v \int\limits_0^\infty |x''(u+t)| dt du dv = \int\limits_0^{3h} \int\limits_0^v \left(\|x''\|_1 - \int\limits_0^u |x''(z)| dz \right) du dv.$$

Таким образом, имеем

$$I_2 \le \frac{9h^2}{2}\|x''\|_1 - \int\limits_0^{3h}\int\limits_0^{v}\int\limits_0^{u}|x''(z)|dzdudv. \tag{9.3.9}$$

Наконец, получаем

$$I_3 \le \int\limits_0^{h}\int\limits_{t+h}^{t+2h}\int\limits_{t}^{\tau}|x''(\xi)|d\xi d\tau dt = \int\limits_0^{h}\int\limits_{t+h}^{t+2h}\int\limits_{0}^{\tau-t}|x''(u+t)|dud\tau dt =$$

$$= \int\limits_0^{h}\int\limits_{h}^{2h}\int\limits_{0}^{v}|x''(u+t)|dudvdt =$$

$$= \int\limits_h^{2h}\int\limits_0^{v}\int\limits_0^{h}|x''(u+t)|dtdudv = \int\limits_h^{2h}\int\limits_0^{v}\int\limits_u^{u+h}|x''(z)|dzdudv =$$

$$= \int\limits_h^{2h}\int\limits_0^{v}\int\limits_{w-h}^{w}|x''(z)|dzdwdv \le \int\limits_0^{3h}\int\limits_0^{v}\int\limits_0^{w}|x''(z)|dzdwdv,$$

т. е.

$$I_3 \le \int\limits_0^{3h}\int\limits_0^{v}\int\limits_0^{w}|x''(z)|dzdwdv. \tag{9.3.10}$$

Таким образом, с учетом неравенств (9.3.8)–(9.3.10) получим

$$4h\|x' - S_h x\|_1 \le I_1 + I_2 + I_3 \le$$

$$\le \left(\frac{h^2}{2}\|x''\|_1 + \frac{9h^2}{2}\|x''\|_1 - \int\limits_0^{3h}\int\limits_0^{v}\int\limits_0^{u}|x''(z)|dzdudv\right) +$$

$$+ \int\limits_0^{3h}\int\limits_0^{v}\int\limits_0^{w}|x''(z)|dzdwdv = 5h^2\|x''\|_1,$$

и оценка (9.3.7) доказана. Доказательство неравенства (9.3.1) завершено.

Для доказательства неравенства (9.3.2) вместо оценки (9.3.7) нам понадобится следующая оценка:

$$\|x' - S_h x\|_1 \le \frac{5}{4} h \bigvee_0^\infty (x'), \tag{9.3.11}$$

справедливая для любой локально абсолютно непрерывной функции $x \in L_1(\mathbf{R}_+)$, такой, что $\bigvee_0^\infty (x') < \infty$.

Эта оценка может быть доказана в существенном аналогично оценке (9.3.7). Имеем

$$4h\|x' - S_h x\|_1 \le \left(\int_h^\infty \int_{t-h}^{t+3h} + \int_0^h \int_{t+h}^{t+3h} + \int_0^h \int_t^{t+2h} \right) |x'(t) - x'(\tau)| d\tau dt \le$$

$$\le \left(\int_h^\infty \int_{t-h}^{t} + \int_h^\infty \int_t^{t+3h} + \int_0^h \int_{t+h}^{t+3h} + \int_0^h \int_t^{t+h} + \int_0^h \int_{t+h}^{t+2h} \right) \bigvee_t^\tau x'(\xi) d\tau dt =$$

$$= \left(\int_h^\infty \int_{t-h}^{t} + \int_0^\infty \int_t^{t+3h} + \int_0^h \int_{t+h}^{t+2h} \right) \bigvee_t^\tau (x'(\cdot)) d\tau dt =$$

$$= \left(\int_0^\infty \int_0^{3h} + \int_h^\infty \int_{-h}^{0} + \int_0^h \int_h^{2h} \right) \bigvee_0^\tau (x'(\cdot + t)) d\tau dt =$$

$$= \left(\int_0^{3h} \int_0^{\tau} \bigvee_0^\infty + \int_{-h}^{0} \int_\tau^{0} \bigvee_h^\infty + \int_h^{2h} \int_0^{\tau} \bigvee_0^h \right) (x'(\xi + \cdot)) d\xi d\tau =$$

$$= \left(\int_0^{3h} \int_0^{\tau} \bigvee_0^\infty - \int_0^{3h} \int_0^{\tau} \bigvee_0^\xi + \int_{-h}^{0} \int_\tau^{0} \bigvee_{h+\xi}^\infty + \int_h^{2h} \int_0^{\tau} \bigvee_\xi^{h+\xi} \right) (x'(\cdot)) d\xi d\tau.$$

Поскольку

$$\int_0^{3h}\int_0^{\tau}\bigvee_0^{\infty}(x'(\cdot))d\xi d\tau = \frac{9h^2}{2}\bigvee_0^{\infty}(x'),$$

$$\int_{-h}^{0}\int_{\tau}^{0}\bigvee_{h+\xi}^{\infty}(x'(\cdot))d\xi d\tau \le \frac{h^2}{2}\bigvee_0^{\infty}(x')$$

и

$$\int_h^{2h}\int_0^{\tau}\bigvee_{\xi}^{h+\xi}(x'(\cdot))d\xi d\tau \le \int_0^{3h}\int_0^{\tau}\bigvee_0^{\infty}(x'(\cdot))d\xi d\tau,$$

то

$$\|x' - S_h x\|_1 \le \frac{5}{8}2h\bigvee_0^{\infty}(x'),$$

и оценка (9.3.11) доказана.

Теперь согласно (9.3.6) и (9.3.11) для любого $h > 0$ имеем

$$\|x'\|_1 \le \|x' - S_h x\|_1 + \|S_h x\|_1 \le \frac{5}{4}h\bigvee_0^{\infty}(x') + \frac{1}{2h}\|x\|_1$$

и, следовательно,

$$\|x'\|_1 \le \min_{h>0}\left(\frac{5}{4}h\bigvee_0^{\infty}(x') + \frac{1}{2h}\|x\|_1\right) = \left(\frac{5}{2}\|x\|_1\bigvee_0^{\infty}(x')\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство (9.3.2) доказано.

Тот факт, что неравенство (9.3.2) обращается в равенство для функции $x_*(t)$ и, следовательно, для любой функции вида $x(t) = ax_*(bt)$, $a \ne 0$, $b > 0$, проверяется простым вычислением. Сглаживая функцию $x_*(t)$, скажем, рассматривая функцию Стеклова от $x_*(t)$

$$(x_*)_h(t) := \frac{1}{h}\int_t^{t+h} x_*(u)du$$

с достаточно малым $h > 0$, нетрудно убедиться в неулучшаемости неравенства (9.3.1). На доказательстве того, что (9.3.2) обращается в равенство только для функций вида $x(t) = ax_*(bt)$, $a \neq 0$, $b > 0$, останавливаться не будем.

9.4. Точные неравенства для норм производных на окружности

Ниже приведен перечень случаев решения задачи о точной константе $C_{r,k}(q,p,s)$ в неравенствах вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(\mathbf{T})} \leq C_{r,k}(q,p,s)\,\|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})}\left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})}$$

для функций $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})$, где

$$\alpha = \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}\right\}.$$

Сначала отметим случаи, когда константа $C_{r,k}(q,p,s)$ известна для всех $k, r \in \mathbf{N}$; $k < r$:

1) $q = p = s = \infty$ (Ландау [233], Адамар [1], Шилов [357], Колмогоров [200], см. § 1.2 и § 2.3);

2) $q = p = s = 2$ (Харди, Литлвуд, Полиа [327], см. § 1.6);

3) $q = p = s = 1$ (Стейн [295], см. § 2.6);

4) $q \in [1,\infty)$, $p = s = \infty$ (Лигун [237], см. § 6.2);

5) $q = p = \infty$, $s = 1$ (Лигун [214, часть 6]);

6) $q = \infty$, $p = s = 2$ (Шадрин [341], см. § 5.8);

7) $q = \infty$, $p \in [1,\infty)$, $s = \infty$ или $s = 1$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [63], см. § 6.4 и § 6.5);

8) $q = p = 2$, $s = 1$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [84], см. § 6.6);

9) $r > 3$; $q = p = 1$, $s = \infty$ (Кофанов [223]).

В следующих двух случаях константа $C_{r,k}(q,p,s)$ известна для любых $k, r \in \mathbf{N}$; $r/2 < k < r$.

10) $q = 2$, $p \in [1,\infty)$, $s = 1$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [63], см. § 6.5);

11) $r > 3$; $q = 2$, $p = 1$, $s = \infty$ (Кофанов [223]).

Константа $C_{r,0}(q,p,s)$ известна для любого $r \in \mathbf{N}$ в следующих случаях:

12) $q,p \in (0,\infty]$, $q > p$, $s = \infty$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [82], см. § 6.8).

Наконец, приведем случаи, когда константа $C_{r,k}(q,p,s)$ найдена для некоторых частных значений k и r:

13) $r = 1$, $k = 0$; $q,p \in (0,\infty]$, $q > p$, $s \in [1,\infty)$ (см. § 2.11);

14) $r = 1,3$, $k = 1$; $q \in [1,\infty]$, $p \in (0,\infty)$, $s = \infty$ или $r = 3$, $k = 2$; $q \in [1,\infty]$, $p \in [1/3,\infty)$, $s = \infty$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [81]);

15) $r = 2$, $k = 1$; $q,p \in [1,\infty]$, $s = 1$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [84]);

16) $r = 4$, $k = 3$ или $r = 6$, $k = 4,5$; $q \in [1,\infty]$, $p = s = 1$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [71]);

17) $r = 3$, $k = 1$; $q \geq 2p$, $p \in [1,\infty)$, $s = 1$ или $r = 4$, $k = 1$; $q \geq 3p/2$, $p \in [1,\infty)$, $s = 1$, или $r = 4$, $k = 2$; $q \geq 3p$, $p \in [1,\infty)$, $s = 1$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [41]);

18) $r = 2$, $k = 1$ или $r = 3$, $k = 1,2$; $q = p = \infty$, $s \in [1,\infty]$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [71]);

19) $r \geq 5$, $k = r-1$; $q \in [4/3,2]$, $p \in [1,\infty]$, $s = 1$ или $r \geq 7$, $k = r-2$; $q \geq 4$, $p \in [1,\infty]$, $s = 1$, или $r \geq 9$, $k = r-3$; $q \geq 3$, $p \in [1,\infty]$, $s = 1$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [71]);

20) $r \in \mathbf{N}$, $k = r-1$; $q \in [1,2]$, $p = s = 1$ или $k = r-2$; $q \geq 2$, $p = s = 1$, или $k = r-3$; $q \geq 3/2$, $p = s = 1$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов [71]);

21) $r > 3$, $k = r-1$; $q \in [1,3]$, $p = 1$, $s = \infty$ или $k = r-2$; $q \in [1,3/2]$, $p = 1$, $s = \infty$ (Кофанов [223]).

Приведем некоторые результаты 9 – 21, не вошедшие в предыдущие главы. Положим для краткости $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(\mathbf{T})}$.

Теорема 9.4.1 [223]. *Пусть $k,r \in \mathbf{N}$, $r > 3$, $k < r$. Тогда для функций $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ справедливо точное неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_1 \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_1}{\|\varphi_r\|_1^{1-k/r}} \|x\|_1^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r},$$

а в случае $r/2 < k < r$ выполнено также точное неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_2}{\|\varphi_r\|_1^{1-k/r}} \|x\|_1^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}.$$

При $r = 2, 3$ неравенства из предыдущей теоремы являются частными случаями следующего результата.

Теорема 9.4.2 [81]. *Пусть $q \in [1, \infty]$ и $r = 2, 3$, $k = 1$; $p \in (0, \infty]$ или $r = 3$, $k = 2$; $p \in [1/3, \infty]$.*

Тогда для функций $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{9.4.1}$$

где

$$\alpha = \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r - k + 1/q}{r + 1/p}\right\}.$$

Неравенство (9.4.1) *обращается в равенство для функций вида $x(t) = a(\varphi_r(t + t_0)) - c_p$, где $a, t, t_0 \in \mathbf{R}$, если $q > \dfrac{p}{1 - k/r}$, и для функций вида $x(t) = a(\varphi_r(nt + t_0)) - c_p$ при любом $n \in \mathbf{N}$, если $q \le \dfrac{p}{1 - k/r}$, где $c_p = c_p(\varphi_r)$.*

Аналогичное неравенство на оси представлено в теореме 9.2.2 для q, связанных с p равенством $q = \dfrac{rp}{r - k}$.

Теорема 9.4.3 [84]. *При всех $q, p \in [1, \infty]$ для функций $x \in L^2_1(\mathbf{T})$ справедливо точное неравенство*

$$\|x'\|_q \le \sup_{\gamma+\delta=1/2} \frac{\|\varphi_0(\cdot;\gamma,\delta)\|_q}{\|\varphi_1(\cdot;\gamma,\delta)\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \|x''\|_1^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{p}{q(p+1)}\right\}$.

Аналогичное неравенство на оси представлено в теореме 9.2.5 для q, связанных с p равенством $q = \dfrac{2p}{p+1}$.

Теорема 9.4.4 [71]. *Пусть* $r = 4$, $k = 3$ *или* $r = 6$, $k = 4, 5$; $q \in [1, \infty]$. *Тогда для функций* $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ *справедливо точное неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_1^\alpha} \|x\|_1^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha},$$

где

$$\alpha = \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r-k+1/q}{r+1}\right\}.$$

Теорема 9.4.5 [41]. *Пусть* $p \in [1, \infty)$ *и* $r = 3$ *или* $r = 4$. *Пусть также* $k = 1$ *и* $q \ge 2p$, *если* $r = 3$, *и* $k = 1$, $q \ge 3p/2$, *или* $k = 2$, $q \ge 3p$, *если* $r = 4$. *Тогда для функций* $x \in L^r_1(\mathbf{T})$ *выполняется неулучшаемое неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|g_{r-k}\|_q}{\|g_r\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_1^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r-k-1+1/q}{r-1+1/p}$.

