Міністерство освіти і науки України

Дніпропетровський національний університет

А.В. СЯСЄВ

Вступ до системи MathCAD

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою
Дніпропетровського національного університету
як навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей

Дніпропетровськ
Видавництво
Дніпропетровського університету
2004

УДК 004.421.2 (075.8)
ББК 32.973.26 – 018я73
С 99

Рецензенти:
кандидат фізико-математичних наук **Т. С. Кагадій**
кандидат фізико-математичних наук **С. В. Чернишенко**

Сясєв А. В.

С 99 Вступ до системи MathCAD: Навч. посіб. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 108 с.

ISBN 966-551-134-3

Викладено основи роботи в системі MathCAD, яка в даний час широко використовується для розв'язування науково-технічних, інженерних та навчальних задач. Можливості пакета MathCAD Professional ілюструються на типових задачах: розв'язування рівнянь і систем (алгебраїчних і диференціальних), побудова графіків, символьне обчислення і т.д. У кінці кожного розділу вміщено контрольні запитання та вправи для самостійного виконання.

Для студентів та аспірантів технічних спеціальностей ДНУ. Посібник може бути доцільниим для тих, хто користується персональними комп'ютерами у науковій, інженерній та навчальній роботі.

ISBN 966-551-134-3 **ББК 32.973.26 – 018я73**

Передмова

Однією з основних галузей застосування персональних комп'ютерів є математичні й науково-технічні розрахунки. Складні обчислювальні задачі, що виникають під час моделювання різних фізичних явищ і процесів, можна розбити на ряд елементарних: обчислення інтегралів, розв’язування алгебраїчних і диференціальних рівнянь та систем і т.д. Для таких задач уже розроблені методи розв’язування, створені математичні системи, доступні для студентів вищих навчальних закладів.

Мета посібника – навчити користуватися найпростішими методами обчислення з використанням сучасних інформаційних технологій. Найбільш придатною для цієї мети є одна із найпотужніших та найефективніших математичних систем – MathCAD, що посідає особливе місце серед безлічі їй подібних (Matlab, Maple, Mathematica і ін.).

MathCAD – це потужне і водночас звичайне універсальне середовище для розв’язування задач у різних галузях науки й техніки, фінансів та економіки, фізики й астрономії, математики та статистики і т. ін. MathCAD залишається єдиною системою, у якій опис розв’язування математичних задач задається за допомогою звичайних математичних формул і знаків. MathCAD дозволяє виконувати як чисельні, так і аналітичні (символьні) обчислення, має надзвичайно зручний математико-орієнтований інтерфейс і прекрасні засоби наукової графіки.

Система MathCAD існує в кількох основних варіантах:

- MathCAD Standard – ідеальна система для повсякденних технічних обчислень. Призначена для масової аудиторії і широкого використання у навчальному процесі;
- MathCAD Professional – промисловий стандарт прикладного використання математики в технічних додатках. Орієнтована на математиків і науковців, які проводять складні й трудомісткі розрахунки;
- MathCAD Professional Academic – пакет програм для професійного використання математичного апарату з електронними підручниками і ресурсами.

Даний посібник орієнтований, головним чином, на використання пакетів ***MathCAD 2000 Professional*** та ***MathCAD 2001i Professional***.

1. ОСНОВИ РОБОТИ З MathCAD

MathCAD працює з *документами*. З погляду користувача документ – це чистий лист паперу, на якому можна розміщати блоки трьох основних типів: математичні вирази, текстові фрагменти і графічні області.

Розташування нетекстових блоків у документі має принципове значення – *зліва направо і зверху вниз*.

1.1. Математичні вирази

До основних елементів математичних виразів MathCAD належать *типи даних*, *оператори*, *функції* і *керуючі структури*.

Оператори

Оператори – елементи MathCAD, за допомогою яких можна створювати математичні вирази. До них, наприклад, належать символи арифметичних операцій, знаки обчислення сум, добутків, похідної й інтеграла і т.д.

Оператор визначає:

1) дію, яка повинна виконуватися за наявності тих чи інших значень операндів;
2) скільки, де і які операнди повинні бути введені в оператор.

Операнд – вираз або число, на яке діє оператор. Наприклад, у виразі **5! + 3** число **3** і вираз **5!** – операнди оператора **+** (плюс), а число **5** – операнд оператора **!** (факторіал). Після зазначення *операндів* оператори стають блоками, які виконуються в документі. У додатку 1 даного посібника наведений список операторів, які використовуються найчастіше від інших.

Типи даних

До *типів даних* належать числові константи, звичайні й системні змінні, масиви (вектори й матриці) та дані файлового типу.

Константами називають пойменовані об'єкти, що зберігають деякі значення, які не можуть бути змінені. ***Змінні*** є пойменованими об'єктами, що мають деяке значення, яке може змінюватися у ході виконання програми. Тип змінної визначається її значенням: змінні можуть бути числовими, рядковими, символьними і т.д. Імена констант, змінних та інших об'єктів називають *іден-*

тифікаторами. Ідентифікатори в MathCAD являють собою набір латинських або грецьких літер і цифр.

У MathCAD є невелика група особливих об'єктів, які не можна віднести ні до класу констант, ні до класу змінних. Їх значення визначені відразу після запуску програми. Ці об'єкти більш правильно вважати ***системними змінними***, що мають визначені системою початкові значення (додаток 2). Зміну значень системних змінних виконують у вкладці **Переменные (Build-In Variables)** діалогового вікна **Math Options** меню **Математика (Math) ⇒ Параметры (Options).**

Звичайні змінні відрізняються від системних тим, що вони повинні бути попередньо *визначені* користувачем, тобто їм необхідно хоча б один раз *присвоїти значення*. Як *оператор присвоювання* використовується знак **:=**, тоді як знак = призначений для *виводу значення* константи або змінної.

Присвоювання змінній початкового значення за допомогою оператора **:=** (викликається натисканням клавіші **:** (двокрапка) на клавіатурі) називається *локальним*. До моменту такого присвоювання змінна не визначена і її не можна використовувати. Однак за допомогою знака ≡ (клавіша ~ на клавіатурі) можна забезпечити *глобальне* присвоювання (приклад 1, рис. 1.1). MathCAD прочитує увесь документ двічі зліва направо і зверху вниз. Під час першого проходу виконуються всі дії, запропоновані глобальним оператором присвоювання (≡), а за другого – дії, запропоновані локальним оператором присвоювання (**:=**), і відображаються усі необхідні результати обчислень (=).

Існують також жирний знак рівності **=** (комбінація клавіш **Ctrl +** =), що використовується, наприклад, як оператор наближеної рівності під час розв’язування систем рівнянь, і символьний знак рівності → (комбінація клавіш **Ctrl + .**).

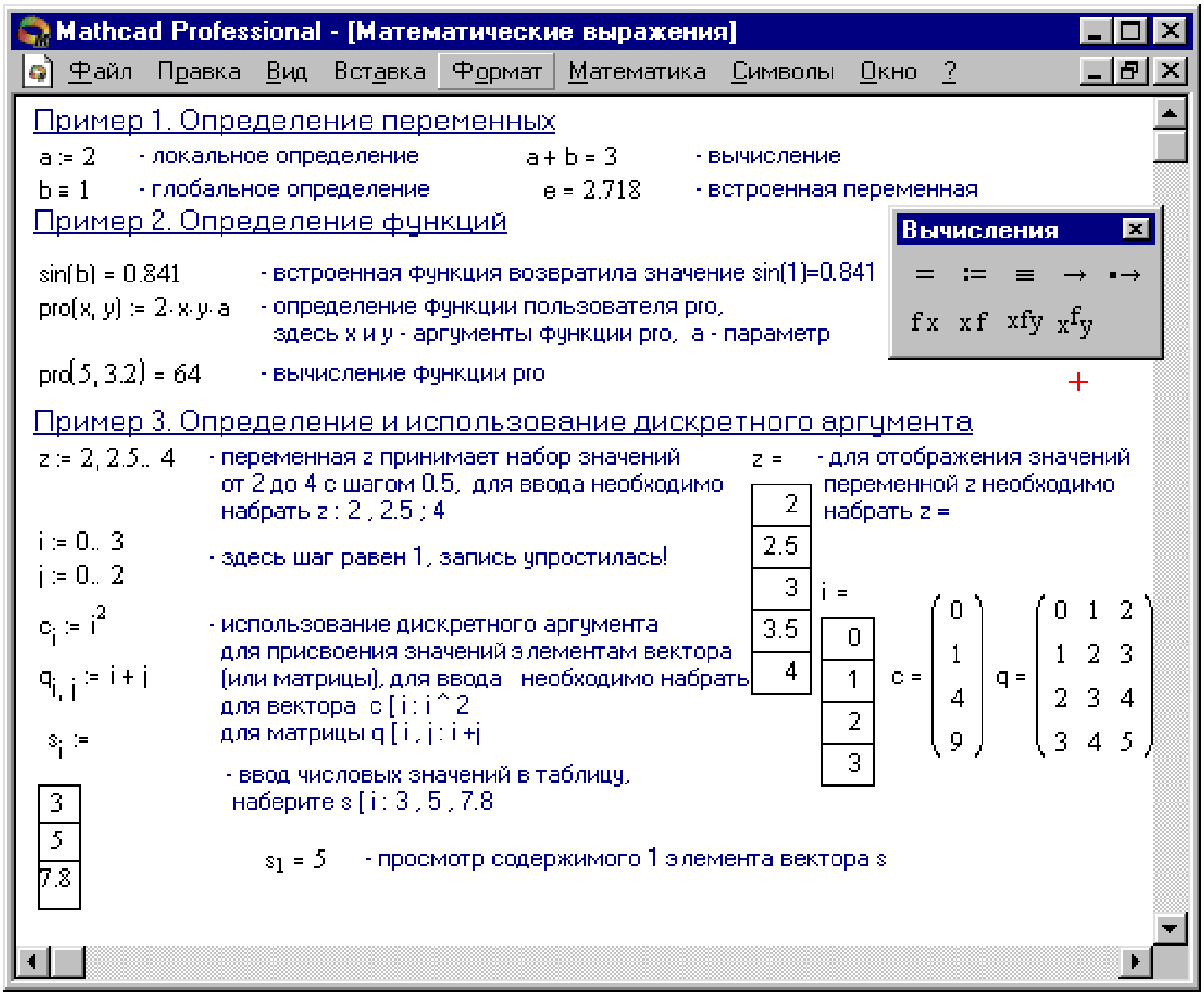


Рис. 1.1. Математичні вирази

Дискретні аргументи – особливий клас змінних, котрий у пакеті MathCAD найчастіше заміняють ***керуючі структури***, які називають циклами (однак така заміна не є повноцінною). Ці змінні мають ряд фіксованих значень: або цілочислових (1-й спосіб), або у вигляді чисел з визначеним кроком, що змінюються від початкового значення до кінцевого (2-й спосіб).

1. *Name* := *Nbegin* .. *Nend*,

де *Name* – ім'я змінної, *Nbegin* – її початкове значення, *Nend* – кінцеве значення, **..** – символ, що вказує на зміну змінної в заданих межах (вводиться клавішею **;**). Якщо *Nbegin* < *Nend*, то крок змінної буде дорівнювати +1, за іншої умови –1.

2. *Name* := *Nbegin*, (*Nbegin* + *Step*) .. *Nend*.

Тут *Step* – заданий крок зміни змінної (він має бути додатним, якщо *Nbegin* < *Nend*, або від'ємним у протилежному випадку).

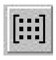
Дискретні аргументи значно розширюють можливості MathCAD, дозволяючи виконувати багаторазові обчислення або цикли з повторюваними обчисленнями, формувати вектори й матриці (приклад 3, рис. 1.1).

Масив – сукупність скінченного числа числових або символьних елементів, які упорядковані певним чином і мають визначені адреси. Кожна така сукупність має унікальне ім'я. У пакеті MathCAD використовуються масиви двох найбільш розповсюджених типів:

- ❖ одновимірні (вектори);
- ❖ двовимірні (матриці).

Порядковий номер елемента, що є його адресою, називається *індексом*. Індекси можуть мати тільки цілочислові значення. Вони можуть починатися з нуля або одиниці відповідно до значень системної змінної **ORIGIN** (додаток 2).

Вектори й матриці можна задавати різними способами:

- ➢ за допомогою меню **Вставка (Insert) ⇒ Матрицы (Matrices)**;
- ➢ комбінацією клавіш **Ctrl + M** або натисканням на кнопці  панелі **Матрица (Matrix)**, після того, як заповнено масив порожніх полів для не дуже великих масивів;
- ➢ з використанням дискретного аргументу, коли є деяка очевидна залежність для обчислення елементів через їхні індекси (приклад 3, рис.1.1).

Функції

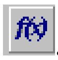
Функція – вираз, згідно з яким виконуються деякі обчислення з *аргументами* і визначається його числове значення.

Слід звернути особливу увагу на відмінність між *аргументами* і *параметрами* функції. Зазначені в дужках після імені функції змінні, є її *аргументами*, вони замінюються під час обчислення функції згідно зі значеннями, вказаними в дужках. Змінні в правій частині визначення функції, які не зазначені в дужках у лівій частині, є *параметрами* і повинні задаватися *до* визначення функції (приклад 2, рис. 1.1).

Головною ознакою функції є *повернення значення*, тобто функція у відповідь на звертання до неї на ім’я із зазначенням її аргументів повинна повернути своє значення.

Функції в пакеті MathCAD можуть бути *вбудовані* (додаток 3), тобто завчасно введені розроблювачами, і *визначені користувачем*.

Вбудовану функцію можна вставити в документ одним із таких способів:

1) вибрати пункт меню **Вставка (Insert) ⇒ Функция (Function)**;
2) натиснути комбінацію клавіш **Ctrl + E**;
3) натиснути кнопку .

1.2. Текстові фрагменти

Текстові фрагменти являють собою уривки тексту, які користувач хотів би бачити у своєму документі. Розрізняють два види текстових фрагментів:

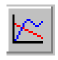
➢ *текстова область* призначена для невеликих фрагментів тексту – підписів, коментарів і т.п. Вставляється за допомогою меню **Вставка (Insert) ⇒ Текстовая область (Text Region)** або комбінації клавіш **Shift + "** (подвійні лапки);

➢ *текстовий абзац* застосовується в тому випадку, якщо необхідно працювати з абзацами або сторінками. Вставляється за допомогою комбінації клавіш **Shift + Enter**.

1.3. Графічні області

Графічні області поділяються на три основні типи – двовимірні графіки, тривимірні графіки та імпортовані графічні образи. Двовимірні й тривимірні графіки будуються самим MathCAD на основі оброблених даних.

Для створення ***декартового графіка*** необхідно:

1) встановити візир „+” у незаповненій частині робочого документа;
2) вибрати меню **Вставка (Insert) ⇒ График (Graph) ⇒ Х-У График (X-Y Plot)**, або натиснути на клавіатурі клавішу **@**, або натиснути кнопку  панелі **График (Graph)**. З'явиться шаблон декартового графіка;
3) ввести в середній позначці під віссю X першу незалежну змінну, через кому – другу і так до 10, наприклад $x1$, $x2$, …;
4) ввести у середній позначці ліворуч від вертикальної осі Y першу незалежну змінну, через кому – другу і т.д., наприклад $y1(x1)$, $y2(x2)$, …, чи відповідні вирази;

5) клацнути за межами області графіка, щоб почати його побудову.

Тривимірні, або ***3D-графіки***, відображають функції двох змінних виду $Z(X,Y)$. Будуючи тривимірні графіки у ранніх версіях MathCAD, поверхню треба було визначати математично (рис. 1.2, спосіб 2). Тепер застосовують функцію MathCAD ***CreateMesh***.

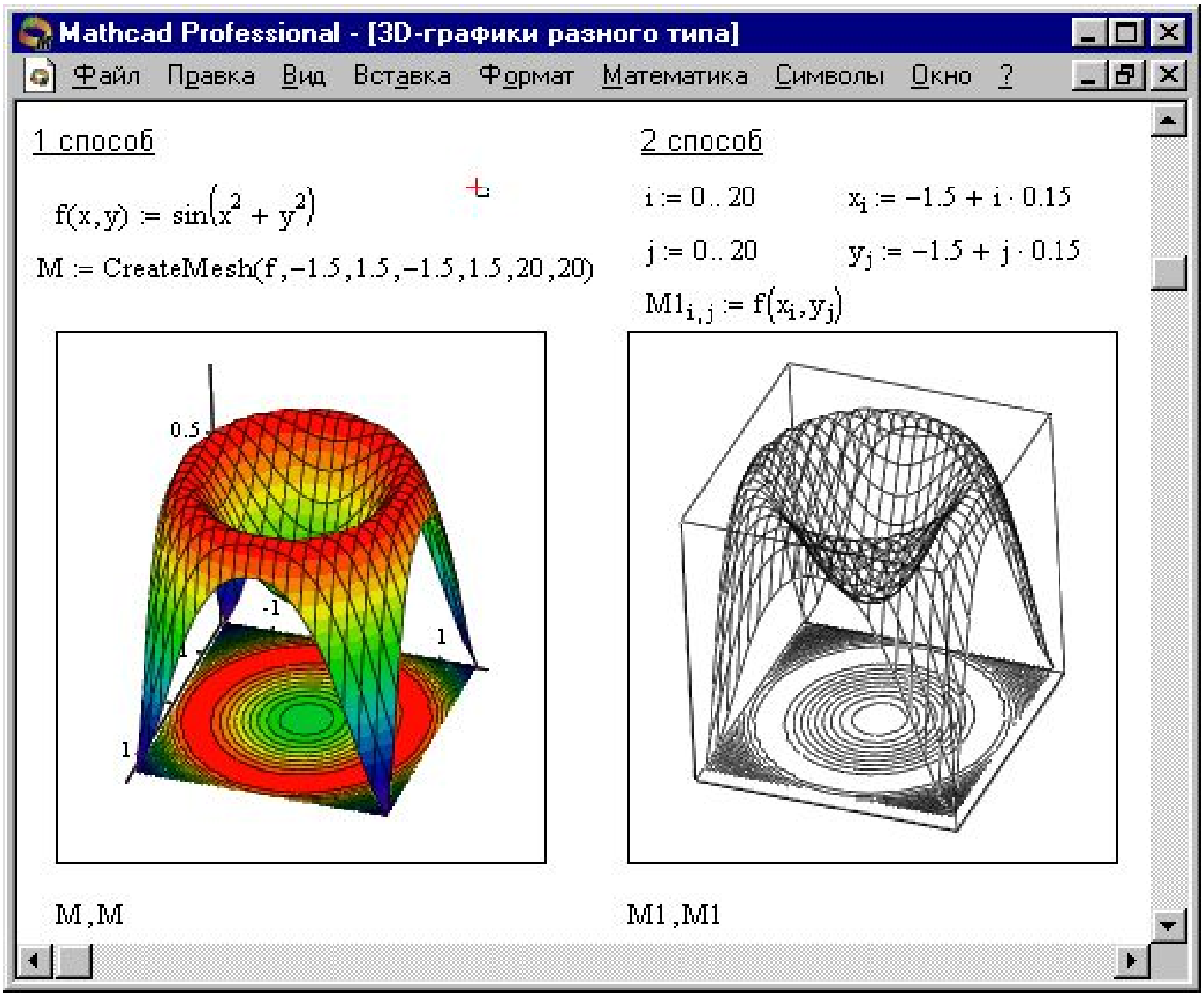


Рис. 1.2. Приклад побудови на одному малюнку двох 3D – графіків різного типу

<u>CreateMesh (F (або G, або f1, f2, f3), x0, x1, y0, y1, xgrid, ygrid, fmap)</u> – створює сітку на поверхні, що задана функцією *F*. У цьому разі $x0$, $x1$, $y0$, $y1$ – діапазон зміни змінних; *xgrid, ygrid* – розміри сітки змінних; *fmap* – функція відображення. Усі параметри, за винятком *F*, необов'язкові. Функція ***CreateMesh*** за замовчуванням створює на поверхні сітку 20×20 точок з діапазоном зміни змінних від –5 до 5.

Приклад використання функції ***CreateMesh*** для побудови 3D-графіків наведений на рис. 1.2, спосіб 1. Побудована одна поверхня різними способами, з різним форматуванням, причому під зображенням поверхні вміщена вона ж у вигляді контурного графіка, що додає малюнку більшої наочності.

Нерідко поверхні й просторові криві зображують у вигляді точок, кружечків або інших фігур. Такий графік створюється операцією **Вставка (Insert) ⇒ График (Graph) ⇒ 3D Точечный (3D Scatter Plot)**, причому поверхня задається параметрично – за допомогою трьох матриць (X, Y, Z) (рис. 1.3, спосіб 2), а не однієї, як у прикладі на рис. 1.2. Для визначення вихідних даних для такого виду графіків використовується функція ***CreateSpace*** (рис. 1.3, спосіб 1).

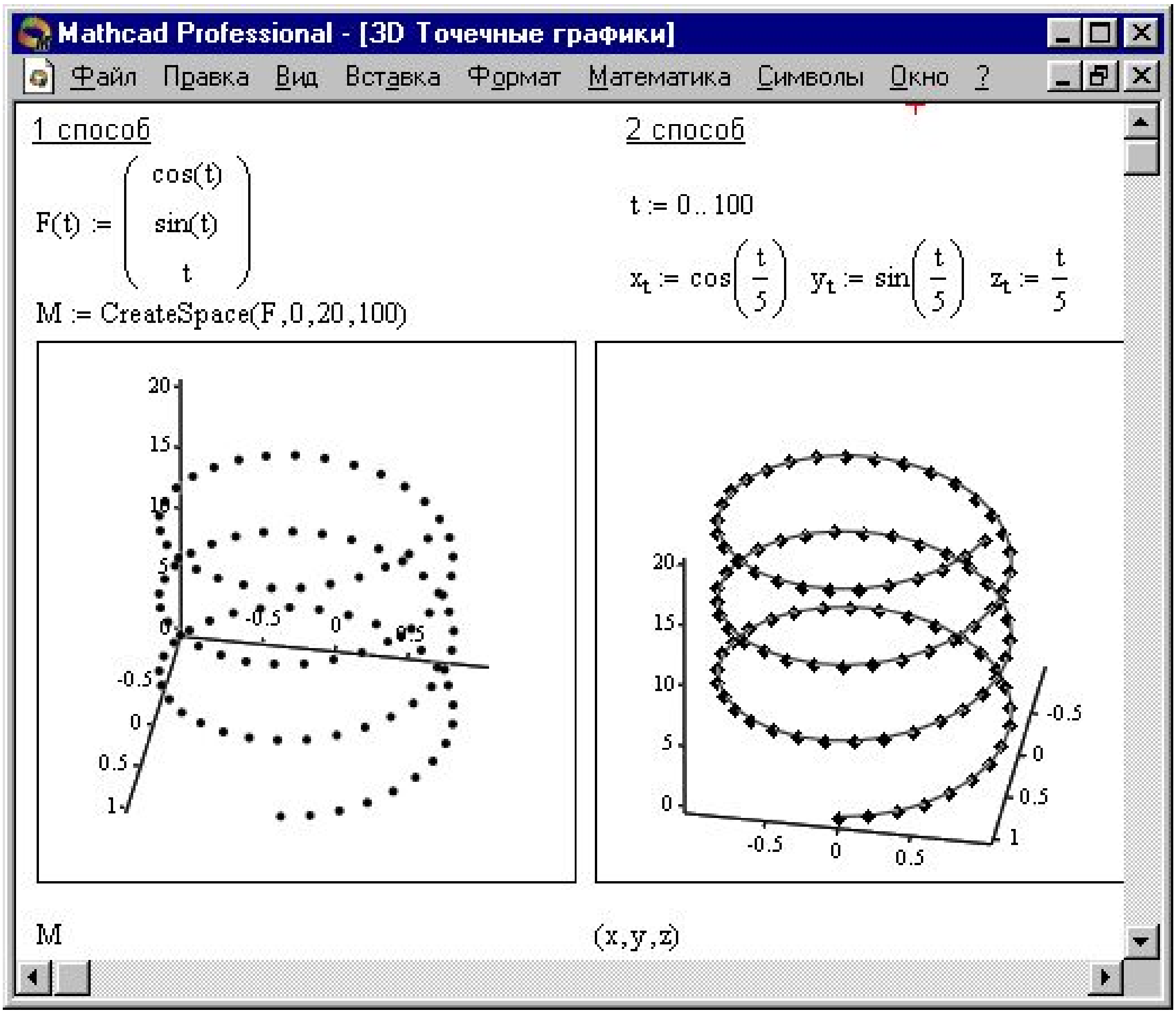


Рис. 1.3. Побудова 3D точкових графіків

CreateSpace (F , t0, t1, tgrid, fmap) – повертає вкладений масив трьох векторів, що являють собою *x*-, *y*-, і *z* - координати просторової кривої, заданої функцією *F*. У цьому разі *t*0 і *t*1 – діапазон зміни змінної, *tgrid* – розмір сітки змінної, *fmap* – функція відображення. Усі параметри, за винятком *F*, необов'язкові.

Побудова фігур, що перетинаються

Особливий інтерес становить можливість побудови на одному графіку ряду різних фігур або поверхонь з автоматичним урахуванням їхнього взаємного перетину. Для цього необхідно окремо задати матриці відповідних поверхонь і після виводу шаблона 3D-графіка перелічити їх у позначці під ним з використанням коми як роздільника (рис. 1.4).

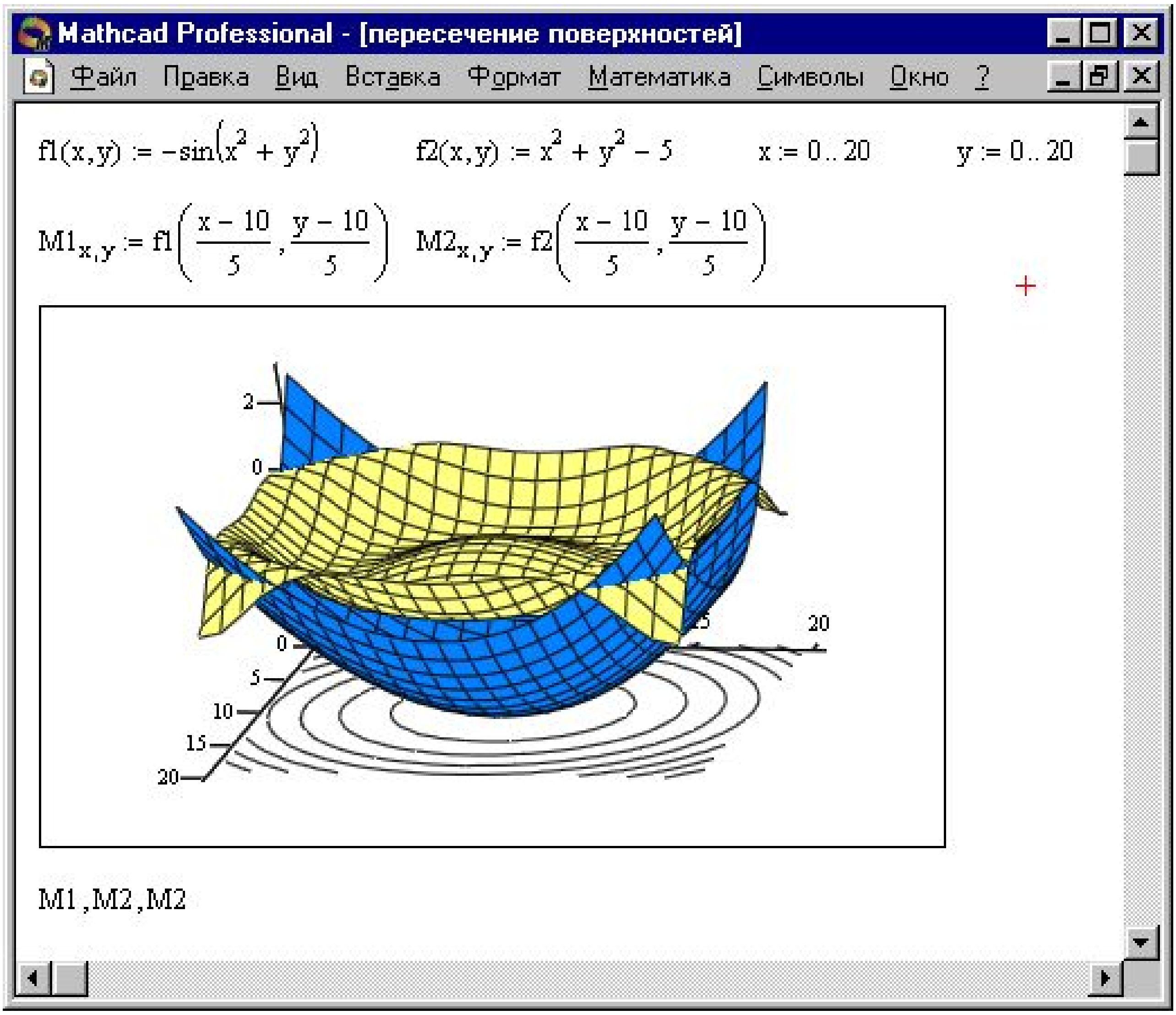


Рис. 1.4. Побудова двох поверхонь, що перетинаються, з контурним графіком однієї з них

Створення анімаційного кліпу

Для керування *анімаціями* MathCAD має вбудовану змінну FRAME.

- Створіть об'єкт, зображення якого залежить від FRAME.
- Переконайтеся, що встановлено режим автоматичного розрахунку (**Математика (Math) ⇒ Автоматическое Вычисление (Automatic Calculation)**).
- Виберіть **Вид (Просмотр** для MathCAD 2001i Professional**) (View) ⇒ Анимация (Animate)** для виклику однойменного діалогового вікна.
- Виділіть частину робочого документа, яку потрібно анімувати.
- Установіть нижні й верхні межі FRAME (поля **От (From):** і **До (To):**).
- У полі **Скорость (At)** введіть значення швидкості відтворювання (кадрів/с).
- Виберіть **Анимация (Animate)**. У цей час анімація тільки створюється.
- Збережіть анімацію як AVI файл (**Сохранить как**).
- Відтворіть збережену анімацію **Вид (View) ⇒ Відтворення (Playback)**.

1.4. Вправи для самостійної роботи

Усі завдання необхідно супроводити коментарями, використовуючи команду **Вставка (Insert) ⇒ Текстовая область (Text Region)**.

Вправа 1. Обчислити:

$$\sqrt{100} = \qquad |-10| = \qquad 10! = \qquad .$$

Вправа 2. Обчислити вирази:

$$Z := \frac{2ab + \sqrt[3]{c}}{\sqrt{\left(a^2 + b^{a+c}\right)c}}, \qquad N := e^{\sin c} \cos\frac{a}{b},$$

якщо $a := 3.4$, $b := 6.22$, $c \equiv 0.149$.