Теорема 9.4.6 [75]. *Пусть* $s \in (1, \infty)$. *Тогда для функций* $x \in L^2_s(\mathbf{T})$ *справедливо неравенство*

$$\|x'\|_\infty \le 2^{\frac{1-s'}{1+s'}} \left(\frac{s'+1}{s'}\right)^{\frac{s'}{s'+1}} E_0(x)_\infty^\alpha E_0(x'')_s^{1-\alpha}$$

с показателем $\alpha = \dfrac{1}{s'+1}$, *а для функций* $x \in L^3_s(\mathbf{T})$ *выполнено неравенство*

$$E_0(x')_\infty \le 2^{\frac{2-3s'}{2s'+1}} \frac{(2s'+1)^{\frac{2s'}{2s'+1}}}{(s')^{\frac{s'}{2s'+1}} (s'+1)^{\frac{s'+1}{2s'+1}}} E_0(x)_\infty^{\alpha_1} E_0(x''')_s^{1-\alpha_1},$$

где $\alpha_1 = \dfrac{2-1/s}{3-1/s} = \dfrac{1+1/s'}{2+1/s'}$. *Оба неравенства неулучшаемы.*

Аналогичные неравенства на оси представлены в теоремах 9.2.3 и 9.2.4.

Теорема 9.4.7 [71]. *Пусть* $q, p \in (1, \infty]$, $r \in \mathbf{N}$ *и* $k = r - 1$, $k = r - 2$ *или* $k = r - 3$, *причем* $4/3 \le q \le 2$, *и* $r \ge 5$, *если* $k = r - 1$; $q \ge 4$, *и* $r \ge 7$, *если* $k = r - 2$; $q \ge 3$ *и* $r \ge 9$, *если* $k = r - 3$. *Тогда для функций* $x \in L_1^r(\mathbf{T})$ *справедливо точное неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|g_{r-k}\|_q}{\|g_r\|_p}^{\alpha} \|x\|_p^{\alpha} \left\|x^{(r)}\right\|_1^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r - k - 1 + 1/q}{r - 1 + 1/p}$.

Теорема 9.4.8 [71]. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$ *и* $k = r - 1$, $k = r - 2$ *или* $k = r - 3$, *причем* $1 \le q \le 2$, *если* $k = r - 1$; $q \ge 2$, *если* $k = r - 2$, *и* $q \ge 3/2$, *если* $k = r - 3$. *Тогда для функций* $x \in L_1^r(\mathbf{T})$ *справедливо точное неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|g_{r-k}\|_q}{\|g_r\|_1^{\alpha}} \|x\|_1^{\alpha} \left\|x^{(r)}\right\|_1^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r - k - 1 + 1/q}{r}$.

Теорема 9.4.9 [223]. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r > 3$; $x \in L_\infty^r$. *Для любого* $q \in [1, 3]$ *справедливо неравенство*

$$\left\|x^{(r-1)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_1\|_q}{\|\varphi_r\|_1^{1/r}} \|x\|_1^{1/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-1/r},$$

а для $q \in [1,\, 3/2]$ *выполнено неравенство*

$$\left\|x^{(r-2)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_2\|_q}{\|\varphi_r\|_1^{2/r}} \|x\|_1^{2/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-2/r}.$$

Оба неравенства точные.

9.5. Об аддитивных неравенствах на отрезке

В данном параграфе приведены некоторые дополнительные результаты об аддитивных неравенствах вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le A\,\|x\|_p + B\left\|x^{(r)}\right\|_s \tag{9.5.1}$$

и их аналогах, где для краткости положено $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p[-1,1]}$.

Напомним, что в теореме 4.6.2 было установлено, что минимальная константа $A = A^*_{r,k}(q,p,s)$ при норме функции в неравенстве (9.5.1) связана с минимальной константой $M = M^*_{r,k}(q,p)$ в неравенстве

$$\left\|P^{(k)}_{r-1}\right\|_{L_q[-1,1]} \le M\,\|P_{r-1}\|_{L_p[-1,1]} \tag{9.5.2}$$

типа Маркова–Никольского для алгебраических полиномов P_{r-1} степени не выше $r-1$ равенством

$$A^*_{r,k}(q,p,s) = M^*_{r,k}(q,p). \tag{9.5.3}$$

Отметим, что для случая $k = r-1$ соотношение (9.5.3) доказано В.И. Буренковым [123, 124], а в случае $q = p = s = \infty$ задача о нахождении пар (A,B) точных констант изучалась в работах А.Ю. Шадрина [342, 343].

Как известно (см., например, [211, с. 151]), $M^*_{r,k}(\infty,\infty) = \left\|T^{(k)}_{r-1}\right\|_\infty$, где $T_{r-1}(x) = \cos(n-1)\arccos t$, $t \in [-1,1]$ – полином Чебышева 1-го рода степени $r-1$. Учитывая, что

$$\left\|T^{(k)}_{r-1}\right\|_\infty = \frac{(r-1)^2[(r-1)^2-1]\dots[(r-1)^2-(k-1)^2]}{(2k-1)!!},$$

из теоремы 4.6.2 получаем следующее утверждение.

Теорема 9.5.1. *Для любых $r,k \in \mathbf{N}$, $k \le r-1$, для любого $r \in [1,\infty]$ и для любой функции $x \in L^r_s(-1,1)$ выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le$$

$$\leq \frac{(r-1)^2[(r-1)^2-1]\dots[(r-1)^2-(k-1)^2]}{(2k-1)!!}\|x\|_\infty + B_{r,k}\left\|x^{(r)}\right\|_s,$$

в котором при фиксированных r и k константа при $\|x\|_\infty$ неуменьшаема, а константа $B_{r,k}$ не зависит от x.

Используя вместо неравенства (9.5.2) (при $p=q=\infty$) его уточнение (см. [258] и [347])

$$\left\|P_{r-1}^{(k)}\right\|_\infty \leq \left\|T_{r-1}^{(k)}\right\|_\infty \max_k |P_{r-1}(t_k)|,$$

где $t_k = \cos\dfrac{k\pi}{r-1}$, $k=0,1,\dots,r-1$, легко убедиться, что в условиях предыдущей теоремы справедливо неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{(r-1)^2[(r-1)^2-1]\dots[(r-1)^2-(k-1)^2]}{(2k-1)!!}\times$$

$$\times \max_k |x(t_k)| + B_{r,k}\left\|x^{(r)}\right\|_r$$

с неуменьшаемой постоянной при $\max\limits_k |x(t_k)|$.

Точное значение константы $M_{r,k}^*(1,1)$ неизвестно. Однако С.В. Конягин [204] показал, что существуют абсолютные константы $0<c_1<c$, такие, что

$$c_1\frac{(r-1)T_{r-1}^{(k)}(1)}{(k+1)(r-k)} \leq M_{r,k}^*(1,1) \leq c\frac{(r-1)T_{r-1}^{(k)}(1)}{(k+1)(r-k)}. \qquad (9.5.4)$$

Учитывая (9.5.4), из теоремы 4.6.2 выводим следующее утверждение.

Теорема 9.5.2. *Для любых $r,k\in\mathbf{N}$, $k<r$, любого $s\in[1,\infty]$ и любой функции $x\in L_s^r(-1,1)$ справедливо неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_1 \leq c\frac{(r-1)T_{r-1}^{(k)}(1)}{(k+1)(r-k)}\|x\|_1 + B_{r,k}\left\|x^{(r)}\right\|_s$$

с абсолютной константой c и некоторой, не зависящей от x, константой $B_{r,k}$.

Из результатов работы [230] следует, что

$$M_{r,k}(\infty,2)=\frac{(2k-1)!!(r+k)}{\sqrt{2(2k+1)}}\left(\frac{r+k-1}{r-k-1}\right). \tag{9.5.5}$$

Учитывая (9.5.5), с помощью теоремы 4.6.2 получаем такое утверждение.

Теорема 9.5.3. *Для любых $r,k\in\mathbf{N}$, $\quad k<r$, любого $s\in[1,\infty]$ и любой функции $x\in L_s^r(-1,1)$ справедливо неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty\le\frac{(2k-1)!!(r+k)}{\sqrt{2(2k+1)}}\left(\frac{r+k-1}{r-k-1}\right)\|x\|_2+B_{r,k}\left\|x^{(r)}\right\|_s$$

с неуменьшаемой константой при $\|x\|_2$ и некоторой, не зависящей от x, константой $B_{r,k}$.

В случае произвольного $q\in[1,\infty]$ и $p=\infty$, как показал В.Д. Боянов [116], точная константа $M_{r,1}^*(q,\infty)$ в неравенстве (9.5.2) равна $\left\|T_{r-1}'\right\|_q$. Поэтому справедливо утверждение.

Теорема 9.5.4. *Для любых $q,s\in[1,\infty]$ и любой функции $x\in$ $\in\ L_s^r(-1,1)$ выполняется неравенство*

$$\left\|x'\right\|_q\le\left\|T_{r-1}'\right\|_q\|x\|_\infty+B_r\left\|x^{(r)}\right\|_s,$$

в котором константа $\left\|T_{r-1}'\right\|_q$ неулучшаема (при любом фиксированном r).

Используя другие известные результаты о точных постоянных в неравенствах типа Маркова–Никольского (см., например, [211, 258]), можно легко продолжить список следствий из теоремы 4.6.2, в том числе и для норм в некоторых весовых пространствах L_p.

Покажем, что теорему 9.5.1 можно уточнить (ограничимся случаем $k=1$). Используя вместе с неравенством Маркова следующее

неравенство Бернштейна (см., например, [211, с. 147]): для любого $P_r \in \pi_r$ при любом фиксированном $t \in (-1,1)$

$$\left|P_r'(t)\right| \le \frac{r\,\|P_r\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{9.5.6}$$

приходим к оценке

$$\left|P_r'(t)\right| \le \min\left\{\left\|T_r'\right\|_\infty, \frac{r}{\sqrt{1-t^2}}\right\}\|P_r\|_\infty. \tag{9.5.7}$$

Полагая в теореме 4.6.1

$$X = C_{[-1,1]}, \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty, \quad Y = \mathbf{R},$$

$$\|\cdot\|_Y = |\cdot|, \quad Tx = x', \quad F(x) = \left\|x^{(r)}\right\|_s, \quad s \in [1,\infty],$$

видим, что условие 1.1 этой теоремы выполнено ввиду (9.5.7). Условие 1.2 также выполнено, поскольку аналогично доказательству теоремы 4.6.2 с помощью формулы Тейлора с остатком в интегральной форме для $x \in L_s^r(-1,1)$ может быть получена оценка

$$\inf_{y\in\pi_{r-1}}\left\{\min\left\{\left\|T_{r-1}'\right\|_\infty, (r-1)(1-t^2)^{-1/2}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\|x-y\|_\infty + \left\|x'-y'\right\|_\infty\right\} \le$$
$$\le \inf_{y\in\pi_{r-1}}\left\{(r-1)^2\|x-y\|_\infty + \left\|x'-y'\right\|_\infty\right\} \le B_{r,1}\left\|x^{(r)}\right\|_s,$$

где $B_{r,1}$ удовлетворяет неравенству

$$B_{r,1} \le \frac{2^{r+1}(r-1)}{(r-2)!} + \frac{2^r}{(r-2)!}. \tag{9.5.8}$$

Таким образом, справедлива такая теорема.

Теорема 9.5.5. *Пусть $r \ge 2$, $t \in (-1,1)$ – фиксировано. Тогда для любой функции $x \in L_s^r(-1,1)$ выполняется неравенство*

$$\left|x'(t)\right| \le \min\{(r-1)^2, (r-1)(1-t^2)^{-1/2}\}\|x\|_\infty + B_{r,1}\left\|x^{(r)}\right\|_s,$$

где для $B_{r,1}$ справедлива оценка (9.5.8).

Теорема 4.6.2 и теоремы 9.5.1–9.5.5 были получены с помощью простейших фактов об оценках совместного приближения, вытекающих из формулы Тейлора. Сейчас приведем некоторые неравенства, которые устанавливаются с помощью более глубоких результатов по совместному приближению алгебраическими полиномами функции и ее производных.

Пусть

$$x \in C_{[-1,1]}, \quad \triangle_h^1 x(t) = x\left(t + \frac{h}{2}\right) - x\left(t - \frac{h}{2}\right),$$

$$\triangle_h^l x(t) = \triangle_h^1(\triangle_h^{l-1} x(t))$$

(как обычно, будем считать, что $\triangle_h^l x(t) = 0$, если хотя бы одна из точек $t \pm l\dfrac{h}{2}$ не принадлежит $[-1,1]$). Пусть также $\varphi(t) = \sqrt{1-t^2}$ и

$$\rho_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \varphi(t)\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-t^2}.$$

При $0 \le \lambda \le 1$ положим [166]

$$\omega_{\varphi^\lambda}^l(x,t) = \sup_{0<h\le t} \sup_{u\in[-1,1]} \left|\triangle_{h\varphi^\lambda(u)}^l x(u)\right|.$$

Очевидно, что при $\lambda = 0$ получаем обычный модуль непрерывности $\omega^l(x,t)$ l-го порядка функции x (см., например, [159, с. 160]).

Приведем уточнение одного неравенства О.В. Бесова [109] (см. также [348, с. 35]). Формулировке результатов предпошлем необходимые вспомогательные факты. Положим (для $n, r, k \in \mathbf{N}$)

$$M(n,r,k) = \sup_{P_n\in\pi_n\ P_n\ne 0} \frac{\left\|\rho_n^{-r+k} P_n^{(k)}\right\|_\infty}{\left\|\rho_n^{-r} P_n\right\|_\infty}. \tag{9.5.9}$$

Согласно известному неравенству В.К. Дзядыка [159, с. 262] имеем

$$M(r,k) := \sup_{n\in\mathbf{N}} M(n,r,k) < \infty. \tag{9.5.10}$$

Большинство известных результатов о совместном равномерном приближении алгебраическими полиномами функции и ее производных обобщены в работе [166]. В частности, в ней доказано, что для фиксированных $l, r, k \in \mathbf{Z}$, $r \geq 0$, $l \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ и для любой функции $x \in C^r_{[-1,1]}$ при любом $n \geq r + l - 1$ существует $P_n \in \pi_n$, такой, что при всех $0 \leq k \leq r$ справедливо неравенство

$$\left\| \rho_n^{-r+k}(x^{(k)} - P_n^{(k)}) \right\|_\infty \leq B\omega^l_{\varphi\lambda}\left(x^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \tag{9.5.11}$$

с некоторой константой B, не зависящей от x, n и k.