За допомогою команди **Формат (Format) ⇒ Результат (Result) ⇒ Формат числа (Number Format) ⇒ Число знаков (Number of decimal places)** змінити точність відображення результатів обчислення.

Вправа 3. Вивести на екран значення *системної константи* π і установити максимальний формат її відображення *локально*.

Вправа 4. Виконати такі операції з комплексними числами:

$$Z := -3 + 2i \quad |Z| = \quad Re(Z) = \quad Im(Z) = \quad arg(Z) =$$

$$\sqrt{z} = \quad \sqrt{-5} = \quad 2 \cdot Z = \quad Z1 := 1 + 2i \quad Z2 := 3 + 4i$$

$$Z1 + Z2 = \quad Z1 - Z2 = \quad Z1 \cdot Z2 = \quad Z1/Z2 =$$

Вправа 5. Виконати операції:

$$i := 1 .. 10 \qquad \sum_i i = \qquad \prod_i (i + 1) = \qquad \int_0^{0.4} x^2 \lg(x + 2)dx =$$

$$\int_{0.8}^{1.2} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{(\sin 2x)^2} dx = \qquad x := 2 \qquad \frac{d}{dx} x^5 = \qquad \frac{d}{dx} \sin x =$$

Вправа 6. Визначити вектори *d*, *S* і *R* через дискретний аргумент *i*. Зобразити графічно задані таблицею функції $S_i(d_i)$ і $R_i(d_i)$, використовуючи команду **Вставка (Insert) ⇒ График (Graph) ⇒ X-У График (X-Y Plot)**.

i	d_i	S_i	R_i
0	0.5	3.3	2
1	1	5.9	3.9
2	1.5	7	4.5
3	2	6.3	3.7
4	2.5	4.2	1.2

Вправа 7. Використовуючи команду **Вставка (Insert) ⇒ Матрицы (Matrices)**, створити матрицю *Q* розміром 6×6, заповнити її довільно і відобразити графічно за допомогою команди **Вставка (Insert) ⇒ График (Graph) ⇒ Поверхность (Surface Plot)**.

Вправа 8. Побудувати графік поверхні (**Поверхность (Surface Plot)**) і карту ліній рівня (**Контурный (Contour Plot)**) для функції двох змінних

$X(t, \alpha) := t \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$, двома способами:

1) за допомогою функції ***CreateMesh*** (сітка розміром 40 × 40, діапазон зміни *t* від –5 до 5, α - від 0 до 2·π);

2) задавши поверхню математично, для цього:

- визначити функцію $X(t, \alpha)$.

- задати на осях змінних t і α по 41 точці

$$i:=0..40 \quad j:=0..40$$

для змінної t_i зі значеннями, що змінюються від -5 до 5 з кроком 0.25 $t_i := -5 + 0.25 \cdot i$, а для змінної α_j – від 0 до $2\cdot\pi$ з кроком $\pi/20$ $\alpha_j := \pi/20 \cdot j$.

Вправа 9. Відобразити графічно перетин поверхонь $f1(x, y) := \dfrac{(x + y)^2}{10}$ і $f2(x, y) := 5 \cdot \cos\left(\dfrac{x - y}{3}\right)$. Матриці для побудови поверхонь задати за допомогою функції ***CreateMesh***, значення необов'язкових параметрів не вказувати. Виконати однотонне заливання для поверхонь, вибравши з контекстного меню команду **Формат (Format)**.

Вправа 10. Використовуючи змінну **FRAME** і команду **Вид (Просмотр** для MathCAD 2001i Professional**) (View) ⇒ Анимация (Animate)**, створити анімаційні кліпи на основі даних наведених у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Варіанти до вправи 10

№ варіанта	Змінні та функції	FRAME	Тип графіка
1	$x := 0, 0.1 .. 30$ $f(x) := x + \text{FRAME}$	Від 0 до 20	Полярні координати
2	$i := 0 .. 20 \quad j := 0 .. 20$ $f(x,y) := \sin(x^2 + y^2 + \text{FRAME})$ $x_i := -1.5 + 0.15 \cdot i \quad y_j := -1.5 + 0.15 \cdot j$ $M_{i,j} := f(x_i, y_j)$	Від 0 до 50	Графік поверхні. У позначці для введення матриці вкажіть M

№ варі-анта	Змінні та функції	FRAME	Тип графіка
3	$i := 0 .. \text{FRAME} + 1$ $g_i := 0.5 \cdot i \cdot \cos(i)$ $h_i := i \cdot \sin(i)$ $k_i := 2 \cdot i$	Від 0 до 50	3D точковий графік, межі на осях min max *x* - 50 50 *y* - 50 50 *z* 0 50 У позначці для введення матриці вкажіть (*g*, *h*, *k*)
4	$r := \text{FRAME}$ $R := 6$ $n := 0 .. 20$ $m := 0 .. 20$ $v_n := \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{r+1}$ $w_m := \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{r+1}$ $x_{m\,n} := (R + r \cdot \cos(v_n)) \cdot \cos(w_m)$ $y_{m\,n} := (R + r \cdot \cos(v_n)) \cdot \sin(w_m)$ $z_{m\,n} := r \cdot \sin(v_n)$	Від 0 до 20	Графік поверхні (межі на всіх осях установити від -11 до 11) У позначці для введення матриці вкажіть (*x*, *y*, *z*)

1.5. Контрольні запитання

1. За допомогою якого оператора можна обчислити вирази?
2. Як вставити текстову область в документ MathCAD?
3. Чим відрізняється глобальне й локальне визначення змінних? За допомогою яких операторів вони визначаються?
4. Як змінити формат чисел для всього документа?
5. Як змінити формат чисел для окремого виразу?
6. Які системні змінні Вам відомі? Як дізнатися їх значення? Як змінити їх значення?
7. Які види функцій у MathCAD Вам відомі?
8. Як вставити вбудовану функцію в документ MathCAD?
9. За допомогою яких операторів можна обчислити інтеграли, похідні, суми та добутки?

10. Як визначити дискретні змінні з довільним кроком? Який крок за замовчуванням?
11. Як визначити індексовану змінну?
12. Які види масивів у MathCAD Вам відомі?
13. Яка системна змінна визначає нижню межу індексації елементів масиву?
14. Які способи створення масивів у MathCAD Ви знаєте?
15. Як переглянути склад масиву, визначеного через дискретний аргумент?
16. Як побудувати графіки: поверхні; полярний; декартовий?
17. Як побудувати декілька графіків в одній системі координат?
18. Як побудувати гістограму?
19. Які функції використовуються для побудови тривимірних графіків?
20. Як створити анімацію в MathCAD?
21. Яке розширення мають збережені файли анімацій?

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ЗАСОБАМИ MathCAD

Як відомо, багато рівнянь і системи рівнянь не мають аналітичних розв'язків. У першу чергу це стосується більшості трансцендентних рівнянь. Доведено також, що не можна побудувати формулу, яка б дозволила розв'язати довільне алгебраїчне рівняння степеня вище четвертого. Однак такі рівняння можуть розв'язуватися чисельними методами із заданою точністю (не більш від значення заданої системної змінної **TOL**).

2.1. Чисельне розв'язування нелінійного рівняння

Розв'язок найпростіших рівнянь виду $f(x) = 0$ в MathCAD знаходять за допомогою функції ***root*** (рис. 2.1).

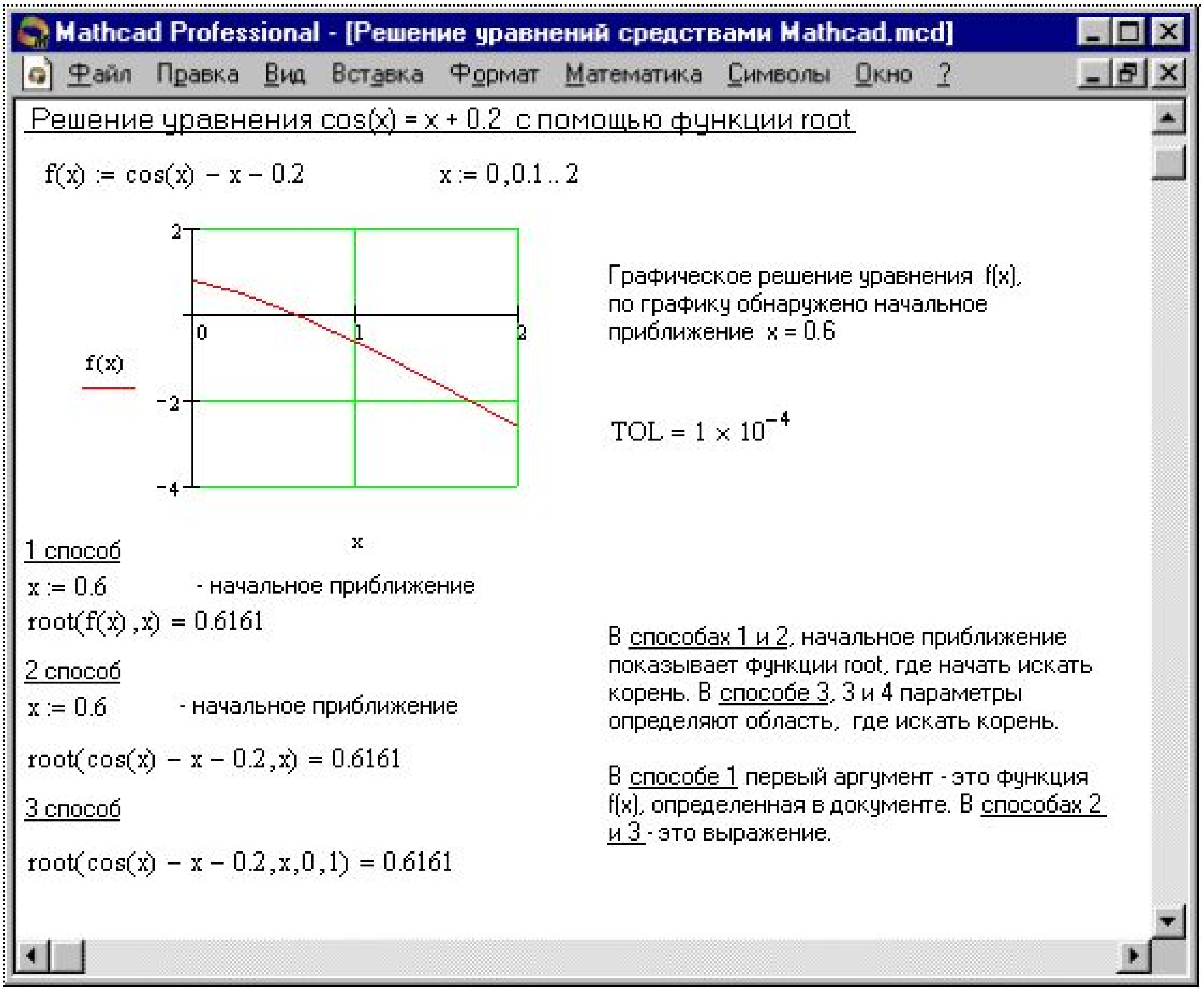


Рис. 2.1. Розв'язування рівнянь засобами MathCAD

root(f(x1, x2, …), x1, a, b) – повертає значення *x1*, яке належить відрізку [*a, b*] і яке перетворює функцію *f*(*x*) на 0. Обидва аргументи цієї функції повинні бути скалярами. Функція повертає скаляр.

Аргументи:

f(*x1, x2, …*) **–** функція, яка визначена у деякій частині робочого документа, або вираз. Вираз має скалярні значення.

x1 **–** ім'я змінної, котра використовується у виразі. Цій змінний перед використанням функції ***root*** необхідно присвоїти числове значення. MathCAD використовує його як початкове наближення під час знаходження кореня.

a, b **–** необов'язкові; у разі використання повинні бути дійсними числами, причому *a* < ***b*.**

Наближені значення коренів (*початкові наближення*) можуть бути:

1) відомі з фізичного змісту задачі;
2) відомі з розв’язку аналогічної задачі за інших вихідних даних;
3) знайдені графічним способом.

Найбільш розповсюджений *графічний спосіб* визначення початкових наближень. Беручи до уваги, що дійсні корені рівняння $f(x) = 0$ – це точки перетину графіка функції $f(x)$ з віссю абсцис, досить побудувати графік функції $f(x)$ і відмітити точки перетину $f(x)$ з віссю *Ox,* або відмітити на осі *Ox* відрізки, що містять по одному кореню. Побудова графіків часто спрощується після заміни рівняння $f(x) = 0$ *рівносильним* йому рівнянням: $f_1(x) = f_2(x)$, де функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – більш прості, ніж функція $f(x)$. Після побудови графіків функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ шукані корені одержимо як абсциси точок перетину цих графіків.

Відсутність збіжності функції root

Якщо після багатьох ітерацій MathCAD не знаходить прийнятного наближення, то з'явиться повідомлення Can't converge to a solution. (відсутня збіжність). Ця помилка може бути викликана такими причинами:

- рівняння не має коренів;
- корені рівняння дуже відрізняються від початкового наближення;
- вираз має локальні *max* і *min* між початковим наближенням і коренями;
- вираз має розриви між початковими наближеннями і коренями;
- вираз має комплексний корінь, але початкове наближення було дійсним.

Щоб встановити причину помилки, досліджуйте графік $f(x)$. Він допоможе з'ясувати наявність коренів рівняння $f(x) = 0$, і якщо вони існують, то визначити наближено їх значення. Чим точніше обране початкове наближення кореня, тим швидше функція ***root*** буде збігатися.

Рекомендації до використання функції root

- Для зміни точності знаходження кореня за допомогою функції ***root***, необхідно змінити значення системної змінної **TOL**. Якщо значення **TOL** збільшується, то функція ***root*** буде збігається швидше, але відповідь буде менш точною. Якщо ж значення **TOL** спадає, то функція ***root*** буде збігатися повільніше, але відповідь буде більш точною. Щоб змінити значення **TOL** у деякій частині робочого документа, використовуйте вираз вигляду $TOL := 0.01$. Щоб змінити значення **TOL** для усього робочого документа, виберіть меню **Математика (Math) ⇒ Параметры (Options)…⇒ Переменные (Build-In Variables) ⇒ Допуск сходимости (TOL)**.
- Якщо два корені мало відрізняються між собою, то доцільно зменшити **TOL**, щоб розрізнити їх.
- Якщо функція $f(x)$ має малий нахил дотичної біля шуканого кореня, функція ***root*(*f*(*x*), *x*)** може збігатися до значення r, що знаходиться від кореня досить далеко. У таких випадках для знаходження більш точного значення кореня необхідно зменшити значення **TOL**. Інший варіант полягає в заміні рівняння $f(x) = 0$ на $g(x) = 0$, де

$$g(x) = \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)}.$$

- Для виразу $f(x)$ з відомим коренем a знаходження додаткових коренів еквівалентне визначенню коренів рівняння $h(x) = f(x)/(x - a)$. Подібний прийом доцільний і для відшукування коренів, що розташовані досить близько один від одного. Простіше шукати корінь виразу $h(x)$, ніж пробувати відшукати інший корінь рівняння $f(x) = 0$, вибираючи різні початкові наближення.

2.2. Знаходження коренів полінома

Для знаходження коренів виразу, що має вигляд

$$v_n x^n + \ldots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0,$$

краще застосовувати функцію ***polyroots***, ніж ***root***. На відміну від функції ***root***, функція ***polyroots*** не вимагає початкового наближення і повертає відразу всі корені, як дійсні, так і комплексні.