Полагая в теореме 4.6.1

$$X = Y = C_{[-1,1]}, \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_\infty, \quad H = \pi_n,$$

$$Tx = x^{(k)}, \quad F(x) = \omega^l_{\varphi\lambda}\left(x^{(r)}, \frac{1}{n}\right),$$

видим, что за счет (9.5.10) выполнено условие 1 теоремы, а за счет (9.5.11) – условие 2. Кроме того, при $n = r + l - 1$ для любого $P_n \in \pi_n$

$$F(P_n) = \omega^l_{\varphi\lambda}\left(P_n^{(r)}, \frac{1}{n}\right) = 0,$$

т. е. дополнительное условие теоремы 4.6.1 также выполнено. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 9.5.6. *Для любых $l, r, k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq r$, $n \geq r + l - 1$, любого $0 \leq \lambda \leq 1$ и для любой r раз непрерывно дифференцируемой на $[-1, 1]$ функции x выполняется неравенство*

$$\left\| \rho_n^{-r+k} x^{(k)} \right\|_\infty \leq M(n, r, k) \left\| \rho_n^{-r} x \right\|_\infty + B\omega^l_{\varphi\lambda}\left(x^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \tag{9.5.12}$$

где константы $M(n, r, k)$ определены в (9.5.9) *и согласно* (9.5.10) *равномерно по n ограничены числом $M(r, k)$, а $B = B(k, r, l)$ – некоторая константа, не зависящая от x и n.*

При фиксированных r, l, k и $n = r + l - 1$ константа $M(n, r, k)$ в (9.5.12) неулучшаема.

Комментарии к главе 9

В данной главе дан обзор результатов, не нашедших достаточно полного отражения в предыдущих главах. Это, прежде всего, результаты по решению задачи Колмогорова для четверок чисел вида M_0, M_k, M_{r-1}, M_r и некоторые смежные результаты, которые изложены в § 9.1. Этой проблематике посвящены работы А.М. Родова [285, 286], В.К. Дзядыка и В.А. Дубовика [160, 161]. Аналогичные результаты для функций, заданных на полуоси, получены в работе [48].

Для кратно-монотонных функций задача Колмогорова изучалась в работе Оловянишникова [275] (для троек чисел), а также в работах [364, 45–47].

В § 9.2 дается обзор результатов о точных неравенствах для функций, заданных на всей числовой прямой, в случае малых гладкостей. Это результаты В.В. Арестова [8], В.Н. Габушина [140], В.В. Арестова и В.И. Бердышева [18] и др. Относительно небольшая гладкость рассматриваемых функций (по большей части $r \leq 3$) позволяет "пошевелить" в классических неравенствах, изложенных в предыдущих главах, параметры q, p, s, задающие метрики. Для иллюстрации возникающих при малых гладкостях возможностей приводим доказательство неравенства Арестова–Бердышева [18] (теорема 9.2.5).

Сделанное замечание о возможности "шевеления" при малых r параметров q, p, s остается справедливым и для случая функций, заданных на полуоси, которому посвящен § 9.3. Здесь приведено весьма интересное неравенство В.И. Бердышева с доказательством [107] (теорема 9.3.2).

Наиболее ярко возможность "шевеления" параметров метрик проявляется для функций, заданных на окружности. В этом случае при $s = \infty$ удается найти неулучшаемые константы в неравенствах для производных $r \leq 3$, $k < r$ и любых q, p (см. [81]). Для $r = 2$ то же самое можно сделать (см. [83]) и при $s = 1$. Периодическому случаю посвящен § 9.4.

В § 9.5 дается краткий обзор результатов по точным неравенствам для промежуточных производных функций, заданных на конечном отрезке. По поводу некоторых других результатов сошлемся на работы [343, 98], где имеются дальнейшие ссылки.

Дополнительные результаты к главе 9

1. В работе [48] решена задача Колмогорова для четверок чисел вида $\{M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_2+1}\}$ в случае функций, заданных на полуоси.

Теорема 1. *Для того чтобы для четырех чисел* M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_2+1}, $0 = k_0 < k_1 < k_2$, *существовала функция* $f \in L_\infty^{k_2+1}(\mathbf{R}_+)$, *такая, что*

$$\left\| f^{(i)} \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = M_i, \quad i \in \{k_0, k_1, k_2, k_2+1\},$$

необходимо и достаточно, чтобы для чисел $\{M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_2+1}\}$ *выполнялось неравенство Шенберга–Каваретты* (3.3.4):

$$M_{k_2} \le \frac{|s_{k_2+1}^{(k_2)}(0)|}{|s_{k_2+1}(0)|^{1/(k_2+1-k_1)}} M_{k_2}^{1/(k_2+1-k_1)} M_{k_2+1}^{(k_2-k_1)/(k_2+1-k_1)}, \tag{Д.9.1}$$

а для числа M_{k_0} *выполнялось соотношение*

$$M_{k_0} \ge \left\| p_{k_2+1}(\cdot, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_2+1}) \right\|_\infty,$$

где $p_{k_2+1}(\cdot, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_2+1})$ *– построенный по числам* $p_{k_2+1}(\cdot, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_2+1})$ *идеальный сплайн порядка* $k_2 + 1$, *определенный на положительной полуоси, имеющий бесконечное число узлов, причем*

$$p_{k_2+1}(x, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_2+1}) = \lim_{n\to\infty} p_{k_2+1,n,h}(x, M_{k_2}, M_{k_2+1}),$$

$$x \in \mathbf{R}_+,$$

где $p_{k_2+1,n,h}(x, M_{k_2}, M_{k_2+1})$ *– наименее уклоняющийся от нуля на отрезке* $[0, h]$ *идеальный сплайн порядка* $k_2 + 1$, *имеющий* n *узлов и*

удовлетворяющий соотношениям

$$\left\| p_{k_2+1,n,h}^{(k_2+1)}(\cdot, M_{k_2}, M_{k_2+1}) \right\|_{L_\infty[0,h]} = M_{k_2+1},$$

$$\left\| p_{k_2+1,n,h}^{(k_2)}(\cdot, M_{k_2}, M_{k_2+1}) \right\|_{L_\infty[0,h]} = M_{k_2},$$

а число $h = h(n)$ *выбрано так, чтобы выполнялось равенство*

$$\left\| p_{k_2+1,n,h}^{(k_1)}(\cdot, M_{k_2}, M_{k_2+1}) \right\|_{L_\infty[0,h]} = M_{k_1}$$

(*такие сплайны можно построить при условии, что для чисел* $\{M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_2+1}\}$ *выполнено неравенство* (Д.9.1)).

2. В работе [365] рассмотрена задача о верхних гранях функции на полуоси, которая, как и ее производные до $(n-1)$-го порядка включительно, не меняет знака, а n-я производная ограничена.

Теорема 2. *Для того чтобы четверке положительных чисел* M_0, M_k, M_{n-1}, M_n $(0 < k < n)$ *соответствовала функция* $f(t)$ *с указанными свойствами, для которой* $\|f^{(i)}\|_{L_\infty(\mathbf{R}_-)} = M_i$ $(i = 0, k, n-1, n)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $M_k \leq$ $\leq \|\phi_n^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbf{R}_-)}$, *где* $\phi_n^{(k)}$ *– функция вида*

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in (-\infty, c), \\ \dfrac{a(t+c)^n}{n!(c-b)}, & \text{если } t \in [-c, -b], \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{at^{n-i}(c^i - b^i)}{(n-i)(c-b)}, & \text{если } t \in (-b, 0], \end{cases}$$

a, b, c *– неотрицательные числа, которые находятся из условий*

$$\left\| \phi_n^{(i)} \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}_-)} = M_i, \quad i = 0, n-1, n.$$

3. Пусть $\omega(x, \delta)$ – модуль непрерывности:

$$\omega(x, \delta) = \sup\{|x(t+h) - x(t)| : t, \quad t+h \in G, \ |h| \leq \delta\},$$

а $\omega_2(x,\delta)$ – модуль гладкости непрерывной функции $x \in L_\infty(G)$, $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$:

$$\omega_2(x,\delta) = \sup\{|x(t+h)+x(t-h)-2x(t)| : t, t+h, t-h \in G,\ |h| \le \delta\}.$$

Тогда для любого $\delta > 0$

$$\omega(x,\delta)^2 \le 4\|x\|_\infty \omega_2(x,\delta), \quad \text{если} \quad G = \mathbf{R}_+,$$

и

$$\omega(x,\delta)^2 \le 2\|x\|_\infty \omega_2(x,\delta), \quad \text{если} \quad G = \mathbf{R}.$$

4. Пусть $K(M_0, M_2)$ – класс функций $x \in L_\infty(\mathbf{R})$, таких, что $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le M_0$ и

$$\sup_{\substack{t,u\in\mathbf{R}\\ |t-u|<\delta}} \frac{|x'(t)-x'(u)|}{|t-u|} \le M_2, \quad 0 < \delta < +\infty.$$

Для $\alpha \in (0,1)$ определим производную порядка α равенством

$$D^\alpha x(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\alpha\pi}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{x(t)-x(t-s)}{s^{1+\alpha}} ds.$$

Для $x \in K(M_0, M_2)$, $0 < \alpha < 1$, в [146] доказано неулучшаемое неравенство

$$\|D^\alpha x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le C_\alpha M_0^{1-\alpha/2} M_2^{\alpha/2},$$

где

$$C_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\alpha\pi}{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\pi} 2^{2-\alpha/2} \left(2^{1/(1-\alpha)}-1\right)^{\alpha-1}.$$

5. Неравенства вида

$$\|D^\alpha x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le K\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{1-\alpha/r} \|D^r x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{\alpha/r} \tag{Д.9.2}$$

для дробных производных функций, определенных на полуоси, рассматривались в [11]. В этой работе найдены точные константы в (Д.9.2) в случаях $\alpha \in (0,1]$, $r \in (\alpha, 2]$ и $\alpha \in (1,2)$, $r = 2$.

6. В работе [251] для функций, определенных на полуоси, доказано неравенство

$$\|D^\alpha x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le K\|x\|^\gamma_{L_2(\mathbf{R})} \left\|x^{(r)}\right\|^{1-\gamma}_{L_2(\mathbf{R})},$$

где дробная производная $D^\alpha x$ понимается в смысле Вейля (см. § 4.4), в следующих случаях: $\alpha \in (-1/2, r-1/2)$, $\gamma = (r-\alpha-1/2)/r$.

7. Для $\alpha \in (1,2)$ определим дробную производную функции x равенством (см. [291])

$$D^\alpha x(t) := \int\limits_0^\infty \frac{(\Delta_h^2 x)(t)}{h^{1+\alpha}} dh,$$

где $\Delta_h^2 x(t) = x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)$.

Положим

$$\widehat{\varphi}_r(t) = \begin{cases} \varphi_r(t + (r-1)\pi/2), & \text{если } t \in [-\pi, \pi], \\ \max\limits_t \varphi_r(t), & \text{если } t \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

В работе [97] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\alpha \in (1,2)$ и $r \in \{2,3,\ldots\}$. Тогда для любой функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ выполнено неравенство*

$$\|D^\alpha x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \frac{\|D^\alpha \widehat{\varphi}_r\|_{L_\infty(\mathbf{T})}}{\|\widehat{\varphi}_r\|^{1-\alpha/r}_{L_\infty(\mathbf{T})}} \|x\|^{1-\alpha/r}_{L_\infty(\mathbf{R})} \left\|x^{(r)}\right\|^{\alpha/r}_{L_\infty(\mathbf{R})}. \quad (\text{Д}.9.3)$$

Для $r = 2$ константа $\|D^\alpha \widehat{\varphi}_r\|_{L_\infty(\mathbf{T})} / \|\widehat{\varphi}_r\|^{1-\alpha/r}_{L_\infty(\mathbf{T})}$ в (Д.9.3) *является точной и знак равенства реализует функция $\widehat{\varphi}_r$.*

8. Р.Р. Калман и Г.К. Рота [179] дали следующее обобщение неравенства Ландау для функций, заданных на полуоси (см. (1.2. . . .)). Пусть X – банахово пространство над полем комплексных чисел, $\{T(s)\}$ – однопараметрическая полугруппа линейных ограниченных операторов, действующих из X в X и таких, что $\|T(s)\| \le 1$ для

всех $s \geq 0$. Пусть также A – инфинитезимальный производящий оператор этой полугруппы, $D[A]$ – его область определения. Тогда для любого $x \in D[A^2]$

$$\|Ax\|^2 \leq 4\|x\|\|A^2x\|.$$

Хилле [329] отметил, что унимодулярные полугруппы порождаются и производными высших порядков, так что для любого положительного целого n

$$\|x^{(n)}\|^2 \leq 4\|x\|\|x^{(2n)}\|$$

(пространство здесь есть $C(\mathbf{R})$ или $L_p(\mathbf{R})$).

Если $\|T(s)\| \leq M$, то (Купера [227] и Кралевич [224])

$$\|Ax\|^2 \leq 2M(M+1)\|x\|\|A^2x\|.$$

С. Курепа [227] и Г. Кралевич [224] также доказали, что если A – инфинитезимальный генератор сильно непрерывной косинус-функции $C(s)$ на банаховом пространстве для $s > 0$, и если $M = \sup|C(s)| < \infty$, то для $x \in D[A^2]$, $Ax \neq 0$,

$$\|Ax\|^2 \leq \frac{2}{3}M(M+1)\|x\|\|A^2x\|.$$

В частности, имеем

$$\|x''\|^2 \leq \frac{4}{3}\|x\|\|x^{(4)}\|.$$

Используя метод из [224], Хилле [330] дал следующие неравенства:

$$\|A^2x\|^3 \leq 3\|x\|\|A^3x\|,$$

$$\|Ax\|^2 \leq 2\|x\|\|A^2x\|,$$

$$\|Ax\|^3 \leq \frac{9}{8}\|x\|^2\|A^3x\|.$$

Хилле также доказал следующее: если A – инфинитезимальный генератор сильно непрерывной сжимающей группы, то для $1 \leq k < r$

существует константа $C_{r,k}$, не зависящая от A, такая, что для $x \in D[A^r]$

$$\|A^k x\|^r \leq C_{r,k}\|x\|^{r-k}\|A^2 x\|^k.$$

В статье [331] даны некоторые приложения приведенных результатов.

Близкие вопросы рассматривались также в работах Като [183], Холбрука [332].

Дициан [163] доказал, что если $\{T(s)\}$ – группа операторов на банаховом пространстве X, $\|T(s)\| = 1$ и A – инфинитезимальный генератор, то для $x \in D[A^2]$

$$\|Ax\|^2 \leq 2\|x\|\|A^2 x\|.$$

Глава 10

ДОПОЛНЕНИЕ

10.1. Наилучшие приближения

Пусть X – линейное нормированное пространство. Наилучшим приближением элемента $x \in X$ множеством $F \subset X$ называется величина

$$E(x, F)_X = \inf_{u \in F} \|x - u\|_X, \tag{10.1.1}$$

где $\|\cdot\|_X$ – норма в пространстве X.

Если существует элемент $u_0 \in F$, реализующий $\inf$ в (10.1.1), то u_0 называется элементом наилучшего приближения для x во множестве F.