Polyroots(v) – повертає вектор довжиною *n*, що складається з коренів полінома степеня *n*. Коефіцієнти полінома знаходяться у векторі ***v***, довжина якого *n* + 1. Вектор ***v*** зручно створювати, використовуючи команду **Символы (Symbolics) ⇒ Коэффициенты полинома (Polynomial Coefficient)**. Рис. 2.2 ілюструє знаходження коренів полінома засобами MathCAD.

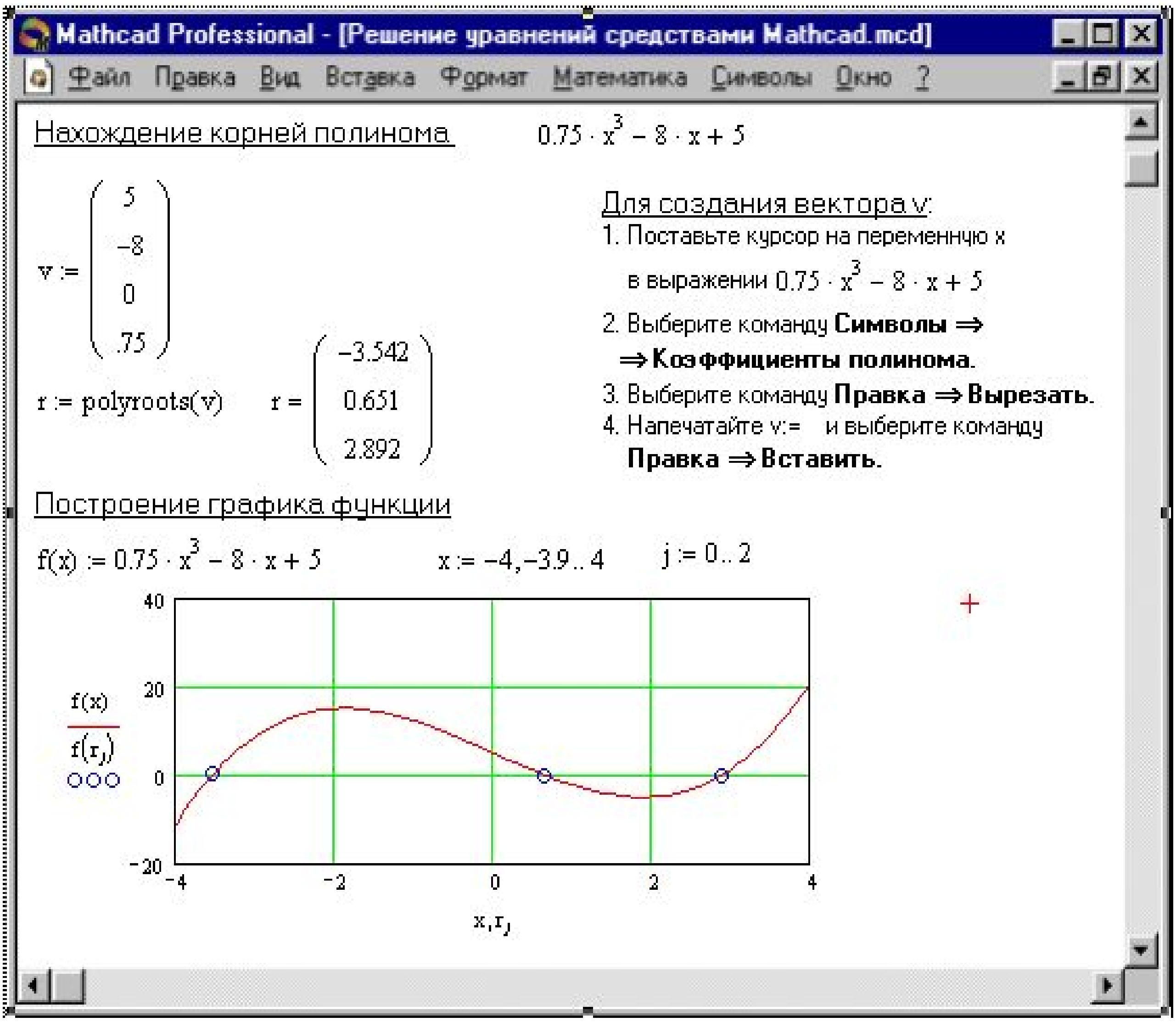


Рис. 2.2. Визначення коренів полінома

2.3. Розв’язування системи рівнянь

MathCAD дає можливість розв’язувати також і системи алгебраїчних рівнянь. Максимальне число рівнянь і змінних дорівнює 50. Результатом розв’язування системи буде числове значення шуканого кореня.

Для того щоб розв’язати систему алгебраїчних рівнянь, необхідно:

- Задати початкове наближення для всіх невідомих даної систему рівнянь. MathCAD розв’язує систему за допомогою ітераційних методів.
- Ввести ключове слово ***Given***. Воно вказує, що далі йде система рівнянь.
- Ввести рівняння і нерівності в будь-якому порядку. Використовуйте **[Ctrl]=** для символу =. Між лівою і правою частинами нерівностей може стояти будь-який із символів: <, >, ≥ і ≤.
- Ввести будь-який вираз, що включає функцію ***Find***, наприклад: *a*:= ***Find(x, y)***.

Find(z1, z2, . . .) **–** повертає точний розв’язок системи рівнянь. Число аргументів має дорівнювати числу невідомих.

Ключове слово *Given*, рівняння і нерівності, вказані за ним, а також будь-який вираз, що містить функцію *Find*, називають *блоком розв’язування рівнянь*.

Усередині блоку розв’язування неприпустимі такі вирази:

- обмеження зі знаком ≠;
- дискретний аргумент або вирази, що містять дискретний аргумент у будь-якій формі;
- нерівності виду $a < b < c$.

Блоки розв’язування рівнянь не можуть бути вкладені один в один, кожен блок може мати тільки одне ключове слово ***Given*** та ім'я функції ***Find***.

Функція, що завершує блок розв’язування рівнянь, може бути використана аналогічно до будь-якої іншої функції. З нею можна виконати такі три дії.

1. Можна вивести на екран знайдений розв’язок, набравши вираз:

$$Find(var1,\ var2,\ldots) = .$$

2. Визначити змінну за допомогою функції ***Find***:

$$a := Find(x) \text{ – скаляр},$$

$$var := Find(var1,\ var2,\ldots) \text{ – вектор}.$$

Такий запис зручний, якщо розв’язок системи рівнянь необхідно використати в іншому місці робочого документа.

3. Визначити іншу функцію за допомогою ***Find***:

$$f(a,\ b,\ c,\ \ldots) := Find(x,\ y,\ z,\ \ldots).$$

Ця конструкція зручна для багаторазового розв’язування системи рівнянь для різних значень деяких параметрів *a, b, c,…*, що безпосередньо входять до системи рівнянь.

Повідомлення про помилку No solution was found. Try changing the guess value or the value of TOL or CTOL. (розв’язок не знайдено) у ході розв’язування рівнянь з'являється, коли:

❖ задача не може мати розв’язку;

❖ для рівняння, що не має дійсних розв’язків, як початкове наближення взято дійсне число і навпаки;

❖ у процесі знаходження розв’язку послідовність наближень потрапила в точку локального мінімуму відхилення; для відшукання розв’язку треба задати різні початкові наближення;

❖ можливо, що задача не може бути розв’язана із заданою точністю; спробуйте збільшити значення **TOL**.

На рис. 2.3 проілюстровано розв’язування системи алгебраїчних рівнянь засобами MathCAD.

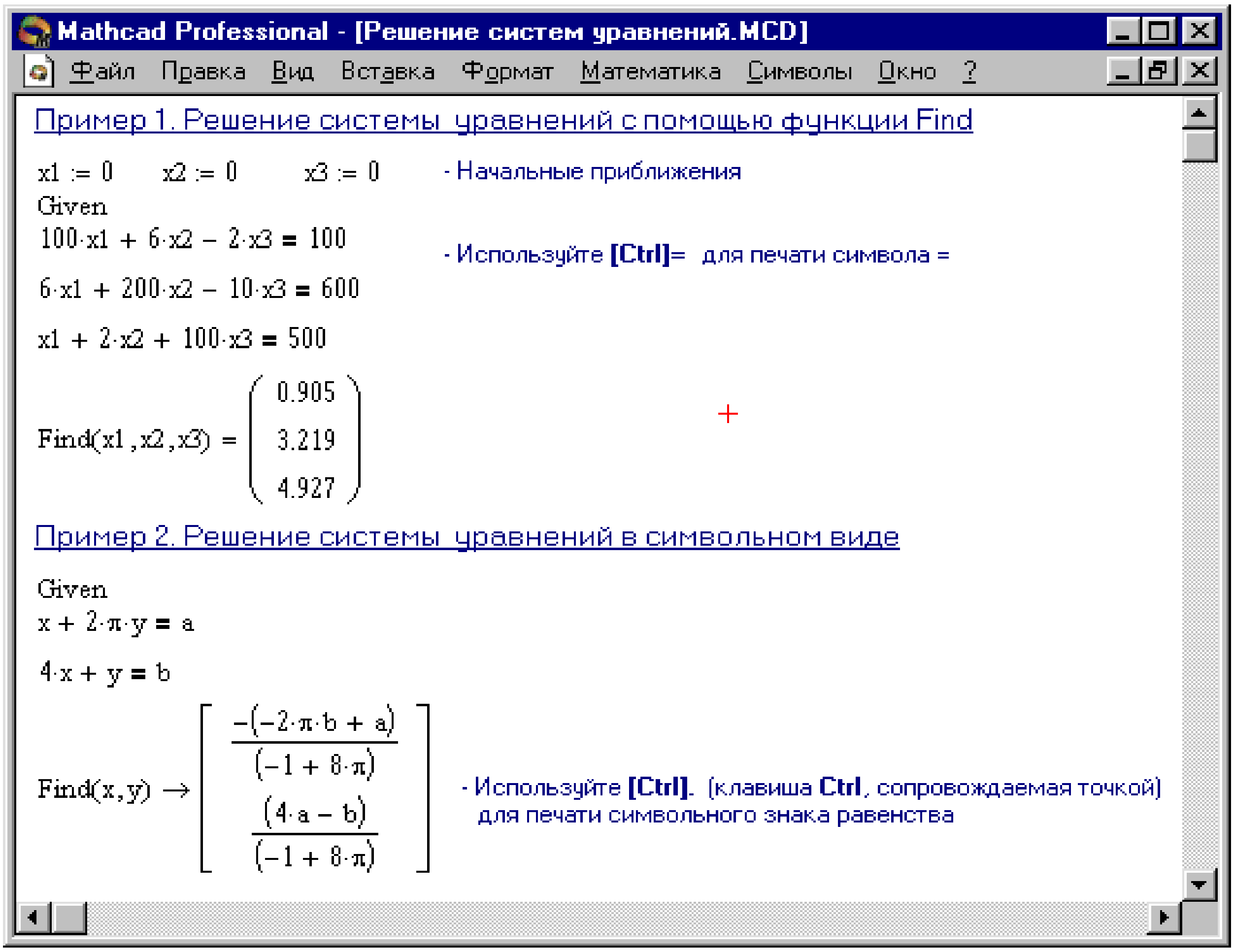


Рис. 2.3. Розв'язування систем алгебраїчних рівнянь у MathCAD

Розв'язування матричних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, …, x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Відповідно до правила множення матриць система лінійних рівнянь, що розглядається, може бути записана в матричному вигляді

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \qquad (2)$$

де

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Матриця $\boldsymbol{A}$, елементами якої є коефіцієнти при відповідних невідомих, називається *матрицею системи*; матриця-стовпець $\boldsymbol{b}$, елементами якої є праві частини рівнянь системи, називається *матрицею правої* частини або просто *правою частиною системи*. Матриця-стовпець $\boldsymbol{x}$, елементи якої – шукані невідомі, називається *розв'язком системи*. Якщо матриця $\boldsymbol{A}$ – неособлива, тобто $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ то система (1), або еквівалентне їй матричне рівняння (2), має єдиний розв'язок.

Дійсно, за умови $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ існує зворотна матриця $\boldsymbol{A}^{-1}$. Домножуючи обидві частини рівняння (2) на матрицю $\boldsymbol{A}^{-1}$, одержимо:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b, \quad x = A^{-1}b. \tag{3}$$

Формула (3) дає розв'язок рівняння (2), і він єдиний.

Системи лінійних рівнянь іноді зручно розв'язувати за допомогою функції ***lsolve***.

<u>lsolve(A, b)</u> – повертає вектор розв'язку $\boldsymbol{x}$ такий, що $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, де $\boldsymbol{A}$ – квадратна, несингулярна матриця; $\boldsymbol{b}$ – вектор, що має стільки ж рядів, скільки рядів у матриці $\boldsymbol{A}$. На рис. 2.4 показано розв'язування системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

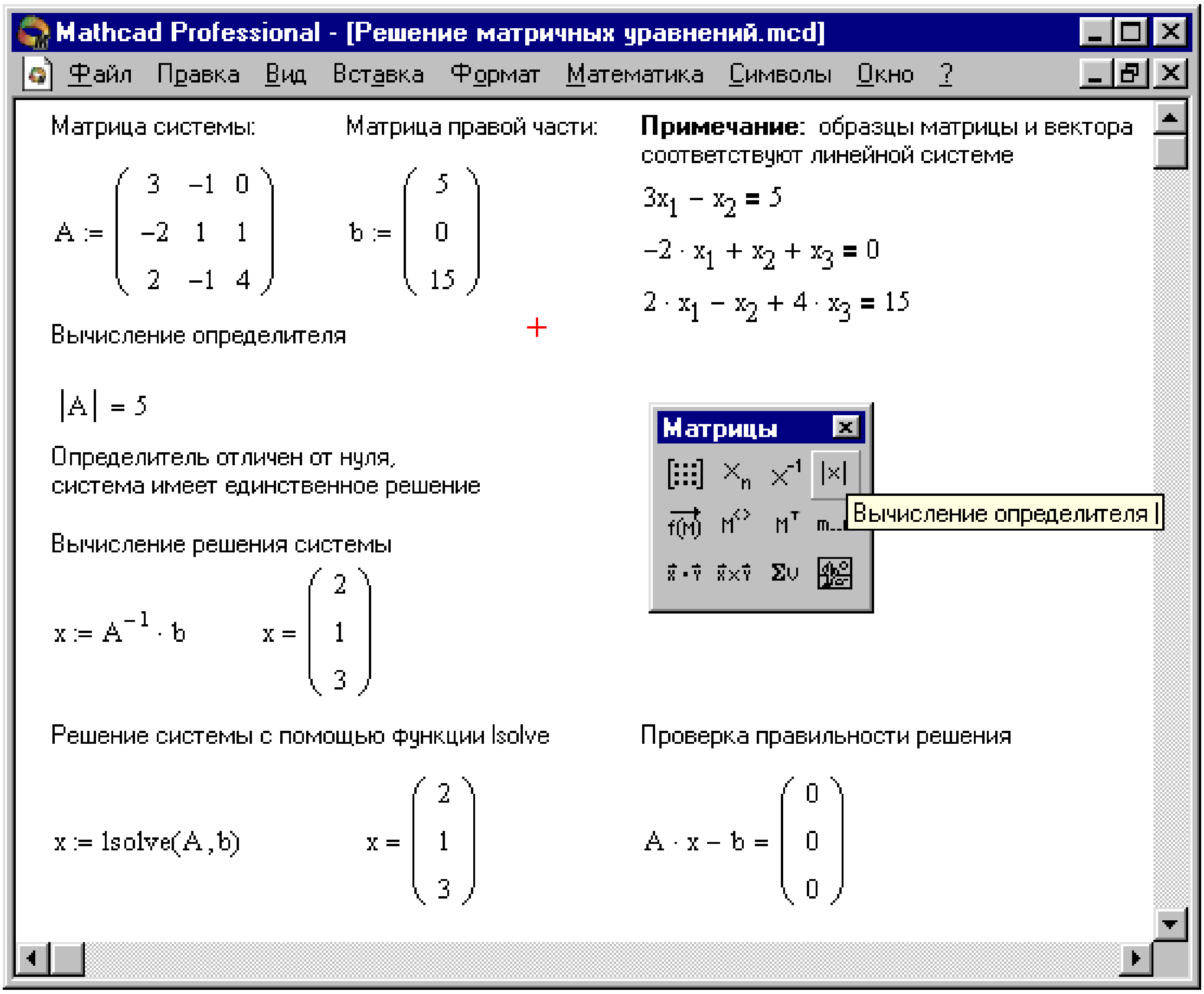


Рис. 2.4. Розв’язування матричних рівнянь

Наближені розв’язки

Функція ***Minerr*** дуже схожа на функцію ***Find*** (використовує той же алгоритм). Якщо в результаті пошуку не може бути одержане подальше уточнення поточного наближення до розв’язку, ***Minerr*** повертає це наближення. Функція ***Find*** у цьому випадку повертає повідомлення про помилку. Правила використання функції ***Minerr*** такі ж, як і функції ***Find***.

Minerr(z1, z2, . . .) – повертає наближений розв’язок системи рівнянь. Число аргументів має дорівнювати числу невідомих.

Якщо ***Minerr*** використовується в блоці розв’язування рівнянь, необхідно завжди включати додаткову перевірку вірогідності результатів.

2.4. Символьне розв’язування рівнянь

У MathCAD можна швидко й точно знайти чисельне значення кореня за допомогою функції ***root***. Але існують деякі задачі, для яких можливості MathCAD дозволяють знаходити розв’язки в символьному (аналітичному) вигляді.

Розв’язуючи рівняння в символьному вигляді, можна знайти точні або наближені корені рівняння.

❖ Якщо розв'язуване рівняння має параметр, то розв’язок у символьному вигляді може виразити шуканий корінь безпосередньо через параметр. Тому замість того, щоб розв’язувати рівняння для кожного нового значення параметра, достатньо підставити це значення у знайдений символьний розв’язок.

❖ Якщо треба знайти всі комплексні корені полінома, степінь якого менше або дорівнює 4, символьний розв’язок дасть їх точні значення в одному векторі або в аналітичному чи цифровому вигляді.

Меню **Символы (Symbolics) ⇒ Переменная (Variable) ⇒ Вычислить (Решение** для MathCAD 2001i Professional**) (Solve)** дозволяє розв’язати рівняння відносно деякої змінної і виразити його корені через інші параметри рівняння.

Щоб розв’язати рівняння символьно, необхідно:

1) набрати вираз (для введення знака рівності використовуйте комбінацію клавіш [Ctrl]=);

2) виділити змінну, відносно якої треба розв’язати рівняння;

3) вибрати пункт меню **Символы (Symbolics) ⇒ Переменная (Variable) ⇒ Вычислить (Решение** для MathCAD 2001i Professional**) (Solve)**.

<u>Немає необхідності прирівнювати вираз до нуля</u>. Якщо система MathCAD не знаходить знака рівності, вона припускає, що вираз дорівнює нулю.

Щоб розв’язати систему рівнянь у символьному вигляді за допомогою блоку ***Given*** і функції ***Find***, необхідно:

1) набрати ключове слово ***Given***;

2) набрати рівняння в будь-якому порядку нижче слова ***Given*** (упевніться, що для введення знака = використовується [Ctrl]=);

3) набрати функцію ***Find***, що відповідає системі рівнянь;

4) натиснути [Ctrl]. (клавіша CTRL, супроводжувана крапкою); MathCAD відобразить символьний знак рівності →;

5) клацнути мишею на функції ***Find***.

Приклад 2 рис. 2.3 ілюструє символьне розв'язування системи рівнянь у MathCAD.

2.5. Вправи для самостійної роботи

Вправа 1. Символьно розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x + 4\pi y = a, \\ 2x + y = b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2y - \pi z = a, \\ \pi z - z = b, \\ 3y + x = c. \end{cases}$

Вправа 2. Побудувати графік функції $f(x)$ (табл. 2.1) і наближено визначити один із коренів рівняння. Розв'язати рівняння $f(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за допомогою вбудованої функції MathCAD ***root***.

Таблиця 2.1

Варіанти до вправи 2

№ варі-анта	$f(x)$	№ варі-анта	$f(x)$
1	$e^{x-1} - x^3 - x,\ x \in [0;\ 1]$	**9**	$0.25x^3 + x - 2,\ x \in [0;\ 2]$
2	$x - \dfrac{1}{3 + \sin(3.6x)},\ x \in [0;\ 1]$	**10**	$\arccos\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} - x,\ x \in [2;\ 3]$
3	$\arccos x - \sqrt{1 - 0.3x^3},\ x \in [0;\ 1]$	**11**	$3x - 4\ln x - 5,\ x \in [2;\ 4]$
4	$\sqrt{1 - 0.4x^2} - \arcsin x,\ x \in [0;\ 1]$	**12**	$e^x - e^{-x} - 2,\ x \in [0;\ 1]$
5	$3x - 14 + e^x - e^{-x},\ x \in [1;\ 3]$	**13**	$\sqrt{1 - x} - \mathrm{tg}\ x,\ x \in [0;\ 1]$
6	$\sqrt{2x^2 + 1.2 - \cos x} - 1,\ x \in [0;\ 1]$	**14**	$1 - x + \sin x - \ln(1 + x),$ $x \in [0;\ 2]$
7	$\cos\left(\dfrac{2}{x}\right) - 2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x},$ $x \in [1;\ 2]$	**15**	$x^5 - x - 0.2,\ x \in [1;\ 2]$

8	$0.1x^2 - x\ln x$, $x \in [1;\ 2]$		

Вправа 3. Для полінома $g(x)$ (табл. 2.2) виконати такі дії:

1) за допомогою меню **Символы (Symbolics) ⇒ Коэффициенты полинома (Polynomial Coefficient)** створити вектор ***V***, що містить коефіцієнти полінома;

2) розв'язати рівняння $g(x) = 0$ за допомогою функції ***polyroots***;

3) розв'язати рівняння символьно, використовуючи меню **Символы (Symbolics) ⇒ Переменная (Variable) ⇒ Вычислить (Решение** для MathCAD 2001i Professional**) (Solve)**.

Таблиця 2.2

Варіанти до вправи 3

№ з/п	$g(x)$	**№ з/п**	$g(x)$
1	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$	**9**	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
2	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$	**10**	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
3	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$	**11**	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$	**12**	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x -140$	**13**	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	**14**	$x^4 + 10x^3 +36x^2 +70x+ 75$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$	**15**	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x+ 60$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$		

Вправа 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь (табл. 2.3):

1) використовуючи функцію ***Find***;

2) матричним способом і використовуючи функцію ***lsolve***.

Таблиця 2.3

Варіанти до вправи 4

№ з/п	Система лінійних рівнянь	**№ з/п**	Система лінійних рівнянь

№ з/п	Система лінійних рівнянь	№ з/п	Система лінійних рівнянь
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23, \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37, \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158, \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66, \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63, \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146, \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88, \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16, \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72, \\ x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -159 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -10, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27, \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

№ з/п	Система лінійних рівнянь	№ з/п	Система лінійних рівнянь
7	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15, \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124, \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54, \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83, \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15, \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$		

Вправа 5. Перетворити нелінійні рівняння системи з табл. 2.4 до вигляду $f_1(x) = y$ і $f_2(y) = x$. Побудувати їх графіки і визначити початкове наближення розв'язку. Розв'язати систему нелінійних рівнянь за допомогою функції ***Minerr***.

Таблиця 2.4

Варіанти до вправи 5

№ варіанта	Система нелінійних рівнянь	№ варіанта	Система нелінійних рівнянь
1	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2, \\ \cos(y - 1) + x = 0.7 \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} \sin y + x = -0.4, \\ 2y - \cos(x + 1) = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin(x + 0.5) - y = 1, \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} \sin(x + 2) - y = 1.5, \\ \cos(y - 2) + x = 0.5 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \cos x + y = 1.5, \\ 2x - \sin(y - 0.5) = 1 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} \cos(x + 0.5) - y = 2, \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \cos(x + 0.5) + y = 0.8, \\ \sin y - 2x = 1.6 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} \cos(x - 2) + y = 0, \\ \sin(y + 0.5) - x = 1 \end{cases}$

5	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y, \\ x - \sin(y+1) = 0.8 \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 1, \\ \sin(y+0.5) - x = 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 1, \\ \sin y - 2x = 2 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} \sin x - 2y = 1, \\ \cos(y+0.5) - x = 2 \end{cases}$
7	$\begin{cases} -\sin(x+1) + y = 0.8, \\ \sin(y-1) + x = 1.3 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} -\sin(x-0.5) + 2y = 1, \\ \cos y + x = 1.5 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin x - 2y = 1, \\ \sin(y-1) + x = 1.3 \end{cases}$		

2.6. Контрольні запитання

1. Які способи знаходження початкового наближення Ви знаєте?
2. Які функції для розв’язування одного рівняння в MathCAD Ви знаєте? У чому їх відмінність?
3. Які аргументи функції ***root*** необов'язкові?
4. У яких випадках MathCAD не може знайти корінь рівняння?
5. Яка системна змінна відповідає за точність обчислень?
6. Як змінити точність, з якою функція ***root*** шукає корінь?
7. Як системна змінна TOL впливає на розв’язок рівняння за допомогою функції ***root***?
8. Які функції існують у MathCAD для розв’язування систем рівнянь? Які особливості їх застосування?
9. Яку структуру має блок розв’язування рівнянь?
10. Який знак рівності використовується в блоці розв’язування? Якою комбінацією клавіш він вставляється у документ?
11. Які вирази неприпустимі всередині блоку розв’язування рівняння?
12. Які способи використання функції ***Find*** Ви знаєте?
13. У яких випадках MathCAD не може знайти розв’язок системи рівнянь?
14. Чим відрізняються функції ***Find*** і ***Minerr*** ?
15. Які рівняння називаються матричними?

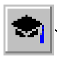
16. Як розв’язуються матричні рівняння? Які способи розв’язування матричних рівнянь Ви знаєте?
17. Як символьно розв’язати рівняння або систему рівнянь у MathCAD? Який знак рівності при цьому використовується? Якою комбінацією клавіш він вставляється у документ?
18. Які особливості використання символьного розв’язування рівнянь?

3. СИМВОЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ

Системи комп'ютерної алгебри забезпечуються спеціальним процесором для виконання аналітичних (символьних) обчислень. Його основою є ядро, що зберігає всю сукупність формул і формульних перетворень, за допомогою яких виконуються аналітичні обчислення. Чим більше цих формул у ядрі, тим надійнішою є робота символьного процесора і тим імовірніше, що задача буде розв’язана, якщо такий розв’язок існує взагалі (що буває не завжди).

Ядро символьного процесора системи MathCAD – трохи спрощений варіант ядра відомої системи символьної математики Maple фірми Waterloo Maple Software, у якої фірма MathSoft (розроблювач MathCAD) придбала ліцензію на його застосування, завдяки чому MathCAD стала (починаючи з версії 3.0) системою символьної математики. Символьні обчислення виконуються так само просто (для користувача), як і обчислення квадрата *x*.

Символьні операції можна виконувати двома способами:

- безпосередньо в командному режимі (використовуючи операції меню **Символы (Symbolics)**);
- за допомогою операторів символьного перетворення (використовуючи **палітру інструментів Символы** ).

3.1. Виділення виразів для символьних обчислень

Щоб символьні операції виконувалися, процесору необхідно вказати, над яким саме виразом ці операції мають здійснюватися, тобто треба виділити цей вираз. Для ряду операцій варто не тільки вказати вираз, до якого вони відносяться, але й відзначити змінну, відносно якої виконується та чи інша символьна операція. Сам вираз у такому випадку не виділяється.

Таким чином, для виконання операцій із символьним процесором треба спочатку виділити об'єкт (увесь вираз або його частину).

Символьні операції розбиті на п'ять характерних розділів. Першими йдуть операції, що використовуються частіше від інших. Вони можуть виконуватися з виразами, що містять комплексні числа або мають розв’язок у комплексному вигляді.

3.2. Символьні операції

Операції з виділеними виразами

Якщо у документі є виділений вираз, то з ним можна виконувати операції, наведені нижче.

1. **Оценивание (Evaluate)** – перетворити вираз з вибором команди перетворення з підменю:

- **Символический [Shift + F9] (Symbolically)** – виконати символьне перетворення виділеного виразу;
- **Плавающая точка… (Floating Point)** – виконати арифметичні операції у виразі, результат якого повинен бути поданий у формі числа з плаваючою крапкою (у дійсних числах);
- **Комплексный (Complex)** – виконати обчислення у комплексному вигляді.

2. **Упрощение (Simplity)** – спростити виділений вираз з виконанням таких операцій, як скорочення подібних доданків, приведення дробів до спільного знаменника, використання основних тригонометричних тотожностей і т д.

3. **Расширение (Expand)** – „розкрити” вираз (наприклад, для $(X + Y)\ (X - Y)$ одержуємо $X^2 - Y^2$).

4. **Фактор (Factor)** – розкласти число або вираз на множники (наприклад, $X^2 - Y^2$ дасть $(X + Y)\ (X - Y)$).

5. **Собирание (Collect)** – зібрати доданки, подібні до виділеного виразу, який може бути окремою змінною або функцією зі своїм аргументом (результатом буде вираз, поліноміальний відносно обраного виразу).

6. **Полиномиальные коэффициенты (Polynomial Coefficients)** – за заданою змінною знайти коефіцієнти полінома, що апроксимує вираз, у якому ця змінна використана.

Операції з виділеними змінними

Для ряду операцій треба знати, відносно якої змінної вони виконуються. У цьому випадку необхідно виділити змінну, встановивши на ній маркер вводу. Після цього стають доступними такі операції підменю **Переменная (Variable)**:

- **Решение (Solve)** – розв'язати рівняння або нерівність відносно виділеної змінної;
- **Замена (Substitute) –** замінити зазначену змінну вмістом буферу обміну;
- **Дифференциация (Differintiate) –** диференціювати вираз за виділеною змінною (інші змінні розглядаються як константи);
- **Интеграция (Integrate) –** інтегрувати вираз, що містить виділену змінну, за цією змінною;
- **Расширение в числовых последовательностях… (Expand to Series) –** знайти кілька членів розкладу виразу в ряд Тейлора відносно виділеної змінної;
- **Преобразование в частичные дроби (Convert to Partial Fraction) –** розкласти на елементарні дроби вираз, що розглядається як раціональний дріб відносно виділеної змінної.

Операції з виділеними матрицями

Операції з виділеними матрицями наведені у підменю **Матрица (Matrix)**, що має своє підменю з такими операціями:

- **Транспозиция (Transpose) –** одержати транспоновану матрицю;
- **Инвертирование (Invert) –** створити зворотну матрицю;
- **Определитель (Determinant) –** обчислити визначник матриці.

Результати символьних операцій з матрицями часто виявляються надмірно громіздкими і тому неповністю доступними до огляду.