Приведем критерии элемента наилучшего приближения в некоторых конкретных пространствах. Начнем с теоремы Чебышева об альтернансе.

Теорема 10.1.1 (см., например, [208, с. 50]). *Алгебраический многочлен*

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k$$

доставляет функции $x \in C_{[a,b]}$ наилучшее равномерное приближение среди всех многочленов степени не выше n в том и только в том случае, когда существуют $n+2$ точки t_k

$$a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+2} \le b, \tag{10.1.2}$$

в которых разность $\Delta(t) = x(t) - P_n(t)$ принимает значения $\pm\|\Delta\|_{C_{[a,b]}}$, поочередно меняя знак.

Точки (10.1.2) называются точками альтернанса.

Следующие две теоремы дают критерий элемента наилучшего приближения подпространством пространства $L_p = L_p(G)$, $1 \le p < < \infty$, где G – отрезок $[a, b]$ или тор $\mathbf{T}$.

Теорема 10.1.2 (см., например, [208, с. 53]). *Пусть F – фиксированное подпространство в L_p $(1 < p < \infty)$. Для того чтобы функция $u_0 \in F$ доставляла функции $x \in L_p$ наилучшее приближение подпространством F в метрике пространства L_p, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int\limits_G u(t)\,|x(t) - u_0(t)|^{p-1}\,\mathrm{sgn}\,[x(t) - u_0(t)]\,dt = 0 \quad \forall u \in F. \quad (10.1.3)$$

В случае $p = 1$ необходимость условия (10.1.3) требует некоторой оговорки.

Теорема 10.1.3 (см., например, [208, с. 55]). *Пусть F – фиксированное подпространство в L_1. Для того чтобы функция $u_0 \in F$ доставляла функции $x \in L_1$ наилучшее приближение подпространством F в метрике пространства L_1 достаточно, а в случае, когда множество точек t, в которых $x(t) = u_0(t)$ имеет меру нуль, и необходимо выполнение условия*

$$\int\limits_G u(t)\mathrm{sgn}\,[x(t) - u_0(t)]\,dt = 0 \quad \forall u \in F.$$

Важную роль в теории аппроксимации играют следующие утверждения, известные как теоремы двойственности. Начнем с теоремы двойственности для приближения выпуклым множеством.

Теорема 10.1.4 (см., например, [208, с. 28]). *Если F – выпуклое множество в линейном нормированном пространстве X, то для любого элемента $x \in X$ справедливо соотношение*

$$E(x, F)_X = \sup_{\substack{f \in X^*,\\ \|f\| \le 1}} \left[f(x) - \sup_{u \in F} f(u) \right], \quad (10.1.4)$$

где X^* – сопряженное к X пространство. При каждом $x \in \in X \setminus F$ существует функционал $f_0 \in X^*$, для которого $\|f_0\| = 1$, реализующий первый sup *в правой части* (10.1.4).

Частным случаем теоремы 10.1.4 является теорема двойственности для приближений подпространством.

Теорема 10.1.5 (см., например, [208, с. 34]). *Если F – подпространство линейного нормированного пространства X, то для любого элемента $x \in X$ справедливо соотношение*

$$E(x, F)_X = \sup_{\substack{f \in F^\perp, \\ \|f\| \le 1}} f(x), \tag{10.1.5}$$

где $F^\perp$ – множество функционалов $f \in X^*$, таких, что $f(u) = 0$ $\forall u \in F$. Верхнюю грань в (10.1.5) *реализует функционал $f_0 \in F^\perp$, для которого $\|f_0\| = 1$.*

Теоремы 10.1.4 и 10.1.5 допускают обобщение на случай несимметричных приближений. Пусть X – линейное пространство, $p(x)$ – заданная на X несимметричная полунорма, т. е. неотрицательная вещественная функция, удовлетворяющая условиям

$$p(0) = 0, \quad p(x + y) \le p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \alpha > 0.$$

Если к тому же из $p(x) = 0$ следует $x = 0$, то несимметричная полунорма называется несимметричной нормой. Пусть $\alpha, \beta > 0$. Примером несимметричной нормы является следующий функционал на L_p, $1 \le p \le \infty$,

$$p(x) := \|\alpha x_+ + \beta x_-\|_p.$$

Обозначим X' – пространство всех линейных функционалов на X, и для $f \in X'$ положим

$$p^*(f) = \sup\{f(x) : x \in X : p(x) \le 1\}.$$

Теорема 10.1.6 (см., например, [208, с. 19]). *Пусть F – выпуклое множество в линейном пространстве X, $p(x)$ – заданная на X несимметричная полунорма. Тогда для любого элемента $x \in X$ справедливо соотношение*

$$\inf_{u\in F} p(x-u) = \sup_{\substack{f\in X',\\ p^*(f)\le 1}} \left[f(x) - \sup_{u\in F} f(u) \right].$$

В частности, для подпространства F имеем

$$\inf_{u\in F} p(x-u) = \sup_{\substack{f\in X',\\ p^*(f)\le 1}} f(x).$$

10.2. Перестановки

Пусть $f(t)$ – неотрицательная, суммируемая на интервале (a,b) (конечном или бесконечном) и, следовательно, измеримая и почти всюду конечная на (a,b) функция. Сопоставив каждому $y \ge 0$ число

$$m(f,y) := \operatorname{mes}\{t : t \in (a,b), f(t) > y\},$$

получим невозрастающую на $[0,\infty)$, непрерывную справа функцию $m(f,y)$, которую называют функцией распределения для $f(t)$. Перестановка $r(f,t)$ определяется равенством

$$r(f,t) := \inf\{y : m(f,y) \le t\}.$$

Ясно, что $r(f,t)$ не возрастает и так же, как и функция $m(f,y)$, непрерывна справа. Из определения перестановки следует, что для всех $y \ge 0$

$$\operatorname{mes}\{t : t \in (a,b), r(f,t) > y\} = m(f,y),$$

т. е. функции $f(t)$ и $r(f,t)$ имеют одну и ту же функцию распределения, вследствие чего их называют равноизмеримыми.

Перестановка сохраняет L_p-норму функции. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 10.2.1 (см., например, [211, с. 18]). *Пусть $\Phi(t)$ – непрерывная и неубывающая на $[0,\infty)$ функция и $\Phi(0) = 0$. Тогда*

$$\int_a^b \Phi(|f(t)|)dt = \int_0^{b-a} \Phi(r(|f|,t)dt.$$

В частности, для $f \in L_p[a,b]$ $(1 \le p \le \infty)$

$$\|r(|f|,\cdot)\|_{L_p[0,b-a]} = \|f\|_{L_p[a,b]}.$$

Справедлива такая теорема.

Теорема 10.2.2 (см., например, [211, предложение 1.3.1]). *Для любой функции* $f \in L_1[a,b]$ *и для любого измеримого множества* $E \subset [a,b]$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_E |f(t)|dt \le \int\limits_0^{\mathrm{mes}E} (r(|f|,t)dt.$$

Следующая теорема дает формулу для вычисления производной от перестановки функции.

Теорема 10.2.3 (см., например, [211, предложение 1.3.2]). *Пусть* $f(t)$ *– непрерывно дифференцируемая на* $[a,b]$ *функция и точка* $\theta \in \in (0, b-a)$ *такая, что множество* $\{t : t \in [a,b],\ |f(t)| = r(|f|,\theta)\}$ *состоит из конечного числа точек* $t_1, t_2, \ldots, t_m$, *причем* $f'(t_k) \ne 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда*

$$\frac{1}{|r'(|f|,\theta)|} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|f'(t_k)|}.$$

Важной характеристикой функции $f \in L_1[a,b]$ является величина $\int\limits_0^t r(|f|,u)du$ $(t \ge 0)$. Прежде всего отметим, что при любом фиксированном $t > 0$ функционал $\int\limits_0^t r(|f|,u)du$ является нормой. В частности, для любых функций $f, g \in L_1[a,b]$ справедливо неравенство (см., например, [211, предложение 1.3.5]):

$$\int\limits_0^t r(|f+g|,u)du \le \int\limits_0^t r(|f|,u)du + \int\limits_0^t r(|g|,u)du. \qquad (10.2.1)$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения.

Теорема 10.2.4 (см., например, [211, предложение 1.3.10]). *Пусть* $f, g \in L_q[a,b]$, $1 \le q \le \infty$, *и для всех* $t > 0$

$$\int_0^t r(|f|,u)du \le \int_0^t r(|g|,u)du.$$

Тогда

$$\|f\|_{L_q[a,b]} \le \|g\|_{L_q[a,b]}.$$

Теорема 10.2.5 (см., например, [211, предложение 1.3.6]). *Пусть* $f, g \in L_1[a,b]$ *и для любого* $t > 0$

$$\int_0^t r(f_\pm,u)du \le \int_0^t r(g_\pm,u)du.$$

Тогда

$$\int_0^t r(|f|,u)du \le \int_0^t r(|g|,u)du.$$

Следующий критерий, принадлежащий Г. Харди, Дж. Литлвуду и Д. Полиа, содержит, в частности, теорему 10.2.4.

Теорема 10.2.6 (см., например, [211, предложение 1.3.11]). *Пусть* $f, g \in L_1[a,b]$. *Для любой непрерывной, выпуклой вниз, неотрицательной на* $[0,\infty)$ *функции* Φ *неравенство*

$$\int_a^b \Phi(|f(t)|)dt \le \int_a^b \Phi(|g(t)|)dt$$

справедливо в том и только в том случае, когда для всех $t > 0$

$$\int_0^t r(|f|,u)du \le \int_0^t r(|g|,u)du.$$

Отметим еще некоторые утверждения о перестановках, используемые в настоящей монографии.

Теорема 10.2.7 (см., например, [211, предложение 1.3.3]). *Пусть измеримые на* $[a,b]$ *функции* f *и* g *такие, что* $\mathrm{sgn} f(t) = \mathrm{sgn} g(t)$ *почти для всех* $t \in [a,b]$ *и произведение* $r(|f|,t)r(|g|,t)$ *суммируемо на* $[0, b-a]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(t)g(t)dt \le \int\limits_0^{b-a} r(|f|,t)r(|g|,t)dt.$$

Теорема 10.2.8 (см., например, [211, предложение 1.3.9]). *Пусть* $\psi(t)$ *и* $\mu(t)$ *– суммируемые на* $[a,b]$ *функции, причем* $\mu(t) \ge 0$ $(t \in [a,b])$ *и* $\mu(t)$ *не возрастает. Если*

$$\int\limits_a^t \psi(u)du \ge 0 \quad (t \in [a,b])$$

и произведение $\psi(t)\mu(t)$ *суммируемо на* $[a,b]$, *то*

$$\int\limits_a^b \psi(u)\mu(u)du \ge 0.$$

10.3. Σ-перестановки

Все сведения, приводимые ниже, можно найти в монографиях [208, 209].

Непрерывную на всей числовой оси функцию $\varphi(t)$ будем называть простой, если $\varphi(t) = 0$ вне некоторого интервала (α, β), причем $|\varphi(t)| > 0$ для $t \in (\alpha, \beta)$ и при каждом $y \in (0, \max\limits_t |\varphi(t)|)$ уравнение $|\varphi(t)| = y$ имеет ровно два корня. Интервал (α, β) будем называть основным интервалом простой функции $\varphi(t)$.

Пусть $\mathcal{D}$ – пространство суммируемых 2π-периодических функций, имеющих в каждой точке односторонние пределы, а $\mathcal{D}^1$ – класс 2π-периодических интегралов от функций из $\mathcal{D}$, в среднем равных нулю на периоде.

Любую функцию $g \in \mathcal{D}^1$ можно представить в виде конечной или счетной суммы

$$g(t) = \sum_k f_k(t) + d \quad (t \in [t_0, t_0 + 2\pi]), \tag{10.3.1}$$

где $f_k(t)$ – простые функции с основными интервалами

$$(\alpha_k, \beta_k) \subset (t_0, t_0 + 2\pi)$$

и

$$d = g(t_0), \quad |g(t_0)| = \min_t |g(t)|.$$

Исходя из разложения (10.3.1), определим Σ-перестановку $R(g,t)$ функции $g(t)$ равенством

$$R(g,t) = \sum_k R(f_k, t) + |d| \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства Σ-перестановок:

1) $R(g,t)$ не возрастает на $[0, 2\pi]$;

2) $\|R(g,\cdot)\|_{L_1[a,b]} = \|g\|_1$;

3) $R(g,0) = \dfrac{1}{2} \bigvee\limits_0^{2\pi} g + d$;

4) $R(\lambda g, t) = \lambda R(g,t)$ $(\lambda > 0)$.

В качестве функций сравнения для Σ-перестановок используется следующее семейство функций, называемых стандартными Σ-перестановками (см., например, [209, с. 297]):

$$R_{a,0}(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } 0 \le t < a, \\ 0, & \text{если } t \ge a, \end{cases}$$

и

$$R_{a,k}(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{a-t} R_{a,k-1}(u)du, & \text{если } 0 \le t < a, \\ 0, & \text{если } t \ge a, \end{cases}$$

если $k = 1, 2, \ldots$

Отметим лишь некоторые свойства стандартных Σ-перестановок $R_{a,k}(t)$ (см., например, [209, § 7.1.4]):

$$R_{a,k}(\lambda t) = \lambda^k R_{a/\lambda,k}(t), \quad \lambda > 0, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{10.3.2}$$

$$4R_{\pi,k}(t) = R(\varphi_k, t), \tag{10.3.3}$$

$$\int_0^{\pi} R_{\pi,r-1}(t)\,dt = \|\varphi_r\|_\infty. \tag{10.3.4}$$

Справедлива следующая теорема сравнения Σ-перестановок.

Теорема 10.3.1 (см., например, [208, теорема 6.7.2]). *Если для функции $g \in W_V^r$ $(r \in \mathbf{N})$ число $a > 0$ выбрано так, что*

$$R(g, 0) = R_{a,r}(0),$$

то

$$|R'(g,t)| \le |R'_{a,r}(t)| \quad (0 < t < a)$$

и, следовательно,

$$R(g,t) \ge R_{a,r}(t) \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivees // C. R. Soc. Math. France. – 1914. – **41**. – P. 68–72.
2. *Андрианов А.В.* Аналоги неравенств А. Маркова и С. Бернштейна для многочленов в банаховых пространствах // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 5. – С. 15–20.
3. *Арестов В.В.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Усп. мат. наук. – 1966. – **6**. – С. 89–124.
4. *Арестов В.В.* О наилучшем приближении операторов дифференцирования // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 149–154.
5. *Арестов В.В.* О наилучшем равномерном приближении операторов дифференцирования // Там же. – 1969. – **5**, № 3. – С. 242–273.
6. *Арестов В.В.* О наилучшем приближении операторов дифференцирования в равномерной метрике: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Свердловск, 1969. – 30 с.
7. *Арестов В.В.* О точных неравенствах между нормами функций и их производных // Acta sci. math. – 1972. – **33**, № 3–4. – С. 243–267.
8. *Арестов В.В.* О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1975. – **138**. – С. 3–26.
9. *Арестов В.В.* Приближение операторов, инвариантных относительно сдвига // Там же. – С. 43–70.
10. *Арестов В.В.* О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 2. – С. 231–244.
11. *Arestov V.V.* Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approximation theory, Banach Center Publications. – 1979. – **4**. – PWN, Warsaw. – P. 19–34.
12. *Арестов В.В.* Приближение операторов типа свертки линейными ограниченными операторами // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 3–19.