Операції перетворення

У підменю **Трансформация (Transform)** меню **Символы (Symbolics)** міститься розділ операцій перетворення, що створює підменю з такими можливостями:

- **Фурье (Fourier) –** виконати пряме перетворення Фур'є відносно виділеної змінної;
- **Обратное преобразование Фурье (Inverse Fourier) –** виконати зворотне перетворення Фур'є відносно виділеної змінної;
- **Лаплас (Laplace) –** виконати пряме перетворення Лапласа відносно виділеної змінної (результат – функція змінної *s*);
- **Обратное преобразование Лапласа (Inverse Laplace)–** виконати зворотне перетворення Лапласа відносно виділеної змінної (результат – функція змінної *t*);
- **Z –** виконати пряме Z-перетворення виразу відносно виділеної змінної (результат – функція змінної *z*);
- **Обратное Z (Inverse Z) –** виконати зворотне Z-перетворення відносно виділеної змінної (результат – функція змінної *n*).

3.3. Стиль відображення результатів обчислень

На наочність обчислень впливає стиль відображення їх результатів. Описана далі команда дозволяє задати той або інший стиль.

Стиль Вычисления... (Evaluation Style) – задає вивід результату символьної операції під основним виразом, поруч з ним або замість нього (рис. 3.1).

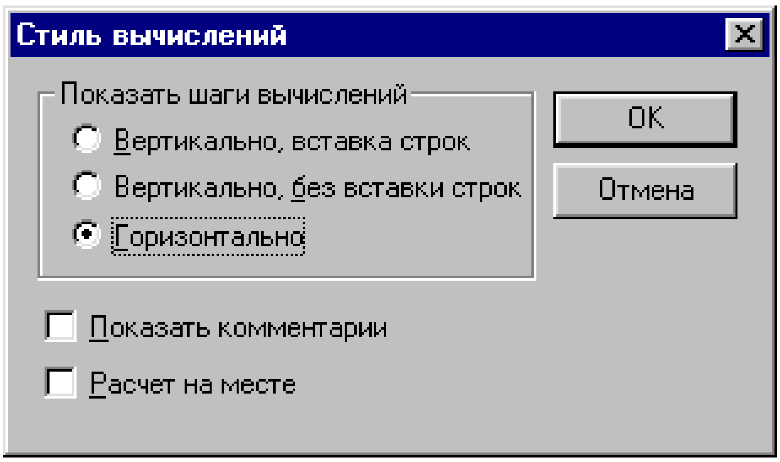


Рис. 3.1. Стиль обчислень

3.4. Приклади символьних операцій у командному режимі

Більшість символьних операцій виконуються досить легко, тому нижче зупинимося лише на деяких прикладах.

Символьна операція **Оценивание (Evaluate)** забезпечує роботу з математичними виразами, що містять вбудовані в систему функції, подані в різному вигляді: поліноміальному, дробово-раціональному, у вигляді сум і добутків, похідних та інтегралів і т.д. (рис. 3.2). Операція прагне виконати всі можливі обчислення і подати вираз в найпростішому вигляді. Вона можлива над матрицями із символьними елементами. Похідні й визначені інтеграли, символьні значення яких обчислюються, мають бути подані у своїй природній формі.

Особливо слід відзначити можливість виконання чисельних обчислень з підвищеною точністю – 20 знаків після коми. Для переходу в такий режим обчислень треба числові константи в об'єктах, що обчислюються, задавати з обов'язковим вказуванням десяткової крапки, наприклад 10.0 або 3.0, а не 10 або 3. Ця ознака є вказівкою на проведення обчислень даного типу.

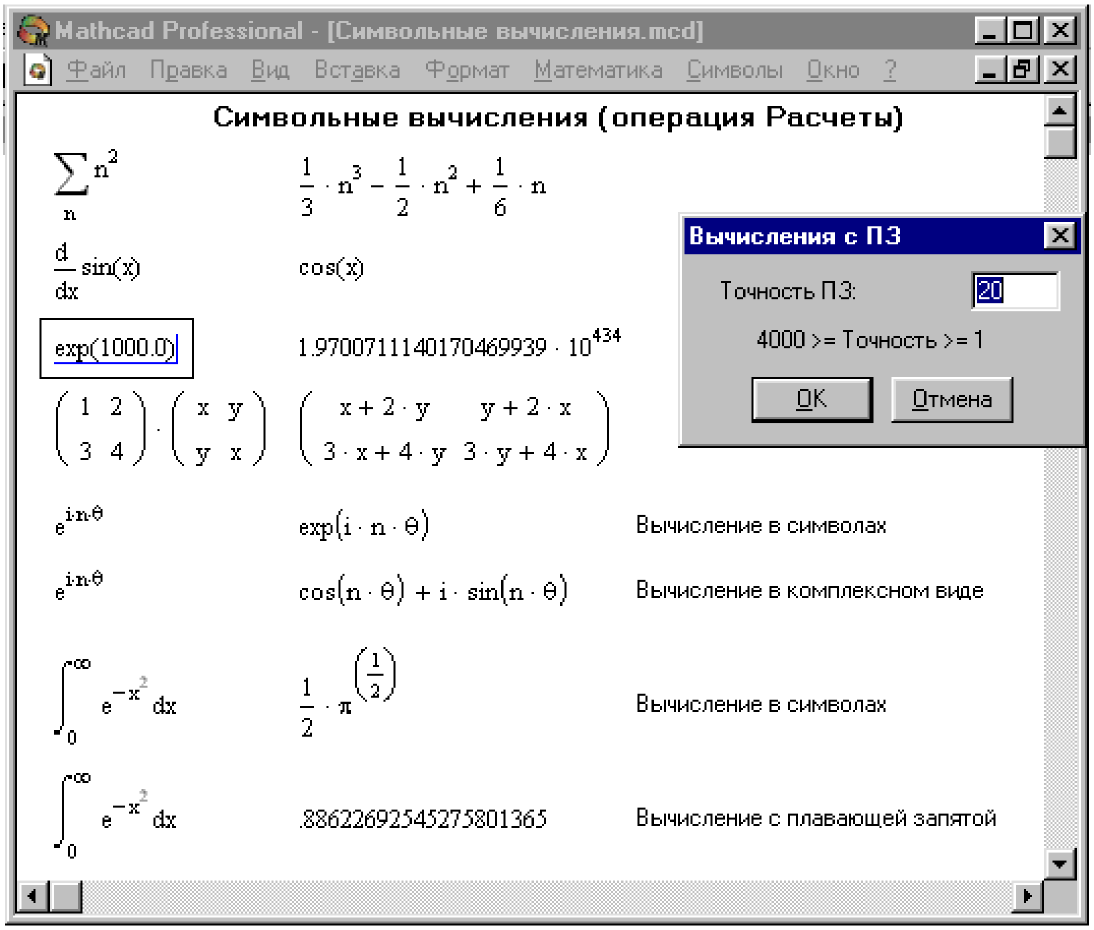


Рис. 3.2. Символьні обчислення

На рис. 3.2 показані типові приклади дії операції **Оценивание (Evaluate)**.

Ліворуч вказані вихідні вирази, що підлягають символьним перетворенням, а праворуч – результат цих перетворень.

Операція **Оценивание (Evaluate)** одна із найпотужніших. Як видно з рис. 3.2, вона дозволяє в символьному вигляді обчислювати суми й добутки рядів, похідні й невизначені інтеграли, виконувати символьні та чисельні операції з матрицями. Ця операція містить підменю. Команда **Символический (Symbolically)** у цьому разі найбільш важлива. Призначення інших команд очевидне: вони потрібні, якщо результат необхідно одержати у формі комплексного чи дійсного числа. Наприклад, якщо ви хочете замість числа π одержати 3.141..., використовуйте команду **Плавающая точка… (Floating Point)**. У режимі символьних обчислень результат може перевищувати машинну нескінченність системи – див. приклад на обчислення exp(1000.0) на рис. 3.2. При цьому число точних значущих цифр результату практично необмежене (або, точніше кажучи, залежить від ємності ОЗУ).

Операція **Расширение в числовых последовательностях… (Expand to Series)** повертає розклад в ряд Тейлора виразу відносно виділеної змінної із заданим за запитом числом членів ряду n (число визначається за степенями ряду). За замовчуванням задано $n = 6$. У розкладі вказується залишкова похибка розкладання. На рис. 3.3 подане застосування цієї операції для розкладання функції $\sin(x)/x$. Мінімальна похибка виходить за малих x (див. графічне зображення функції та її ряду).

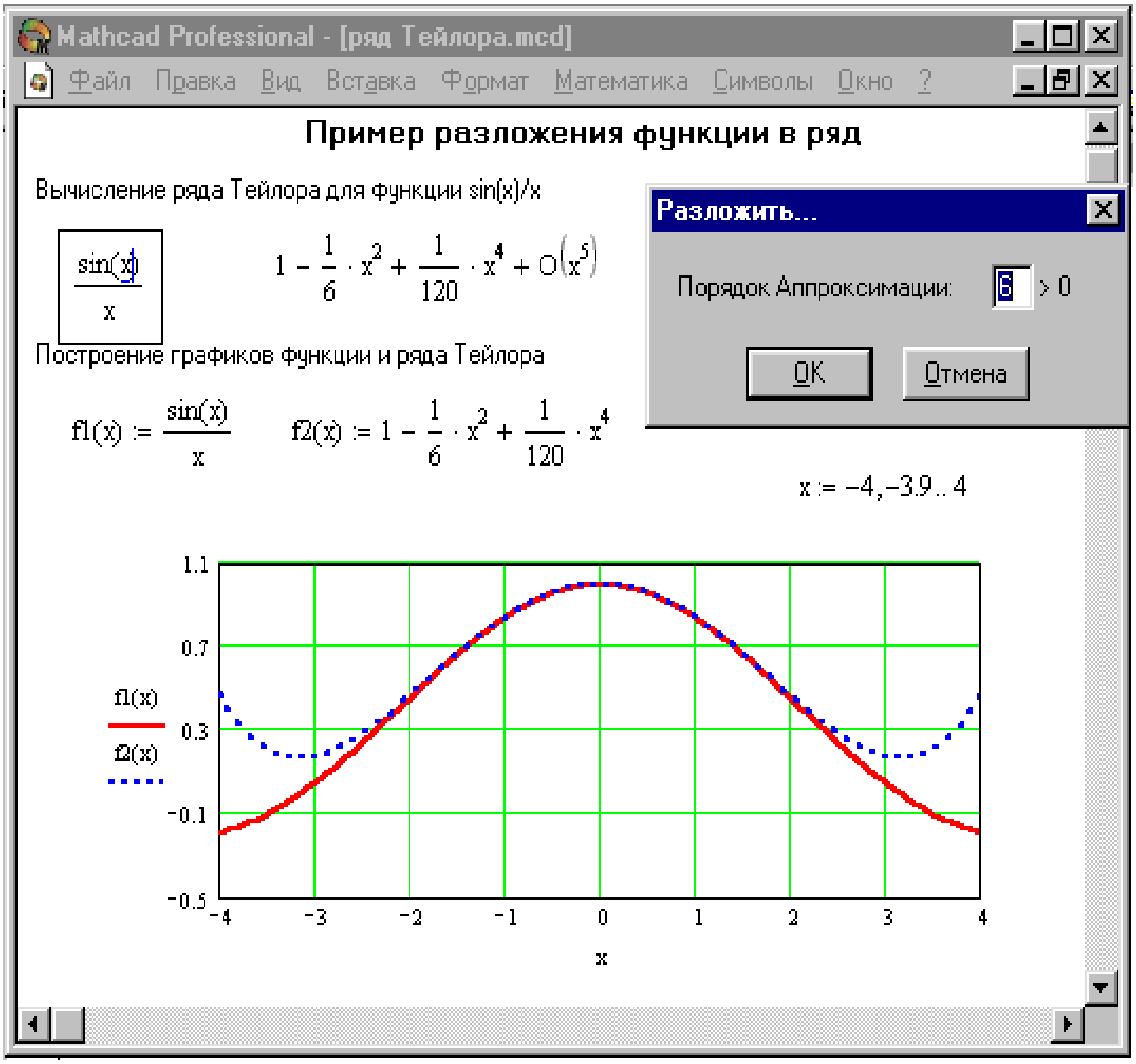


Рис. 3.3. Розкладання функцій в ряд Тейлора

3.5. Оператори обчислення границь функцій

Для обчислення границь функцій у систему MathCAD введений символьний оператор **limit**. Крім введення з панелі **Матаналіз (Calculus)**, його в трьох формах можна ввести натисканням таких комбінацій клавіш:

- **[Ctrl] L** – введення шаблона оператора обчислення границі функції, якщо *x* прямує до заданого значення;
- **[Ctrl] A** – введення шаблона обчислення границі функції ліворуч від заданої точки;
- **[Ctrl] B** – введення шаблона обчислення границі функції праворуч від заданої точки.

На рис. 3.4 показані приклади обчислення границь. Для знаходження значень границь треба заповнити шаблони, що входять у головний шаблон для обчислення границь, а потім ввести функцію, ім'я змінної, за якою відшукується границя, і значення змінної – аргументу функції.

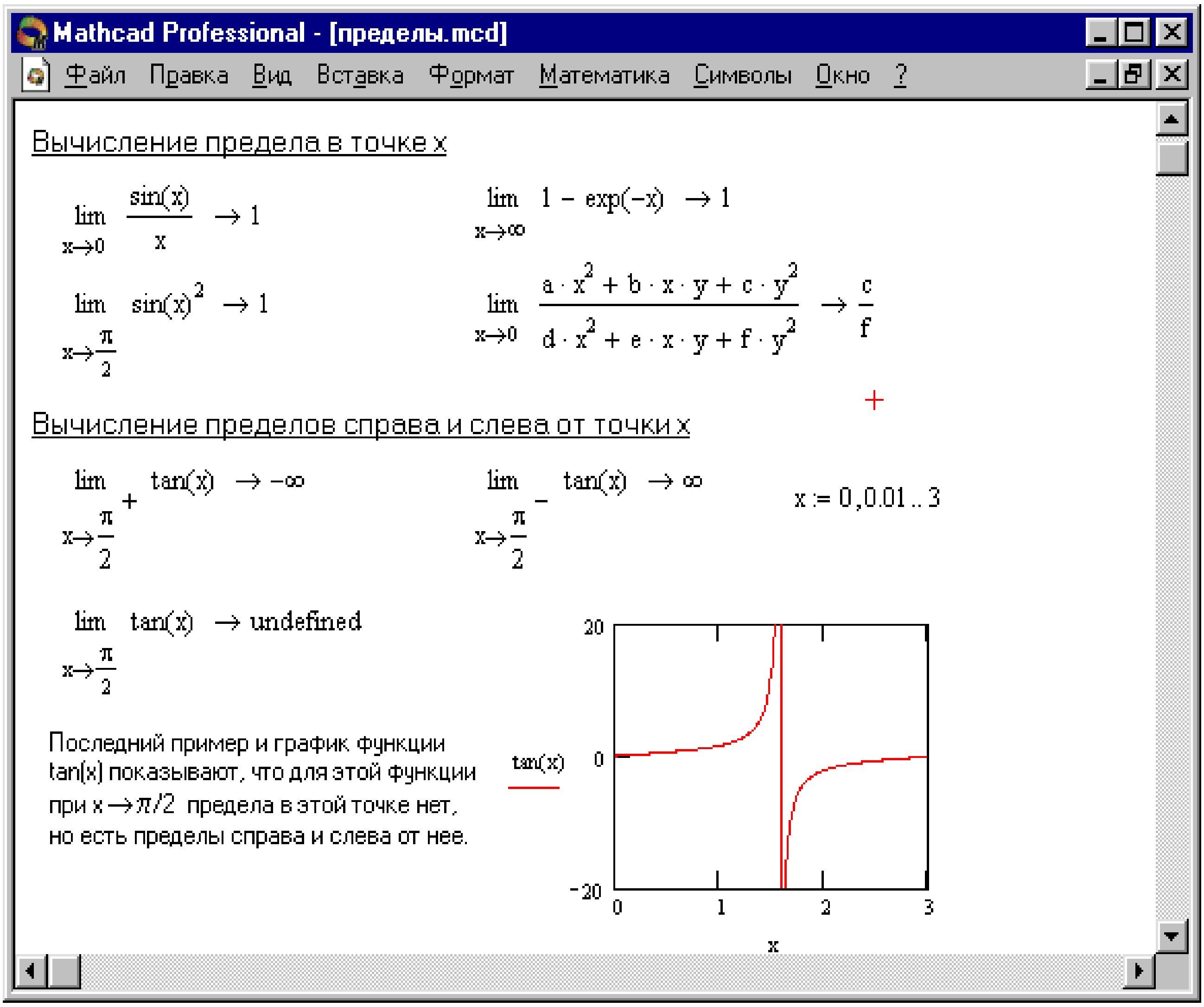


Рис. 3.4. Обчислення границь

Для одержання результату встановіть після блоку обчислення границі стрілку з вістрям, спрямованим вправо. Границя (якщо вона існує) буде обчислена і з'явиться в шаблоні біля вістря стрілки. Якщо функція не має границі, замість результату з'явиться напис ***Undefine***.