13. *Арестов В.В.* Об интегральных неравенствах для полиномов и сплайнов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1982. – **45**. – С. 3–32.
14. *Арестов В.В.* Приближение разностных операторов // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 1. – С. 9–29.
15. *Арестов В.В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 3–20.
16. *Арестов В.В.* Наилучшее приближение неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами // Там же. – 1992. – **198**. – С. 3–20.
17. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Усп. мат. наук. – 1996. – **51**, № 6. – С. 88–124.
18. *Арестов В.В., Бердышев В.И.* Неравенства для дифференцируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1975. – Вып. 17. – С. 108–138.
19. *Арестов В.В., Габушин В.Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 42–63.
20. *Ахиезер Н.И., Глазман М.Г.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Вища школа, 1977. – 315 с.
21. *Ахиезер Н.И., Крейн М.Г.* О некоторых вопросах теории моментов. – Харьков: ГОНТИ, 1938.
22. *Бабенко В.Ф.* Точные оценки для норм функций из сопряженных классов в метриках C и L // Исследования по соврем. проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск, 1973. – С. 3–5.
23. *Бабенко В.Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 409–416.
24. *Бабенко В.Ф.* Несимметричные экстремальные задачи теории приближения // Докл. АН СССР. – 1983. – **269**, № 3. – С. 521–524 (in Russian); **27**, N 2. – P. 346–349 (in English).
25. *Бабенко В.Ф.* Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций, задачи приближения и приближенного интегрирования // Там же. – **272**. – С. 1038–1043 (in Russian); **28**, N 2. – P. 470–474 (in English).
26. *Бабенко В.Ф.* Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций и их применения // Теория приближения функций: Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций (Киев, 31 мая – 5 июня 1983 г.). – М.: Наука, 1987. – С. 26–30.
27. *Бабенко В.Ф.* Несимметричные приближения и неравенства для перестановок в экстремальных задачах теории приближения // Теория функций и смежные вопросы анализа: Тр. конф. по теории функций, посвященной 80-летию акад. С.М. Никольского (Днепропетровск, 29 мая – 1 июня 1985 г.); Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1987. – V. CLXXX. – С. 33–35 (in Russian); 1989. – Issue 3. – P. 35–37 (in English).
28. *Бабенко В.Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и неравенства для перестановок // Докл. АН СССР. – 1986. – **290**, № 5. – С. 1033–1036.

29. *Babenko V.F.* Extremal problems in approximation theory and inequalities for rearrangements // Soviet Math. Dokl. – 1987. – **34**. – P. 369–372.
30. *Babenko V.F.* Approximations, widths and optimal quadrature formulae for classes of periodic functions with rearrangement invariant sets of derivatives // Analysis Mathematica. – 1987. – **13**, N 4. – P. 281–306.
31. *Бабенко В.Ф.* Точные неравенства для норм сопряженных функций и их применения // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 139–144.
32. *Бабенко В.Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 275 с.
33. *Бабенко В.Ф.* Поперечники и наилучшие квадратурные формулы для классов сверток // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 9. – С. 1135–1148.
34. *Бабенко В.Ф.* Наилучшие приближения классов функций, задаваемых с помощью модуля непрерывности // Там же. – 1992. – **44**, № 5. – С. 579–589.
35. *Babenko V.F.* On exact inequalities for norms of intermediate derivatives of half-integer order and their applications // Abstr. of the International conference on Approximation Theory and Functions Series. – Budapest, 1995. – P. 3.
36. *Babenko V.F.* Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Abstr. of the International Conference on Multivariate Approximation and Splines, Mannheim, September 7–10, 1996. – Mannheim, 1996. – P. 4.
37. *Бабенко В.Ф.* Точные неравенства для норм промежуточных производных полуцелого порядка и некоторые их приложения // Доп. НАН України. – 1997. – № 2. – С. 23–26.
38. *Babenko V.F.* Inequalities for Norms of Intermediate Derivatives and Some Their Applications // Recent Progress in Inequalities: Kluwer Academic Publishers, 1998. – P. 77–96.
39. *Babenko V.F.* Inequalities of Landau–Kolmogorov–Nagy Type // International Congress of Mathematicians, Berlin, August 18–27, 1998: Abstracts of Short Communications and Poster Sessions. – Berlin, 1998. – P. 115.
40. *Babenko V.F.* Exact inequalities for norms of intermediate derivatives of half-integer order and some of their applications // Approx. Theory and Appl. – Palm Harbor (USA): Hadronic Press, 1998. – P. 5–16.
41. *Бабенко В.Ф.* Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 9–29.
42. *Бабенко В.Ф.* О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных // Доп. НАН України. – 2000. – № 5. – С. 7–11.
43. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Колмогорова для сублинейных функционалов и смежные задачи анализа // Комп'ютерне моделювання: Тези доповідей міждержавної науково-методичної конференції. – Дніпродзержинськ, 2001. – С. 4–5.
44. *Babenko V.F., Babenko Yu.V.* About Kolmogorov type inequalities for functions defined on a half line // Abstr. Int. Conf. "Constructive Function Theory" dedicated to 70-th birthday of Blagovest Sendov, June 19–23. – Varna, Bulgaria, 2002. – P. 4–8.

45. *Babenko V.F., Babenko Yu.V.* Inequalities of Kolmogorov type for r-monotone functions of many variables // Book of abstracts of the International conference on Functional Analysis and its Applications dedicated to 110-th anniversary of Stefan Banach, May 28–31. – Lviv, Ukraine, 2002. – P. 16–17.
46. *Babenko V.F., Babenko Yu.V.* On Kolmogorov type inequalities for Absolutely Monotone functions defined on a half line // Тези доп. Міжнар. школи-семінару "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування", Ужгород, 19–24 серпня 2002. – Ужгород, 2002. – С. 9–10.
47. *Babenko V.F., Babenko Yu.V.* About Kolmogorov type inequalities for functions defined on a half line // Abstr. Int. Conf. "Constructive Theory of Function". – Varna, 2002; DARBA, Sofia, 2003. – P. 205–208.
48. *Babenko V.F., Britvin Y.E.* On Kolmogorov's problem about existence of a function with given norms of its derivatives // East J. on Approx. – 2002. – **8**, N 1. – P. 95–100.
49. *Бабенко В.Ф., Вакарчук М.Б.* О неравенствах типа Колмогорова–Хермандера для функций, ограниченных на дискретной сетке // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 7. – С. 988–992.
50. *Бабенко В.Ф., Глушко В.Н.* Некоторые точные неравенства для L_1-норм сопряженных функций и их приложения // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 5–12.
51. *Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Неравенства типа Бернштейна для L-сплайнов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 1. – С. 10–20.
52. *Babenko V.F., Korneichuk N.P., Pichugov S.A.* On Kolmogorov type inequalities for the norms of intermediate derivatives of functions of many variables // Abstr. Int. Conf. "Constructive Function Theory" dedicated to 70-th birthday of Blagovest Sendov, June 19–23, 2002. – Varna, Bulgaria, 2002. – P. 4–5.
53. *Babenko V.F., Korneichuk N.P., Pichugov S.A.* On Kolmogorov type inequalities for the norms of intermediate derivatives of functions of many variables // Constructive Theory of Function, Varna, 2002; Darba, Sofia, 2003. – P. 209–212.
54. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О неравенствах для производных на отрезке // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики. – Дніпропетровськ, 1993. – С. 12.
55. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 105–107.
56. *Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.* On exact inequalities of Kolmogorov type for L_2-norms of intermediate derivatives and differences // Abstr. Int. Conf. "Function spaces, Approximation theory, Nonlinear analysis". – Moscow, 1995. – P. 23.
57. *Babenko V.F., Kofanov V.A. and Pichugov S.A.* On inequalities of Landau–Hadamard–Kolmogorov type for the L_2-norm of intermediate derivatives // East J. on Approx. – 1996. – **2**, N 3. – P. 343–368.

58. *Babenko V.F., Kofanov V.A. and Pichugov S.A.* Inequalities of Kolmogorov type and Approximation of function classes // Abstracts of the 3rd Int. Conf. on Functional Analysis and Approx. Theory, Acquafereda di Maratea, September 23–28, 1996. – Italy, 1996. – P. 24.
59. *Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.* Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Proc. of Mannheim Conf. "Multivariate Approximation and Splines", 1996 / G. Nurnberger, J. Schmidt, G. Walz (eds.). – 1997. – P. 1–12.
60. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О точных неравенствах типа Ландау–Адамара–Колмогорова для функций многих переменных // Докл. РАН. – 1997. – **356**, № 1. – С. 7–9.
61. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Об аддитивных неравенствах для норм промежуточных производных // Там же. – № 2. – С. 154–156.
62. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S.A.* Exact inequalities of Kolmogorov type for multivariate function and their applications // East J. on Approx. – 1997. – **3**, N 2. – P. 155–188.
63. *Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their aplications // Ibid. – N 3. – P. 351–376.
64. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О точных неравенствах типа Ландау–Колмогорова–Хермандера на полуоси // Доп. НАН України. – 1997. – № 4. – С. 34–38.
65. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных функций, определенных на конечном интервале // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 5. – С. 619–628.
66. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства типа Колмогорова для операторов и экстремальные задачи теории приближений // Докл. РАН. – 1997. – **356**, № 1. – С. 439–441.
67. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О точных неравенствах для промежуточных производных дифференцируемых отображений банаховых пространств // Доп. НАН України. – 1997. – № 1. – С. 22–25.
68. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О точных неравенствах типа Колмогорова в случае малых гладкостей // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 11–15.
69. *Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.* Inequalities of Kolmogorov Type and Some Their Applications in Approximation Theory // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Serie II, Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223–237.
70. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных дифференцируемых отображений банаховых пространств // Мат. заметки. – 1998. – **63**, № 3. – С. 332–342.
71. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О точных неравенствах типа Колмогорова в случае малых гладкостей // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 11–140.

72. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Некоторые новые точные неравенства типа Колмогорова для периодических функций // Там же. – № 7. – С. 7–10.
73. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О точных неравенствах типа Колмогорова, учитывающих число перемен знака производных // Там же. – № 8. – С. 12–16.
74. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства типа Надя для периодических функций // Тез. докл. Междунар. конф. “Теория приближений и гармонический анализ” (Россия, Тула, 26–29 мая 1998 г.). – Тула, 1998. – С. 29.
75. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Некоторые точные неравенства типа Колмогорова для периодических функций // Ряди Фур’є: Теорія і застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 1998. – Т. 20. – С. 30–42.
76. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства типа Надя для периодических функций // Сучасні проблеми математики: Матер. Міжнар. наук. конф. – Чернівці–Київ, 1998. – Ч. 1. – С. 9–11.
77. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Сравнение аппроксимативных свойств обобщенных полиномов и сплайнов // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1011–1020.
78. *Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.* On the exact inequalities of Kolmogorov type and some of their applications // Themistocles M. Rassias Editor. – Palm Harbor: Hadronic Press. – 1999. – P. 1–50.
79. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О неравенствах типа Ландау–Колмогорова–Хермандера на полуоси // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 2. – С. 175–185.
80. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства типа Надя для периодических функций // Доп. НАН України. – 2000. – № 6. – С. 7–10.
81. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Точные неравенства типа Колмогорова с ограниченной старшей производной в случае малых гладкостей // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 10. – С. 1298–1308.
82. *Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.* Comparison of rearrangement and Kolmogorov–Nagy type inequalities for periodic functions // APPROXIMATION THEORY: A volume dedicated to Blagovest Sendov (B. Bojanov, Ed.). – Darba, Sofia, 2002. – P. 24–53.
83. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства типа Колмогорова для периодических функций с ограниченной вариацией старшей производной // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 315–321.
84. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О неравенствах типа Колмогорова с интегрируемой старшей производной // Там же. – № 11. – С. 1694–1697.
85. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Сравнение точных констант в неравенствах для производных на вещественной прямой и окружности // Там же. – 2003. – **55**, № 5. – С. 579–589.
86. *Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Неравенства типа Бернштейна для L-сплайнов // Там же. – 1993. – **45**, № 1. – С. 10–20.

87. *Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Обобщение некоторых экстремальных свойств сплайнов // Там же. – 1995. – **47**, № 3. – С. 403–407.
88. *Babenko V.F., Rassias T.M.* On Exact Inequalities of Hardy–Littlewood–Polya Type // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 2000. – **245**. – P. 570–593.
89. *Бабенко В.Ф., Пичугов С.А.* Замечание к неравенству А.Н. Колмогорова // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1980. – С. 14–17.
90. *Бабенко В.Ф., Пичугов С.А.* Неравенства типа Бернштейна для полиномиальных сплайнов в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 420–422.
91. *Бабенко В.Ф., Пичугов С.А.* Об одном приеме Стейна // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1991. – С. 7–10.
92. *Бабенко В.Ф., Самаан О.* О неравенствах типа Колмогорова для дифференциальных операторов и некоторых их приложениях // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 1999. – **4**. – С. 6–12.
93. *Бабенко В.Ф., Селиванова С.А.* Связь между неравенствами типа Колмогорова для периодических и непериодических функций // Тези доп. II школи “Ряди Фур’є: Теорія і застосування” (Кам’янець-Подільський, 30 червня – 5 липня 1997 р.). – Київ, 1997. – С. 19–20.
94. *Бабенко В.Ф., Селиванова С.А.* О неравенствах типа Колмогорова для периодических и непериодических функций // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Дніпропетр. нац. ун-т, 1998. – С. 91–95.
95. *Бабенко В.Ф., Селиванова С.А.* О связи между некоторыми неравенствами типа Колмогорова для периодических и непериодических функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 2. – С. 147–157.
96. *Бабенко В.Ф., Уэдраого Ж.Б.* О точных константах в неравенствах для норм производных на конечном отрезке // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 117–119.
97. *Babenko V.F., Churilova M.G.* On the Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives // East J. on Approx. – 2002. – **8**, N 4. – P. 437–446.
98. *Bagfdasarov S.K.* Zolotarev ω-polynomials in $W^r H^\omega[0,1]$ // J. of Approx. Theory. – 1997. – **90**. – P. 340–378.
99. *Бадков В.М.* Асимптотически экстремальные свойства полиномов, ортогональных с весом, имеющим сингулярность // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1992. – **198**. – С. 37–82.
100. *Bang T.* Une inegalite de Kolmogoroff et les fonctions presque-periodiques // Meddelelser Kjobenhavn. – 1941. – **19**, N 4. – P. 28.
101. *Бари Н.К.* Об обобщении неравенств С.Н. Бернштейна и А.А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**. – С. 159–176.
102. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

103. *Bennewitz C.* A general version of the Hardy–Littlwood–Polya–Eweritt (HELP) inequality // Proc. Roy. Soc. Edinburg A. – 1984. – **97**. – P. 9–20.
104. *Bennewitz C.* The HELP inequality in regular case // Internat. Ser. Num. Math. – 1987. – **18**. – P. 337–346.
105. *Benson D.C.* Inequalities involving integrals of function and their derivatives // Math. Anal. Appl. – 1967. – **17**. – P. 292–308.
106. *Бердышев В.И.* Связь между неравенством Джексона и одной геометрической задачей // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 3. – С. 327–338.
107. *Бердышев В.И.* Наилучшее приближение в $L[0,\infty)$ оператора дифференцирования // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 5. – С. 477–481.
108. *Бернштейн С.Н.* Полное собрание трудов. Т. 2. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 630 с.
109. *Бесов О.В.* Продолжение функций за пределы области с сохранением дифференциально-разностных свойств // Мат. сб. – 1965. – **66**, № 1. – С. 80–96.
110. *Бесов О.В.* Мультипликативные оценки для интегральных норм функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1974. – **131**. – С. 3–15.
111. *Бесов О.В., Ильин И.П., Никольский С.М.* Интегральные представления и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
112. *Bollobas B.* The spatial numerical range and powers of an operator // J. London Math. Soc. – 1973. – **72**. – P. 435–440.
113. *Боссе Ю.Г.* О неравенствах между производными // Сб. работ студ. научн. кружков МГУ. – 1937. – **1**. – С. 68–72.
114. *Boyadziev K.N.* An inequality for bounds of successive derivatives // The Math. Student. – 1982. – **50**. – P. 214–218.
115. *Boyadziev K.N.* A many-variable Landau–Kolmogorov inequality // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – **101**. – P. 123–129.
116. *Bojanov B.D.* An extension of the Markov inequality // J. Approx. Theory. – 1982. – **35**. – P. 181–190.
117. *Bojanov B.D., Varma A.K.* On a polynomial inequality of Kolmogorov type // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – **124**, N 2. – P. 491–496.
118. *Bojanov B.D., Naidenov N.* An extension of the Landau–Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. d'Analyse Mathematique. – 1999. – **78**. – P. 263–280.
119. *Bradly R.W. and Everitt W.N.* On an inequality of Hardy and Littlewood // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1973. – **74**, 72A. – P. 179–186.
120. *Bradly J.S., Everitt W.N.* On some inequality $\|f''\|^2 \le K\|f\|\|f^{(4)}\|^2$ // Quartely J. Math. – 1974. – **25**. – P. 241–252.
121. *Brown R.C., Hinton D.B.* Sufficient conditions for weighted Gabushin inequalities // Časopis Pěst. Mat. – 1986. – **111**. – P. 113–122.
122. *Брудный Ю.А.* Аппроксимация функций многих переменных квазиполиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 3. – С. 565–584.

123. *Буренков В.И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – **156**. – С. 22–29.
124. *Буренков В.И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II // Там же. – 1986. – **173**. – С. 38–49.
125. *Буренков В.И., Гусаков В.А.* О точных константах в теоремах вложения Соболева. III // Там же. – 1993. – **204**.
126. *Буслаев А.П.* О приближении оператора дифференцирования // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 5. – С. 731–742.
127. *Буслаев А.П.* О точных константах и неравенства для производных // Школа по теории операторов в функциональных пространствах. – Минск, 1982. – С. 29.
128. *Буслаев А.П., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* О существовании экстремальной функции в неравенствах для производных // Мат. заметки. – 1982. – **32**, № 6. – С. 823–834.
129. *Буслаев А.П., Тихомиров В.М.* О неравенствах для производных в многомерном случае // Там же. – 1979. – **25**, № 1. – С. 59–74.
130. *Varma A.K.* A new characterization of Hermite polynomials // Acta Math. Hungar. – 1987. – **49**. – P. 166–172.
131. *Weil H.* Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrocherer Ordnung // Viertelzahleschrift natur Gessel. Zürich. – 1917. – **62**. – P. 296–302.
132. *Габушин В.Н.* Неравенства для норм функций и их производных в метриках L_p // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 3. – С. 291–298.
133. *Габушин В.Н.* Точные константы в неравенствах между нормами производных функций // Там же. – 1968. – **4**, № 2. – С. 221–232.
134. *Габушин В.Н.* О наилучшем приближении дифференциальных операторов на полуоси // Там же. – 1969. – **6**, № 3. – С. 573–582.
135. *Габушин В.Н.* Наилучшие приближения функционалов на некоторых множествах // Там же. – 1970. – **8**, № 5. – С. 551–562.
136. *Габушин В.Н.* О наилучшем приближении оператора дифференцирования в метрике L_p // Там же. – 1972. – **12**, № 5. – С. 531–538.
137. *Габушин В.Н.* К задаче о наилучшем приближении операторов // Методы решения условно корректных задач: Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1975. – Вып. 17. – С. 90–107.
138. *Габушин В.Н.* Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \leq \infty$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 40. – С. 869–892.
139. *Габушин В.Н.* О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой // Мат. заметки. – 1976. – **6**, № 5. – С. 573–582.
140. *Габушин В.Н.* Некоторые неравенства между производными функций // Методы регуляризации неустойчивых задач: Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1976. – Вып. 23. – С. 20–26.
141. *Габушин В.Н.* Неравенства для производных решений обыкновенных дифференциальных уравнений в метриках L_p $(0 < p \leq \infty)$ // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 10. – С. 1662–1670.

142. *Габушин В.Н.* Неравенства между производными в метриках L_p $(0 < p \leq \leq \infty)$ для функций многих переменных и оптимальное дифференцирование функций // Науч. докл. УрОРАН, Ин-т математики. – 1988. – 56 с.
143. *Галеев Э.М.* Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 2. – С. 197–212.
144. *Gagliardo E.* Ulterori properiata di alcune classi di funzioni in piu variabili // Ricerche di Mat. – 1959. – **8**. – С. 24–51.
145. *Halperin I., Pitt H.* Integral inequlities connected with differential operators // Duke Math. J. – 1938. – **4**. – P. 613–625.
146. *Гейсберг С.П.* Обобщение неравенства Адамара // Исследование по некоторым проблемам конструктивной теории функций: Сб. науч. тр. ЛОМИ. – Ленинград. – 1965. – **50**. – С. 42–54.
147. *Гейсберг С.П.* Дробные производные ограниченных на оси функций // Изв. вузов. Математика. – 1968. – **78**, № 11. – С. 51–69.
148. *Goldstein J.A.* On the Hardy–Landau–Littlewood inequality // Noteces Amer. Math. Soc. – 1976. – **23**. – A-162.
149. *Goldstein J.A.* Improvements in the Hardy–Landau–Littlewood inequality // Ibid. – A-486–487.
150. *Goldstein J.A.,Kwong M.K., Zettl Z.* Weighted Landau Inequalities // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – **95**. – P. 20–28.
151. *Gorny A.* Sur les fonctions indefiniment derivables sur tout l'axe reel // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1938. – **206**. – P. 733–735.
152. *Gorny A.* Sur les maxima des modules d'une fonction et de ses derivees // Ibid. – P. 1245–1247.
153. *Gorny A.* Sur les fonctions indefiniment derivables // Ibid. – P. 1872–1874.
154. *Gorny A.* Contribution a l'etude des fonctions derivables d'une variable reelle // Acta Math. – 1939. – **71**. – P. 317–358.
155. *Goodman T.N.T., Lee S.L.* Landau and Hardy–Littlewood–Polya inequalities involving derivatives of functions // SEA Bull. Math. – 1978. – **2**. – P. 82–100.
156. *Duffin R.J., Scaeffer A.C.* A refinement of an inequality of brothers Markoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1941. – **50**. – P. 517–528.
157. *Jackson D.* Certain problems of closest approximations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – P. 889–906.
158. *Djordjević R.Ž., Milovanović.* A generalization of E. Landau's theorem // Univ. Beograd Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. – 1975. – N 498–541. – P. 97–106.
159. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
160. *Дзядык В.К., Дубовик В.А.* К проблеме А.Н. Колмогорова о зависимости между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 3. – С. 246–259.
161. *Дзядык В.К., Дубовик В.А.* К неравенствам А.Н. Колмогорова между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Там же. – 1975. – **27**, № 3. – С. 291–299.

162. *Динь-Дзунг, Тихомиров В.М.* О неравенствах для производных в L_2-метрике // Вест. МГУ. Сер. мат., мех. – 1979. – № 2. – С. 7–11.
163. *Ditzian Z.* Some Remarks on Inequalities of Landau and Kolmogorov // Aeq. Math. – 1975. – **12**. – P. 145–151.
164. *Ditzian Z.* Discrete and shift Kolmogorov type inequalities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1983. – A 93. – P. 307–317.
165. *Ditzian Z.* Multivariate Landau–Kolmogorov-type inequality // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1989. – **3**. – P. 335–350.
166. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of Smoothness. – Springer-Verlag, 1987. – 300 p.
167. *Ditzian Z., Jiang Z.D., Leviatan D.* Simultaneous polynomial approximation // SIAM J. Math. Anal. – 1993. – **24**, N 6. – P. 1652–1664.
168. *Domar Y.* An extremal problem related to Kolmogorov's inequality for bounded functions // Ark. Mat. – 1968. – **7**. – P. 433–441.
169. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964. – 430 с.
170. *Звягинцев А.И.* Неравенства Колмогорова для $n = 4$ // Латв. мат. ежегодник. – 1982. – **26**. – С. 165–175.
171. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 1–2.
172. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
173. *Cavaretta A.S.* An elementary proof of Kolmogorov's theorem // Amer. Math. Monthly. – 1974. – **81**. – P. 480–486.
174. *Cavaretta A.S.* One-side inequalities for the successive derivatives of a function // Bull. Amer. Math. Soc. – 1976. – **82**. – P. 303–305.
175. *Cavaretta A.S.* A refinement of Kolmogorov's inequality // J. Approx. Theory. – 1979. – **27**. – P. 45–60.
176. *Kallioniemi H.* On inequalities between the uniform bounds of derivatives of a complex-valued function of a real variable: Inaugural dissertation. – Upsa Univ. (Sweden), 1970.
177. *Kallioniemi H.* On bounds for derivatives of complex-valued function on a compact interval // Math. Scand. – 1976. – **39**. – P. 295–314.
178. *Kallioniemi H.* On representation formulas for intermediate derivatives // Ibid. – P. 315–326.
179. *Kallman R.R., Rota G.C.* On the inequality $\|f'\|^2 \le 4\|f\| \cdot \|f''\|$, in "Inequalities II" / O. Shisha, Ed. – New York–London, 1970. – P. 187–192.
180. *Cartan H.* Sur Les classes de fonctions definies par des inegalites portant sur leurs derivees successives. – Paris, 1940. – 33 p.
181. *Cartan H.* Calcul differentiel. Formes differentielles. – Hermann, Paris, 1967.
182. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.
183. *Kato T.* On an inequality of Hardy, Littlewood and Polya // Advances in Math. – 1971. – **7**. – P. 217–218.
184. *Kato T., Satake J.* An algebraic theory of Landau–Kolmogorov inequalities // Tôhuku Math. J. – 1981. – **33**. – P. 421–478.

185. *Кашин Б.С.* Замечание об оценке функций Лебега ортонормированных систем // Мат. сборник. – 1978. – **3**. – С. 380–385.
186. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 550 с.
187. *Kwong M.K., Zettl A.* An extension of Hardy–Littlewood inequality // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – **77**. – P. 175–212.
188. *Kwong M.K., Zettl A.* Remarks on best constants for norm inequalities among powers of an operator // J. Approx. Theory. – 1979. – **3**. – P. 249–258.
189. *Kwong M.K., Zettl A.* Ramification of Landau's inequality // Proc. Roy. Soc. Edinburg. – 1980. – **86A**. – P. 175–212.
190. *Kwong M.K., Zettl A.* Norm inequalities for derivatives // Lecture Notes in Mathematics. – Berlin, 1980. – **846**. – P. 227–243.
191. *Kwong M.K., Zettl A.* Norm Inequalities of product form in weighted L^p-spaces // Proc. Roy. Soc. Edinburg. – 1981. – **A89**. – P. 293–307.
192. *Kwong M.K., Zettl A.* Landau's inequality // Ibid. – 1984. – **A97**. – P. 161–163.
193. *Kwong M.K., Zettl A.* Norm Inequalities for Derivatives and Differences // Berlin etc. Springer-Verlag, 1992. – 150 p. (Lecture Notes in Mathematics. V. 1536).
194. *Certain M.W., Kurtz T.G.* Landau–Kolmogorov inequalities for semigroups and group // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – **63**. – P. 226–230.
195. *Клоц Б.Е.* Линейные уклонения классов $\tilde{W}_p^\alpha$ и приближения в пространствах мультипликаторов // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 1. – С. 97–108.
196. *Клоц Б.Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Там же. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21–32.
197. *Kallioniemi H.* On representation formulas for intermediate derivatives // Math. Scand. – 1976. – **2**, N 39. – P. 315–326.
198. *Kolmogorov A.N.* Une generalisation de J. Hadamard entre les bornes superieures des derivees succesives d'une fonction // C. R. Acad. Sci. – 1938. – **207**. – P. 764–765.
199. *Kolmogorov A.N.* On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval // Uchenye zapiski MGU. Math. – 1939. – **30**, N 3. – P. 3–13.
200. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. тр. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252–263.
201. *Kolyada V.I.* Rearrangements of functions and Embeddings of anisotropic spaces of Sobolev type // East J. on Approx. – 1998. – **4**, N 2. – P. 111–199.
202. *Коновалов В.Н.* Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 67–78.
203. *Коновалов В.Н.* Дополнение к неравенству Колмогорова // Там же. – 1980. – **27**, № 2. – P. 209–215.
204. *Конягин С.В.* О неравенстве В.А. Маркова для многочленов в метрике L_1 // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 117–125.