3.6. Задання операторів користувача

Ще одна можливість, властива новим версіям системи MathCAD – задання нових операторів користувача. Такий оператор задається практично так само, як функція користувача, але замість імені вибирається який-небудь придатний знак. Наприклад, можна задати оператор ділення у вигляді:

$\div(A, B) := \frac{A}{B}$ – задання нового оператора ділення;

$\div(6,\ 2) = 3$ – застосування функції ділення;

$6 \div 2 = 3$ – застосування нового оператора ділення.

На перший погляд, усе досить просто, але в цьому способі є свої проблеми. Вбудовані в систему оператори не можна перевизначити. Тому набір доступних знаків для позначення нових операторів обмежений. Наприклад, не можна задати новий оператор ділення знаком / (він уже використаний), але можна взяти знак $\div$, оскільки цей символ системою не використовується.

Інша проблема пов'язана з введенням символу нового оператора. Перш за все, його не можна ввести прямо. Доводиться скористатися типовими прийомами введення нових символів у документи Windows. Один із цих прийомів – використання додатка, що видає таблицю символів, з можливістю його експорту з цієї таблиці в документ іншого додатка (у нашому випадку – у документ MathCAD).

Можна також скористатися придатним знаком з набору MATH SYMBOL, що є у складі Шпаргалок, доступ до яких надає Ресурс Центр (меню **Помощь (Help)**). На рис. 3.5 показаний такий варіант задання нового оператора користувача. Для перетягування знака можна скопіювати його в буфер обміну за допомогою операції **Копировать**, а потім ввести в документ, використовуючи операцію **Вставка.**

Після того як оператор заданий, його можна використовувати і як функцію, і як оператор. Приклади наведені на рис. 3.5. Для застосування нового оператора треба вивести його шаблон за допомогою панелі математичних знаків (вона також показана рис. 3.5). У нашому випадку досить натиснути кнопку 

цієї панелі – вона виводить особливий шаблон вигляду ▪ ▪ ▪. Введіть операнди, наприклад 6 і 3, у крайні прямокутники, а символ оператора – у середній. Поставивши після цієї конструкції знак дорівнює, побачите результат – число 2.

Можна задати й інші оператори, наприклад для роботи з одним операндом. Так, ви можете задати оператор для перерахування значення температури за шкалою Цельсія на його значення за шкалою Фаренгейта:

$$°C(x) := \frac{9}{5} \cdot x + 32 \qquad °F := 1$$

Потім, використовуючи кнопку xf панелі символів відношення, можна виконувати операцію перерахування у вигляді:

$$37°C = 98.6°F$$

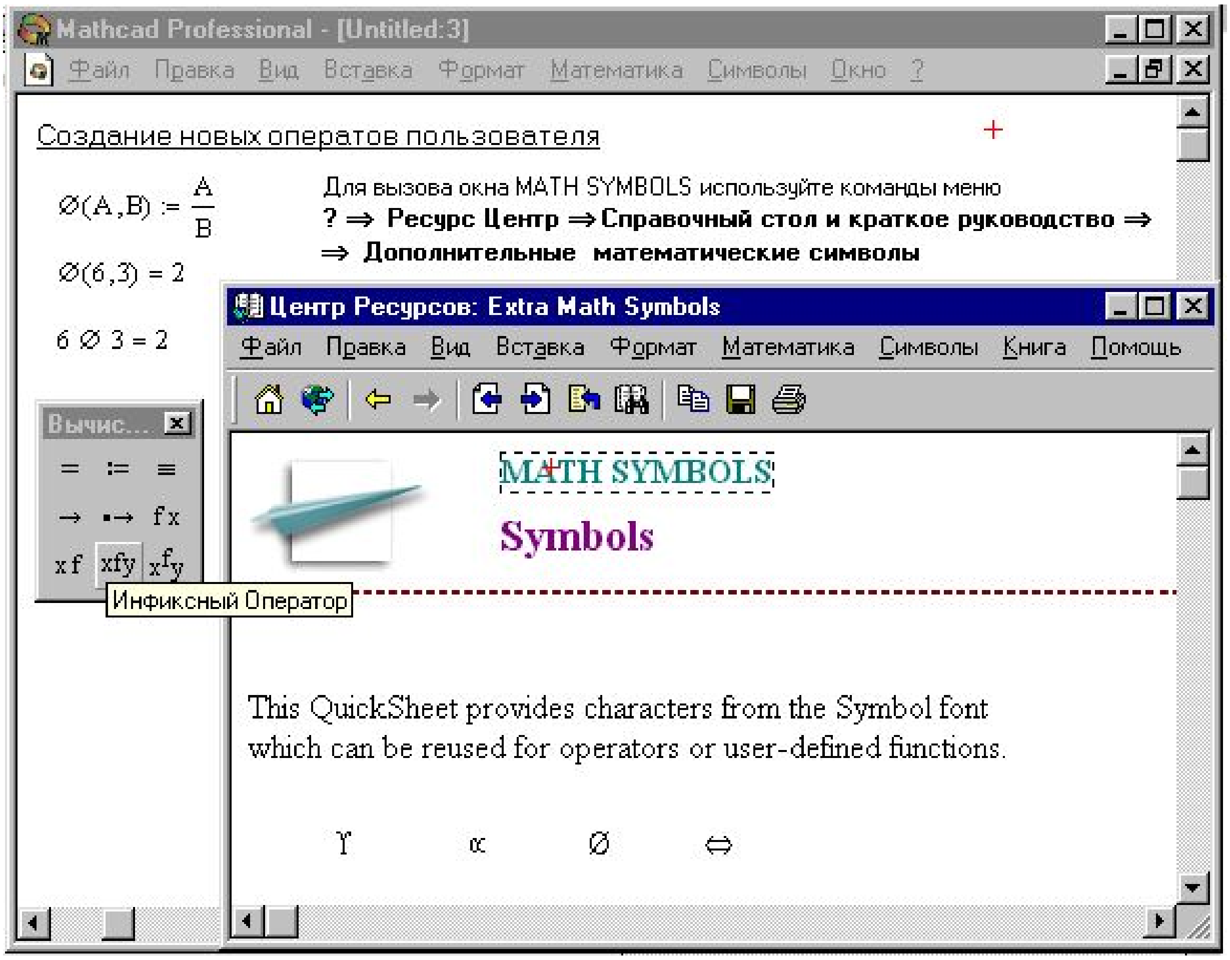


Рис. 3.5. Задання оператора користувача з вибором імені з набору знаків

Є галузі математики та фізики, де без задання нових операторів не обійтися, оскільки вони є частиною специфічної мови їх опису.

3.7. Вправи для самостійної роботи

Вправа 1. Використовуючи меню **Символы (Symbolics) ⇒ Оценивание (Evaluate) ⇒ Плавающая точка… (Floating Point)**, подайте:

1) число π у 7 позиціях;
2) число 12, 345667 у 3 позиціях.

Вправа 2. Виведіть вказані числа в комплексній формі, використовуючи операцію **Оценивание (Evaluate) ⇒ Комплексный (Complex)** меню **Символы (Symbolics)**:

1) $\sqrt{-7}$;
2) $tg\left(a^{\sqrt{-3}}\right)$;
3) $e^{1+\frac{\pi}{4}i}$;
4) для виразу 3) послідовно виконайте операції **Оценивание (Evaluate) ⇒ Комплексный (Complex)** і **Упрощение (Simplity)** меню **Символы (Symbolics)**.

Вправа 3. Для полінома $g(x)$ (табл. 3.1) виконати такі дії:

1) розкласти на множники, використовуючи меню **Символы (Symbolics) ⇒ Фактор (Factor)**;
2) підставити вираз x = y + z у g(x), використовуючи операцію **Символы (Symbolics) ⇒ Переменная (Variable) ⇒ Замена (Substitute)** (попередньо скопіювавши вираз, що підставляється, у буфер обміну, виділивши його і натиснувши комбінацію клавіш **Ctrl + C**);
3) використовуючи меню **Символы (Symbolics) ⇒ Расширение … (Expand to Series)**, розкладіть за степенями вираз, одержаний у 2);
4) використовуючи меню **Символы (Symbolics) ⇒ Собирание (Collect)**, згорніть вираз, одержаний у 3), за змінною z.

Таблиця 3.1

Варіанти до вправи 3

№ з/п	g(x)	№ з/п	g(x)
1	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$	**9**	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$

2	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$	**10**	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
3	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$	**11**	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$	**12**	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x -140$	**13**	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	**14**	$x^4 + 10x^3 +36x^2 +70x+ 75$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$	**15**	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x+ 60$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$		

Вправа 4. Розкладіть вирази на елементарні дроби, використовуючи операцію **Символы ⇒ Переменная ⇒ Преобразование в частичные дроби**:

$$1)\ \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x}; \qquad 2)\ \frac{3x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)};$$

$$3)\ \frac{x + 1}{x(x - 1)^3}; \qquad 4)\ \frac{5x^2 - 4x + 16}{(x^2 - x + 1)^2(x - 3)}.$$

Вправа 5. Розкладіть вирази в ряд із заданою точністю, використовуючи операцію **Символы ⇒ Переменная ⇒ Расширение в числовых последовательностях...** :

1) ln (1 + x), $x_0 = 0$, порядок розкладання 6;

2) sin $(x)^2$, $x_0 = 0$, порядок розкладання 6.

Вправа 6. Знайти первісну аналітично заданої функції $f(x)$ (табл. 3.2), використовуючи операцію **Символы (Symbolics) ⇒ Переменная (Variable) ⇒ Интеграция (Integrate)**.

Вправа 7. Визначити символьне значення першої і другої похідних $f(x)$ (табл. 3.2), використовуючи меню **Символы (Symbolics) ⇒ Переменная (Variable) ⇒ Дифференциация (Differintiate)**.

Таблиця 3.2

Варіанти до вправ 6 і 7

№ з/п	$f(x)$	№ з/п	$f(x)$	№ з/п	$f(x)$
1	$1/(\mathrm{tg}\,2x+1)$	**6**	$x^2\cdot \mathrm{arctg}(x/3)$	**11**	$(2x+3)\sin x$
2	$\cos x/(2x+5)$	**7**	$e^{2x}\sin 3x$	**12**	$\cos 3x/(1-\cos 3x)^2$
3	$1/(x\sqrt{x^3}+4)$	**8**	$\mathrm{ctg}\,2x/(\sin 2x)^2$	**13**	$1/(1+x+x^2)$
4	$\sin x/(1+\sin x)$	**9**	$(x+1)\sin x$	**14**	$(1+x)/(2+x)$
5	$x^2\cdot \lg(x+2)$	**10**	$5x+x\lg x$	**15**	$\sqrt{1+e^{-x}}$

Вправа 8.

1) Транспонуйте матрицю $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ x & 2 & c\\ x^2 & 3 & d\end{pmatrix}$$

за допомогою операції **Символы (Symbolics) ⇒ Матрица (Matrix) ⇒ Транспозиция (Transpose)**.

2) Інвертуйте матрицю

$$\begin{pmatrix}1 & y\\ x & 2\end{pmatrix}$$

за допомогою операції **Символы (Symbolics) ⇒ Матрица (Matrix) ⇒ Инвертирование (Invert)**.

3) Обчисліть визначник матриці $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ x & 2 & c\\ x^2 & 3 & d\end{pmatrix}$$

за допомогою операції **Символы (Symbolics) ⇒ Матрица (Matrix) ⇒ Определитель (Determinant)**.

Вправа 9. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$;

2) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0+} (x+1)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (2\sin x - \cos x + \operatorname{ctg} x)$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$;

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Вправа 10. Задайте оператори користувача:

1) для перерахування одиниць довжини (*дюйми* у *мм*, *милі* у *м*), якщо відомо, що

1 *дюйм* = 25.4 *мм*;

1 *миля* (морська) = 1853.2 *м*;

1 *миля* (сухопутна) = 1609 *м*.

2) для перерахування одиниць ваги (*унції* у *г*, *фунти* у *г*) якщо відомо, що

1 *унція* = 28.35 *г*;

1 *фунт* (торговий) = 453.6 *г*.

3.8. Контрольні запитання

1. Які існують способи виконання символьних операцій у MathCAD?
2. Як необхідно змінити вираз перед застосуванням символьних перетворень у командному режимі?
3. Які Ви знаєте (у системі MathCAD) символьні операції з виділеними виразами?
4. Які символьні операції з виділеними змінними в системі MathCAD Вам відомі?
5. Які Ви знаєте у системі MathCAD символьні операції з виділеними матрицями?
6. Які Ви знаєте символьні операції перетворення у системі MathCAD?

7. Які параметри визначає стиль зображення результатів обчислень і де він задається?
8. У яких випадках результат символьних перетворень міститься в буфері обміну?
9. Яким чином можна обчислити границі в MathCAD?
10. Для чого необхідне задання операторів користувача?
11. Як задати оператор користувача?

4. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Функції для розв’язування звичайних диференціальних рівнянь

Починаючи з версії 5.0 PLUS, у систему MathCAD була введена можливість чисельного розв’язування як окремих диференціальних рівнянь, так і їх систем. Цю можливість важко переоцінити, тому що багато науково-технічних задач (особливо тих, що стосуються аналізу динамічних систем та їх математичного моделювання) базуються на чисельних методах розв’язування диференціальних рівнянь. У більшості випадків виникає необхідність зображення розв’язків диференціальних рівнянь та їх систем у графічному вигляді, що також доступно для системи MathCAD.

Функції для розв’язування систем звичайних диференціальних рівнянь

Для розв’язування систем звичайних диференціальних рівнянь у системі MathCAD передбачені такі функції:

- ***rkadapt (y, x1, x2, acc, F, k, s)*** – повертає матрицю, що містить таблицю значень розв’язку задачі Коші, одержаного методом Рунге-Кутта зі змінним кроком, на інтервалі від *x1* до *x2* для системи звичайних диференціальних рівнянь (де ***y*** – вектор початкових умов, ***F*** – вектор правих частин рівнянь системи, *k* – максимальне число серединних точок розв’язку, *s* – мінімально припустимий інтервал між точками, *acc* – контролює точність розв’язку);
- ***Rkadapt (y, x1, x2, n, F)*** – повертає матрицю розв’язку методом Рунге-Кутта зі змінним кроком для системи звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами, заданими у векторі ***y***. Праві частини рівнянь записані в символьному векторі ***F*** на інтервалі від *x1* до *x2*; *n* – число кроків;
- ***rkfixed (y, x1, x2, n, F)*** – повертає матрицю розв’язку методом Рунге-Кутта системи звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами, за-

даними вектором $\boldsymbol{y}$. Праві частини рівнянь записані в символьному векторі $\boldsymbol{F}$ на інтервалі від $x1$ до $x2$ при фіксованому числі кроків n.