205. *Корнейчук Н.П.* О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**, № 4. – С. 748–751.
206. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 1. – С. 93–124.
207. *Корнейчук Н.П.* Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса функций другим // Там же. – 1972. – **36**, № 2. – С. 423–434.
208. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 320 с.
209. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
210. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
211. *Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
212. *Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства для верхних граней функционалов и некоторые их применения в теории аппроксимации // Доп. НАН України. – 1999. – № 1. – С. 24–29.
213. *Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О неравенствах для верхних граней функционалов на классах W^rH^ω и некоторые их применения в теории аппроксимации // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 66–84.
214. *Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
215. *Корнейчук Н.П., Лигун А.А.* О приближении класса классом и экстремальных подпространствах пространства L_1 // Anal. math. – 1981. – **7**, № 2. – С. 107–119.
216. *Кофанов В.А.* О неравенствах типа Ландау–Колмогорова–Хермандера на отрезке и вещественной прямой // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1676–1688.
217. *Кофанов В.А.* Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов // Там же. – 2001. – **53**, № 5. – С. 597–609.
218. *Кофанов В.А.* Об одном усилении неравенства Колмогорова // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту. – 2001. – С. 63–67.
219. *Kofanov V.A.* Some exact inequalities of Kolmogorov type // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, N 3. – P. 1–8.
220. *Кофанов В.А.* Усиление теоремы сравнения и неравенства Колмогорова и их приложения // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1348–1355.
221. *Kofanov V.A.* Comparison of Rearrangements and Inequalities of Various Metrics // East J. on Approx. – 2002. – **8**, N 3. – P. 311–325.
222. *Кофанов В.А.* О неравенствах типа Колмогорова и Бернштейна // Праці Українського математичного конгресу, 2001 (Теорія наближень та гармонічний аналіз). – Київ: Ін-т математики, 2002. – С. 84–99.

223. *Kofanov V.A.* Exact Inequalities of Kolmogorov Type and Comparison of Korneichuk's Σ-Rearrangements // East J. on Approx. – 2003. – **9**, N 1. – P. 63–94.
224. *Kraljevič H., Kurepa S.* Semigroups on Banach spaces // Clasnil Mat. – 1970. – **5**. – P. 109–117.
225. *Kraljevič H., Pečarič J.E.* Some Landau's type inequalities for infinitesimal generators // Aeq. Math. – 1990. – **40**. – P. 147–153.
226. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 398 с.
227. *Kurepa S.* Remark on the Landau inequality // Aeq. Math. – 1970. – **4**. – P. 240–241.
228. *Купцов Н.П.* Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0,\infty)$ // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1975. – **138**. – С. 94–117.
229. *Купцов Н.П.* О точных константах в неравенствах между нормами функций и их производных // Мат. заметки. – 1987. – **41**, № 3. – С. 313–319.
230. *Labelle G.* Concerning polynomials on the unit interval // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **20**. – P. 321–326.
231. *Lacković I.B., Stanković M.S.* A note on a theorem of E. Landau // Univ. Beograd. Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N. 381–409. – 1972. – P. 113–116.
232. *Landau E.* Über einen Satz des Herrn Littlewood // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. – 1913. – **35**. – P. 177–188.
233. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43–49.
234. *Landau E.* Die Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion // Meddelelser Kobenhavn. – 1925. – **6**, N 10. – P. 49.
235. *Landau E.* Über einen Satz von Herrn Esclangen // Math. Ann. – 1929. – **102**. – P. 177–188.
236. *Лигун А.А.* Точные неравенства для верхних граней полунорм на классах периодических функций // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 5. – С. 647–654.
237. *Ligun A.A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Analysis Math. – 1976. – **2**, N 1. – C. 11–40.
238. *Лигун А.А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 913–926.
239. *Лигун А.А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Там же. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385–391.
240. *Лигун А.А.* Точные константы в неравенствах типа Джексона // Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами / А.А. Лигун, В.Е. Капустян, Ю.И. Волков. – Киев: Вища школа, 1990. – С. 5–74.
241. *Литвинец П.Д., Фильштинский В.А.* Об одной теореме сравнения и ее применениях // Теория приближения функций и ее приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 97–107.

242. *Littlewood J.E.* The conferense of Abel's theorem on power series // Proc. London Math. Soc., Ser. 2. – 1910–1911. – V. 9. – P. 434–448.
243. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. – М.: Наука, 1973. – 143 с.
244. *Lorentz G.G.* Convergence Theorems for polynomials with Many zeros // Math. Z. – 1984. – **186**. – P. 117–123.
245. *Любич Ю.И.* О неравенствах между степенями линейных операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 825–864.
246. *Магарил-Ильяев Г.Г.* О неравенствах Колмогорова на полупрямой // Вест. МГУ. Сер. мат., мех. – 1976. – **5**. – С. 33–41.
247. *Магарил-Ильяев Г.Г.* Задача о промежуточных производных // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 1. – С. 81–96.
248. *Магарил-Ильяев Г.Г.* Вложение обобщенных соболевских классов и неравенства для производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1980.
249. *Магарил-Ильяев Г.Г.* Неравенства для производных на оси // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1983. – **161**. – С. 183–194.
250. *Магарил-Ильяев Г.Г.* Неравенства типа Колмогорова для производных // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 12. – С. 73–100.
251. *Magaril-Il'jaev G.G., Tihomirov V.M.* On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line // Analysis Mathematica. – 1981. – **7**, N 1. – P. 37–47.
252. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
253. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 267 с.
254. *Markov V.A.* On functions deviating least from zero in given interval. – St. Petersburg, 1892.
255. *Маторин А.П.* О неравенствах между максимумами абсолютных значений функций и ее производных на полуоси // Укр. мат. журн. – 1955. – **7**. – С. 262–266.
256. *Mairhuber I.C., Schoenberg I.I., Williamson R.E.* On variation diminishing transformation on the circle // Rend. Circ. mat. Palermo (2). – 1959. – N 8. – P. 241–270.
257. *Milovanović G.V.* On some integral inequalities // Univ. Beograd. Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N 498–541. – 1975. – P. 119–124.
258. *Milovanović G.V.* Extremal Problems for Polynomials; Old and New Results // Open problems in approxim. Theory: Proc. of Int. Conference Voneshta Voda. June 18–24, 1993. – Voneshta Voda, 1993. – P. 138–155.
259. *Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Russias Th. M.* Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros, World Scientific Publishers. – Singapore, New Jersey, 1994.
260. *Mitrinović D.S.* Analytic inequalities. – Berlin: Springer-Verlag, 1970.
261. *Mitrinović D.S., Pečarić J.E.* Remarks on the paper "A note on Everitt type integral inequality" of B.G. Pachpate // Tamkang J. Math. – 1990. – **21**. – P. 169–170.

262. *Mitrinović D.S., Pečharić J.E., Fink A.M.* Inequalities Involving Functions and Their Integrals and derivatives. – Dordrecht, Boston, London: Kluver Academic Publishers, 1991.
263. *Micchelli Ch.* On an optimal method for the numerical differentiation of smooth functions // J. Approximation Theory. – 1976. – **18**. – P. 189–204.
264. *Mordell L.J.* The magnitude of the derivative of a function // J. London. Math. Soc. – 1928. – **3**. – P. 119–121.
265. *Müller W.* Über eine Ungleichungen zwischen den Normen von f, f' and f'' // Math. Z. – 1962. – **78**. – P. 420–422.
266. *Sz.-Nagy B.* Über Integralungleichungen zwischen einer Function und ihrer Ableitung // Acta Sci. Math. – 1941. – **10**. – P. 64–74.
267. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Об одной экстремальной задаче для классов сверток, не увеличивающих осцилляцию // Вест. МГУ. Сер. мат. и мех. – 1982. – **5**. – С. 3–7.
268. *Neder L.* Abschätzungen für die Ableitungen einer reellen Function eines reellen Arguments // Math. Z. – 1930. – **31**. – P. 356–365.
269. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 207–256.
270. *Никольский С.М.* О наилучшем линейном методе приближения многочленами в среднем дифференцируемых функций // ДАН СССР. – 1947. – **58**, № 2. – С. 185–188.
271. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 7–10.
272. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
273. *Nirenberg L.* Remarks on strongly elliptic partial differential equations // Cor. Pure Appl. Math. – 1955. – **8**. – P. 648–674.
274. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa. Ser. III. Fasc. II. – 1959. – **13**. – P. 24–51.
275. *Оловянишников В.М.* О неравенствах для верхних граней последовательных производных на полуоси // Усп. мат. наук. – 1951. – **642**, № 2. – С. 167–170.
276. *Ostrovski A.* Über die Absolutabweichung einer differentierbaren Function von ihrem Integralmittelwert // Commt. Math. Helv. – 1938. – **10**. – P. 226–227.
277. *Pachpatte B.C.* A note on Everitt type integral inequality // Tamkang J. Math. – 1987. – **80**. – P. 7–10.
278. *Peetre J.* Approximation of linear operators // Тр. Междунар. конф. по конструктивной теории функций, Варна, 1970. – София, 1972. – С. 245–263.
279. *Pinkus A.* Some extremal properties of perfect splines and the pointwise Landau problem on the finite interval // J. Approx. Theory. – 1978. – **23**. – P. 37–64.
280. *Pinkus A.* N-widts in approximation theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1985.
281. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L_p Theories of Best Approximation // J. Approx. Theory. – 1982. – P. 148–168.

282. *Пичугов С.А.* О приближении классов периодических функций квазиполиномами // Исследования по соврем. пробл. суммирования и приближения функций и их прилож. – Днепропетровск, 1975. – **6**. – С. 77–81.
283. *Пичугов С.А.* Точные оценки приближения в L_p функциями вида $\phi(x) + +\psi(y)$ // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 122–125.
284. *Пичугов С.А.* K-интерполяция в задачах равномерного приближения функций // Там же. – 1992. – **44**, № 4. – С. 523–533.
285. *Рафальсон С.З.* Одно неравенство между нормами функций и их производных в интегральной метрике // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 1. – С. 77–82.
286. *Родов А.М.* Соотношения между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Изв. АН СССР. – 1946. – **10**. – С. 257–270.
287. *Родов А.М.* Достаточные условия существования функции действительного переменного с заданными верхними гранями модулей самой функции и ее пяти последовательных производных // Ученые зап. Бел. гос. ун-та. – 1954. – **19**. – С. 65–72.
288. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с.
289. *Russel A.* Integral inequalities and spectral theory of certain ordinary differential operators: Ph. D. thesis, University of Dundee, Scortland, U.K. – 1987.
290. *Самаан О.* Неравенства типа Колмогорова–Хермандера для дифференциальных операторов // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2000. – **5**. – С. 134–140.
291. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
292. *Sato M.* The Landau inequality for bounded intervals with $\|f^{(3)}\|$ finite // J. Approx. Theory. – 1982. – **34**. – P. 159–166.
293. *Sato M., Sato R.* A simple proof of the Chui-Smith theorem for Landau's problem // Colloquium Math. – 1982. – **47**. – P. 119–122.
294. *Соляр В.Г.* Об одном неравенстве между нормами функции и ее производных // Изв. вузов. Математика. – 1976. – **2**. – С. 165–168.
295. *Stein E.M.* Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – **65**, N 3. – P. 582–592.
296. *Стечкин С.Б.* Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta sci. math. – 1965. – **26**, № 3–4. – С. 225–230.
297. *Стечкин С.Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 137–148.
298. *Стечкин С.Б.* О неравенствах между верхними гранями производных произвольной функции на полуоси // Там же. – № 6. – С. 665–674.
299. *Стечкин С.Б.* Избранные труды. Математика. – М.: Наука. Физматлит, 1998. – 384 с.
300. *Субботин Ю.Н.* О кусочно-полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 1. – С. 24–29.

301. *Субботин Ю.Н.* Поперечники класса $W^r L$ в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями // Там же. –1970. – **7**, № 1. – С. 43–52.
302. *Субботин Ю.Н.* Экстремальная функциональная интерполяция и приближение сплайнами: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Свердловск, 1973.
303. *Sun Yongsheng.* Some remarks on the optimal subspaces of a convolution class with NCVD kernel // Approx. Theory Appl. – 1999. – **15**, N 4. – P. 1–5.
304. *Sun Yongsheng.* Optimal subspaces for a periodic convolution class with B-kernel // EJA. – 2000. – **6**, N 1. – P. 53–63.
305. *Sun Yongsheng, Wang Haping.* A generalized version of Hardy–Littlewood–Polya inequality and some related optimal problems in approximation theory // Ibid. – 2001. – **7**, N 3. – P. 375–380.
306. *Тайков Л.В.* Одно обобщение неравенства С.Н. Бернштейна // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1965. – **78**. – С. 43–47.
307. *Тайков Л.В.* Об одном круге экстремальных проблем для тригонометрических полиномов // Усп. мат. наук. – 1965. – **20**. – С. 205–211.
308. *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем классов периодических функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 61–70.
309. *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 155–162.
310. *Тайков Л.В.* Неравенства типа Колмогорова и формулы численного дифференцирования // Там же. – 1967. – **4**, № 2. – С. 223–238.
311. *Talenti G.* Une disuguaglianze fra u, u', u'' // Boll. Un. Mat. Ital. – (4),11, Suppl. fasc. – 1976. – **3**. – P. 375–388.
312. *Темляков В.Н.* Аппроксимация функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1986. – С. 178.
313. *Тимофеев В.Г.* Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 5. – С. 676–689.
314. *Тимошин О.А.* Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости // Там же. – 1984. – **36**, № 3. – С. 369–375.
315. *Тимошин О.А.* О наилучшем приближении дифференциальных операторов с частными производными // Там же. – 1989. – **46**, № 1. – С. 78–85.
316. *Тимошин О.А.* Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков // Докл. РАН. – 1995. – **344**, № 1. – С. 20–22.
317. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Усп. мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81–120.
318. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 304 с.
319. *Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ. Т. 14. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). – М.: Наука, 1987. – 101 с.

320. *Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.Г.* Неравенства для производных: Комментарии к избранным трудам А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1985. – С. 387–390.
321. *Trebels W., Westphal.* A note on the Landau–Kallman-Rota–Hille Inequality // Linear Operators and Approximations / P.L. Butzer, J.-P. Kahane, B. Sz.-Nagy, eds. – Basel–Stuttgart, 1971. – P. 115–119.
322. *Upton C.J.F.* On extensions of inequalities of Kolmogoroff and others and some applications to almost periodic functions // Glasgow Maths. J. – 1972. – **13**. – P. 1–16.
323. *Fink A.M.* Kolmogorov–Landau inequalities for monotone functions // J. Math. Appl. – 1992. – **90**. – P. 251–258.
324. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Contribution to the arithmetic theory of series // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **11**, N 2. – P. 411–478.
325. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some integral inequalities connected with the calculus of variations // Quart. J. Math. (Oxford). – 1932. – **3**. – P. 242–252.
326. *Hardy G.H., Landau E., Littlewood J.E.* Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives or analitic function // Math. Z. – 1935. – **39**. – P. 677–695.
327. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G.* Inequalities. – Cambridge, 1934.
328. *Hörmander L.* New proof and generalization of inequality of Bohr // Math. Scand. – 1954. – **2**. – P. 33–45.
329. *Hille E.* Remark on the Landau–Kallman-Rota inequality // Aeq. Math. – 1970. – **4**. – P. 239–240.
330. *Hille E.* Generalization of Landau's inequality to linear operators // Linear Operators and Approximations / P.L. Butzer, J.-P. Kahane, B. Sz.-Nagy, eds. – Basel–Stuttgart, 1971. – P. 20–32.
331. *Hille E.* On the Landau–Kallman-Rota inequality // J. Approx. Theory. – 1972. – **6**. – P. 117–122.
332. *Holbrook J.A.R.* Kallman-Rota inequality for nearly Euclidean spaces // Adv. in Math. – 1974. – **14**. – P. 335–345.
333. *Huang D., Wang J.* The Kolmogorov-type inequalities related with selfconjugate ordinary differential operators (Chinese) // Acta Mech. – 1983. – **26**. – P. 715–722.
334. *Чахкиев М.А.* Линейные дифференциальные операторы с действительным спектром и оптимальные квадратурные формулы // Изв. АН СССР. – 1984. – **48**. – С. 1078–1109.
335. *Chen W.* Landau–Kolmogorov inequality on a finite interval // Bull. Austral. Math. Soc. – 1993. – **48**. – P. 485–494.
336. *Chen W., Ditzian Z.* Mixed and directional derivatives // Proc. of the Amer. Math. Soc. – 1990. – **108**, N 1. – P. 177–185.
337. *Chen Dirong, Sun Yongsheng.* Hardy–Littlewood–Polya inequality for differential operator and some related optimal problems // Approx. Theory Appl. – 1992. – **8**, N 1. – P. 50–58.
338. *Tcheng, Tchou-Yun.* Sur les inegalites differentielles. – Paris, 1934. – 41 p.
339. *Chernoff P.* Optimal Landau–Kolmogorov inequalities for dissipative operators in Hilbert and Banach spaces // Adv. in Math. – 1979. – **34**. – P. 137–144.

340. *Chui C.K., Smith P.W.* A note on Landau's problem for bounded intervals // Amer. Math. Monthly. – 1975. – **82**. – P. 927–929.

341. *Шадрин А.Ю.* Неравенства типа Колмогорова и оценки сплайн-интерполяции для периодических классов W_2^m // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 4. – С. 132–139.

342. *Шадрин А.Ю.* О точных постоянных в неравенствах между L_∞-нормами производных на конечном отрезке // Докл. РАН. – 1992. – **326**, № 1. – С. 50–53.

343. *Shadrin A.Yu.* To the Landau–Kolmogorov Problem on a Finite Interval // Open Problems in Approxim. Theory in "Proc. of Int. Conference Voneshta Voda. June 18–24, 1993". – Voneshta Voda, 1993. – P. 192–204.

344. *Sharma A., Tzimbalario J.* Some inequalities between derivatives on bounded intervals // Delta. – 1976. – **6**. – P. 78–91.

345. *Sharma A., Tzimbalario J.* Landau-type inequalities for some linear differential operators // Illinois J. Math. – 1976. – **20**. – P. 443–455.

346. *Sharma A., Tzimbalario J.* Landau-type inequalities for bounded intervals // Period. Math. Hungar. – 1978. – **93**. – P. 175–186.

347. *Schaeffer A.C., Duffin R.I.* On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff vor derivatives of polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. – 1938. – **44**. – P. 289–297.

348. *Шевчук И.А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка. – 1992. – 223 с.

349. *Shoenberg I.J.* On Polya frequency functions. II // Acta. Sci. Math. – 1950. – **12**. – P. 97–106.

350. *Shoenberg I.J.* The elementary cases of Landau's problem inequalities between derivatives // Amer. Math. Monthly. – 1973. – **80**. – P. 121–158.

351. *Shoenberg I.J.* Notes on spline functions. VI: Extremum problems of the Landau-type for the differential operators $D^2 \pm 1$ // Stud. Spline Funct. Approx. Theory. – New York, 1976. – P. 353–369.

352. *Shoenberg I.J.* The Landau problem for the differential operator $D^2 - a^2$ in a circular ring // Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai 19, Fourier Anal. and Approx. Th. – Budapest, 1976. – P. 713–723.

353. *Shoenberg I.J.* The Landau problem for motion in a ring and in bounded continua // Mathematics Research Center Technical Summary Report, Madison, Wisconsin; Amer. Math. Monthly. – 1977. – **84**. – P. 1–12.

354. *Shoenberg I.J.* The Landau problem. I; The case of motion on sets // Nederl. Acad. Wet; Proc., Ser. A. – 1978. – **81**. – P. 276–286.

355. *Shoenberg I.J., Cavaretta A.* Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on halfline // M.R.C. Technical Summary Report, 1970.

356. *Shoenberg I.J., Cavaretta A.* Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on halfline // Proc. of Conf. on Approx. Theory. – Varna, Sofia, 1972. – P. 297–308.

357. *Шилов Г.Е.* О неравенствах между производными // Сб. работ студенческих научных кружков МГУ. – 1937. – С. 17–27.
358. *Evans W.D., Everitt W.N.* A return to the Hardy–Littlewood integral inequality // Proc. Roy. Soc. London (A). – 1982. – **280**. – P. 447–453.
359. *Evans W.D., Everitt W.N.* On an inequality of Hardy–Littlewood type // Proc. Roy. Soc. Edinburg (A). – 1985. – **101**. – P. 131–140.
360. *Everitt W.N.* On an extension to integro-differential inequality of Hardy, Littlewood and Polya // Ibid. – 1971–72. – **69**. – P. 295–333.
361. *Everitt W.N.* Report on certain integral inequalities // Sci Res. Council Symp. on Spectral Theory and Diff. Eq. Univ. of Dundee. – Dundee, 1974.
362. *Everitt W.N.* Integral inequalities and spectral theory // Spectral Theory and Differential Equations (A. Dold and B. Eckmann, eds.) Lect. Notes in Math. – 1975. – **558**. – P. 148–156.
363. *Everitt W.N., Giertz M.* On the integro-differential inequality $\|f'\|_2^2 \leq \leq \|f\|_p \|f''\|_q$ // Math. Anal. Appl. – 1974. – **45**. – P. 639–653.
364. *Everitt W.N., Giertz M.* Some inequalities associated with certin ordinary differential operators // Math. Zeit. – 1972. – **126**. – P. 308–326.
365. *Ятцелев М.Л.* Неравенство между четырьмя верхними гранями последовательных производных на полупрямой // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту. Математика. – 1999. – **4**. – С. 106–111.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ 11

Глава 1. ИСТОКИ 15

1.1. Теорема о производных 15
1.2. Результаты Ландау и Адамара 18
1.3. Другие доказательства результатов Ландау и Адамара 27
1.4. Неравенства для производных с монотонными мажорантами . 35
1.5. Неравенства Харди–Литлвуда в L_2 на полуоси 38
1.6. Неравенства Харди–Литлвуда–Полиа в L_2 на оси и окружности 45
1.7. Обсуждения и постановки задач 47

Комментарии к главе 1 60

Дополнительные результаты к главе 1 61

Глава 2. НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВА И НАДЯ . . . 66

2.1. Идеальные сплайны Эйлера 66
2.2. Теорема сравнения Колмогорова 69
2.3. Неравенство Колмогорова 75
2.4. Существование функции с заданными нормами производных 77
2.5. Доказательство Банга неравенства Колмогорова 79
2.6. Неравенство Стейна 84
2.7. Доказательство Лигуна неравенств Колмогорова и Стейна . . 89
2.8. Теорема сравнения в несимметричном случае 95
2.9. Неравенство Колмогорова в несимметричном случае 101

2.10. Неравенство Надя 102
2.11. Аналог неравенства Надя для периодических функций 112

Комментарии к главе 2 116

Дополнительные результаты к главе 2 118

Г л а в а 3. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАВНОМЕРНЫХ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ НА ПОЛУОСИ 131

3.1. Неравенство Маторина 131
3.2. Доказательство Стечкина неравенства Маторина для функций с ограниченной третьей старшей производной 138
3.3. Неравенство Шенберга–Каваретты и идеальные сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля 141
3.4. Неравенства типа Хермандера на полуоси 147
3.5. Оценки Стечкина констант в неравенствах на полуоси 154
3.6. Неравенство Оловянишникова для кратно-монотонных функций 162

Комментарии к главе 3 164

Дополнительные результаты к главе 3 166

Г л а в а 4. ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕРАВЕНСТВ 171

4.1. Необходимые условия и их геометрическая интерпретация . . 171
4.2. Необходимые и достаточные условия 178
4.3. Критерий существования неравенств для периодических функций 185
4.4. Существование неравенств с дробными производными 186
4.5. Сравнение точных констант в неравенствах для производных функций, заданных на вещественной оси и окружности . . . 195
4.6. Условия существования аддитивных неравенств на конечном интервале 205
4.7. Условия существования неравенств для норм производных почти периодических функций 212

Комментарии к главе 4 217

Дополнительные результаты к главе 4 220

Г л а в а 5. НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННЫЕ С L_2-НОРМАМИ 231

5.1. Неравенства для степеней операторов в гильбертовом пространстве 231
5.2. Уточнение неравенства Харди–Литлвуда–Полиа 241
5.3. Одно неравенство для функций, заданных на отрезке 248
5.4. Аддитивные неравенства типа Харди–Литлвуда–Полиа для периодических функций 251
5.5. Неравенства типа Харди–Литлвуда–Полиа в пространстве $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbf{R})$ 261
5.6. Аддитивные неравенства типа Харди–Литлвуда–Полиа на конечном интервале 272
5.7. Неравенство Тайкова 277
5.8. Аналог неравенства Тайкова для периодических функций . . 279
5.9. Оценка $\left\|x^{(k)}\right\|_2$ через $\|x\|_p$ и $\left\|x^{(2k)}\right\|_{p'}$ на оси и окружности 283
5.10. Неравенство Габушина на полуоси 289
5.11. Асимптотика для точных констант в неравенстве Габушина . 294
5.12. Неравенства типа Харди–Литлвуда–Полиа на полуоси 302

Комментарии к главе 5 317

Дополнительные результаты к главе 5 319

Г л а в а 6. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ 327

6.1. Теоремы сравнения перестановок производных 327
6.2. Неравенство Лигуна и его несимметричные аналоги 336
6.3. Неравенство Лигуна, учитывающее число перемен знака производных 338
6.4. Неравенства для функций с существенно ограниченной старшей производной 344
6.5. Неравенства для функций с интегрируемой старшей производной 350
6.6. Еще одно неравенство для функций с интегрируемой старшей производной 352
6.7. Дальнейшие результаты о сравнении перестановок 354
6.8. Неравенства типа Надя 363
6.9. Сравнение перестановок и неравенства для сопряженных функций 368

6.10. Неравенства для производных полуцелого порядка 375

Комментарии к главе 6 377

Дополнительные результаты к главе 6 379

Глава 7. ПРИЛОЖЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ ТИПА КОЛМОГОРОВА 390

7.1. Задача Стечкина и задача восстановления значений неограниченного оператора 390
7.2. Задача Стечкина для операторов дифференцирования 405
7.3. Теорема эквивалентности 415
7.4. Теорема эквивалентности для опорных функций выпуклых множеств 421
7.5. Приближение класса H^ω классом NW^1_∞ и решение эквивалентных задач 431
7.6. Приложения неравенств типа Колмогорова в теории аппроксимации 437
7.7. Неравенства для верхних граней функционалов как неравенства типа Колмогорова 445
7.8. Поперечники и экстремальные подпространства 458

Комментарии к главе 7 459

Дополнительные результаты к главе 7 461

Глава 8. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ И СПЛАЙНОВ 475

8.1. Неравенства типа Бернштейна для полиномов 475
8.2. Неравенства типа Бернштейна для сплайнов 480
8.3. Неравенства типа Бернштейна для опорных функций классов W^rH^ω 485
8.4. Неравенства типа Никольского для полиномов 490
8.5. Неравенства типа Никольского для сплайнов 497
8.6. О некоторых экстремальных свойствах совершенных сплайнов и моносплайнов 503

Комментарии к главе 8 507

Дополнительные результаты к главе 8 509

Г л а в а 9. ОБЗОР ДРУГИХ РЕЗУЛЬТАТОВ 513

9.1. Задача Колмогорова о функциях с заданными нормами производных 513
9.2. Точные неравенства для норм производных на оси 522
9.3. Точные неравенства для норм производных на полуоси 529
9.4. Точные неравенства для норм производных на окружности . 538
9.5. Об аддитивных неравенствах на отрезке 543

Комментарии к главе 9 549

Дополнительные результаты к главе 9 550

Г л а в а 10. ДОПОЛНЕНИЕ 556

10.1. Наилучшие приближения 556
10.2. Перестановки 559
10.3. Σ-перестановки 562

Список литературы 565

Наукове видання

Національна академія наук України
Інститут математики

БАБЕНКО Владислав Федорович
КОРНЄЙЧУК Микола Павлович
КОФАНОВ Володимир Олександрович
ПІЧУГОВ Сергій Олексійович

НЕРІВНОСТІ ДЛЯ ПОХІДНИХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

(Російською мовою)
Київ, видавництво "Наукова думка"

Художній редактор *Є.І. Муштенко*
Технічний редактор *С.Г. Максимова*
Коректор *Л.М. Козленко*
Комп'ютерна верстка *Д.В. Малишева, П.В. Малишева*

Оригінал-макет підготовлено в Інституті математики НАН України
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

Підп. до друку 12.03.2004. Формат 60×90/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Таймс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 37,00. Ум. фарбо-відб. 37,00.
Обл.-вид. арк. 24,89. Тираж 500 прим. Зам. 3-488.

Видавництво "Наукова думка"
Р. с. № 05417561 від 16.03.95
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

Концерн ВД "Ін Юре"
04107 Київ 107,
вул. Багговутівська, 17–21