На рис. 4.1 показане застосування функції ***rkfixed*** до розв'язування задачі Коші – для системи з двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x - y + t; \end{cases} \quad \text{якщо } x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

Розв'язок зображений у вигляді фазового портрета й у вигляді залежності невідомих функцій від часу. Багато інших прикладів розв'язування систем диференціальних рівнянь можна знайти в електронних книгах системи MathCAD.

Якщо відомо, що розв'язок системи диференціальних рівнянь має вигляд гладких функцій, то замість описаної раніше функції ***rkfixed*** доцільно застосовувати функцію ***Bulstoer***.

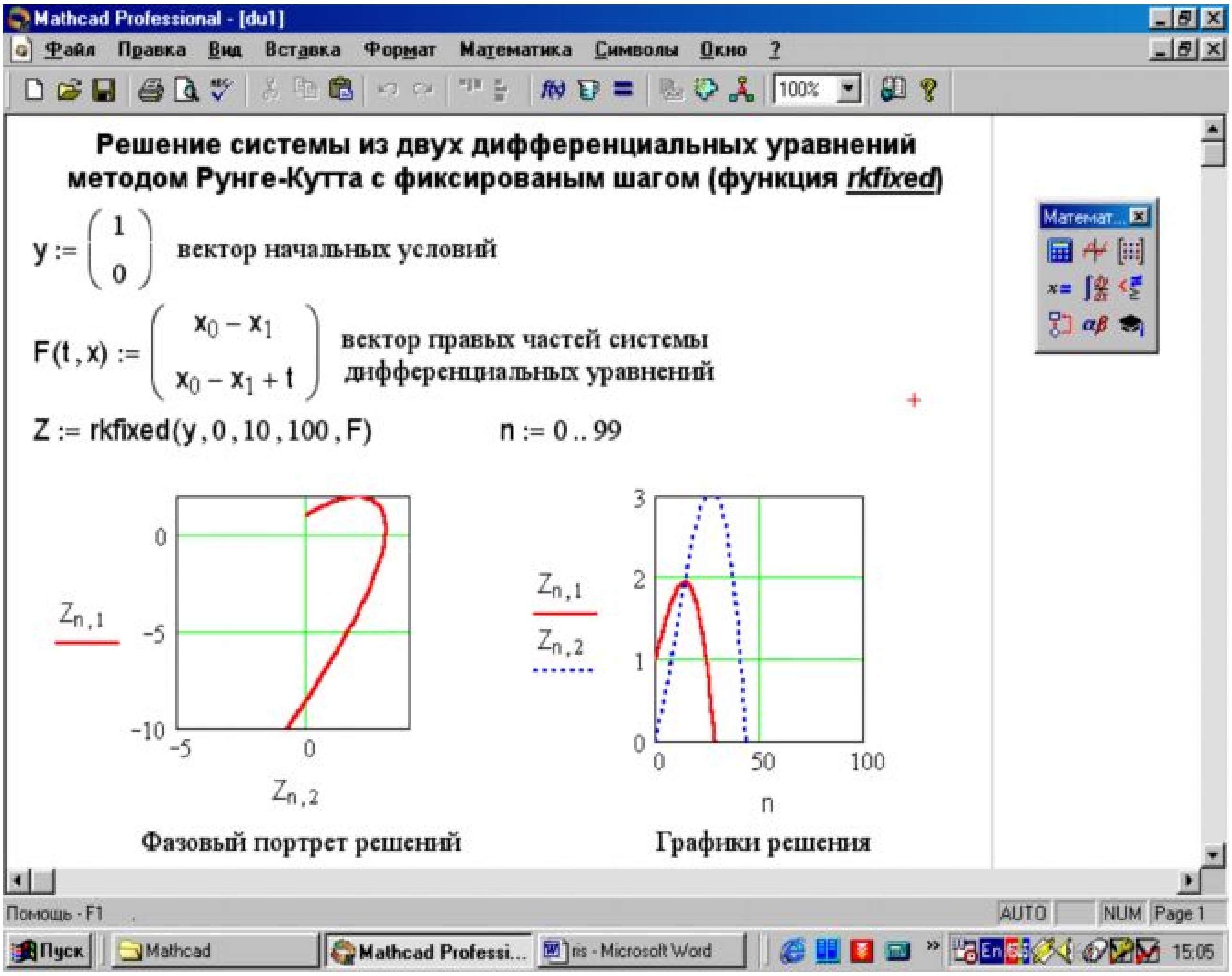


Рис. 4.1. Розв'язування задачі Коші для системи диференціальних рівнянь із застосуванням функції *rkfixed* (MathCAD 2000 Professional)

Bulstoer (y, x1, x2, n, F) – повертає матрицю розв’язку системи звичайних диференціальних рівнянь, права частина яких (у вигляді перших похідних невідомих функцій) записана у векторі ***F*** за заданих у векторі ***y*** початкових умов, для знаходження на інтервалі від *x1* до *x2 n* точок розв’язку, не рахуючи початкової точки. Функція ***Bulstoer*** реалізує метод Bulirsch-Stoer (Булірша-Штера).

Функції для розв’язування жорстких систем диференціальних рівнянь

Термін «жорсткий» запозичене з механіки, де чисельне розв’язування деяких систем диференціальних рівнянь вимагає різного кроку інтегрування за різними невідомими функціями. Для розв’язування жорстких систем диференціальних рівнянь у пакеті MathCAD введений ряд функцій:

- ***bulstoer (y, x1, x2, acc, F, k, s)*** – повертає на інтервалі від *x1* до *x2* матрицю розв’язку системи звичайних диференціальних рівнянь, права частина яких записана в символьному векторі ***F*** із заданими у векторі ***y*** початковими умовами (використовується метод розв’язування Булірша-Штера зі змінним кроком, параметри *k* і *s* задають максимальне число серединних точок, на яких шукається розв’язок і мінімально припустимий інтервал між ними;
- ***Stiffb (y, x1, x2, n, F, J)*** – повертає матрицю розв’язку жорсткої системи диференціальних рівнянь, права частина яких записана в символьному векторі ***F***, а також функції Якобіана ***J***, ***y*** – вектор початкових значень на інтервалі [*x1*, *x2*] (для розв’язування використовується метод Булірша-Штера);
- ***stiffb (y, x1, x2, acc, F, J, k, s)*** – повертає матрицю розв’язку тільки в кінцевій точці жорсткої системи диференціальних рівнянь, права частина яких записана в символьному векторі ***F*** із заданими у векторі ***y*** початковими умовами, а також функції Якобіана ***J*** (для розв’язування використовується метод Булірша-Штера зі змінним кроком);
- ***Stiffr (y, x1, x2, n, F, J)*** – повертає матрицю розв’язку жорсткої системи диференціальних рівнянь, права частина яких записана в символьному векторі ***F***, а також функції Якобіана ***J***, ***y*** – вектор початкових значень на інтервалі

[*x1*, *x2*] (для розв'язування використовується метод Розенброка);

❖ ***<u>stiffr (y, x1, x2, acc, F, J, k, s)</u>*** – повертає матрицю розв'язку тільки в кінцевій точці жорсткої системи диференціальних рівнянь, права частина яких записана в символьному векторі ***F*** із заданими у векторі ***y*** початковими умовами, а також функції Якобіана ***J***, *k* і *s* задають максимальне число серединних точок, у яких шукають розв'язок і мінімально припустимий інтервал між ними (для розв'язування використовується метод Розенброка зі змінним кроком).

У наведених функціях: *acc* – похибка розв'язку (рекомендується порядку 0.001). Слід зазначити, що функції, які починаються з малої літери, дають розв'язок тільки для кінцевої точки. Відрізняються функції також і за методом розв'язування.

Матриця-функція Якобі ***J***, що фігурує в цих функціях, має розмір $n \times (n+1)$ і записується у вигляді

$$\boldsymbol{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_n(x, y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x, y)}{\partial y_n} \end{bmatrix}.$$

На рис. 4.2 показане розв'язування жорсткої системи диференціальних рівнянь за допомогою функції ***stiffr***.

Результати розв'язування представлені графіками і таблицею значень вектора ***Y***. Методика роботи з іншими функціями для розв'язування жорстких систем диференціальних рівнянь подібна до описаної вище.

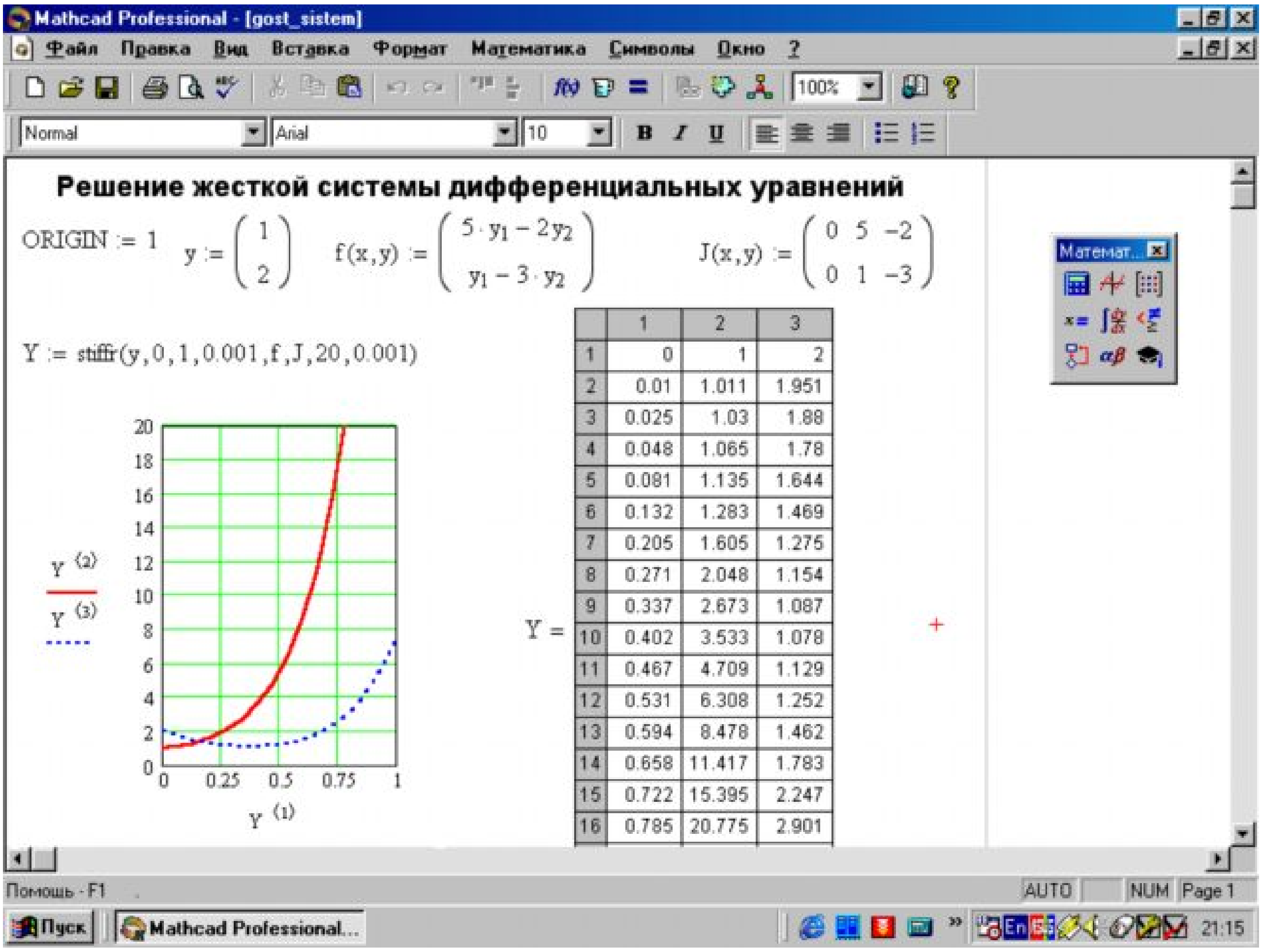


Рис. 4.2. Розв'язування жорсткої системи диференціальних рівнянь за допомогою функції *stiffr* (MathCAD 2000 Professional)

Функції для розв'язування диференціальних рівнянь Пуассона і Лапласа

Для розв'язування диференціальних рівнянь Пуассона (у частинних похідних другого порядку) і Лапласа в систему MathCAD введені такі функції:

❖ ***multigrid (M, n)*** – повертає матрицю розв'язку рівняння Пуассона, у якого розв'язок дорівнює нулю на границях інтервалу, що розглядається;

❖ ***relax (M1, M2, M3, M4, M5, A, U, r)*** – повертає квадратну матрицю розв'язку рівняння Пуассона для спектрального радіуса *r*.

Функції для розв'язування крайових задач

Для розв'язування двоточкових крайових задач призначені такі функції:

❖ ***bvalfit (v1, v2, x1, x2, xi, D, load1, load2, score)*** – встановлює початкові умови для крайової задачі, заданої у векторах ***D***, ***v1***, і ***v2*** на інтервалі від *x1* до *x2*, де розв’язок відомий у деякій точці x_i, що лежить всередині інтервалу;

❖ ***sbval (y, x1, x2, D, load, score)*** – дає установку початкових умов для крайової задачі, визначеної в символьному векторі ***D***, вектор ***y*** задає початкові умови на інтервалі [*x1, x2*].

У цих функціях вектори ***v***, ***v1***, ***v2*** задають початкові умови, *x*, *x1*, *x2* – граничні точки інтервалу розв’язків, ***D***(*x, y*) – вектор-функція, що повертає *n-компонентний* вектор з першими похідними невідомих функцій, ***load*** (*x, v*), ***load1*** (*x1, v1*), ***load2*** (*x2, v2*) – вектори-функції, що повертають значення початкових умов у точках *x1* (*x2*), ***score*** (*xf, y*) – вектор-функція, що повертає *n-компонентний* вектор відповідності. Він указує, наскільки значення розв’язку, що починається з точок *x1* і *x2*, повинні відповідати *xf*. Наприклад, якщо маємо збіг розв’язків, то *score*: = *y*. Велике число прикладів розв’язування диференціальних рівнянь із застосуванням описаних вище функцій наведено в прикладах QuickSheets центра ресурсів системи MathCAD.

Функція odesolve

Розв’язування диференціальних рівнянь у MathCAD 8.0 здається трохи безсистемним і складним. Тому починаючи з версії MathCAD 2000 Professional, була введена нова функція для розв’язування диференціальних рівнянь. Це функція ***odesolve (x, b, step)*** – повертає розв’язок диференціальних рівнянь, описаних у блоці ***Given***, за даних початкових умов і кінці інтервалу інтегрування *b*. Якщо число кроків – *step* задане, то розв’язування виконується з фіксованим кроком, інакше – адаптивним методом. Хоча аналітичний вираз для цієї функції не виводиться, з нею можна виконувати математичні перетворення, наприклад диференціювати (рис. 4.5).

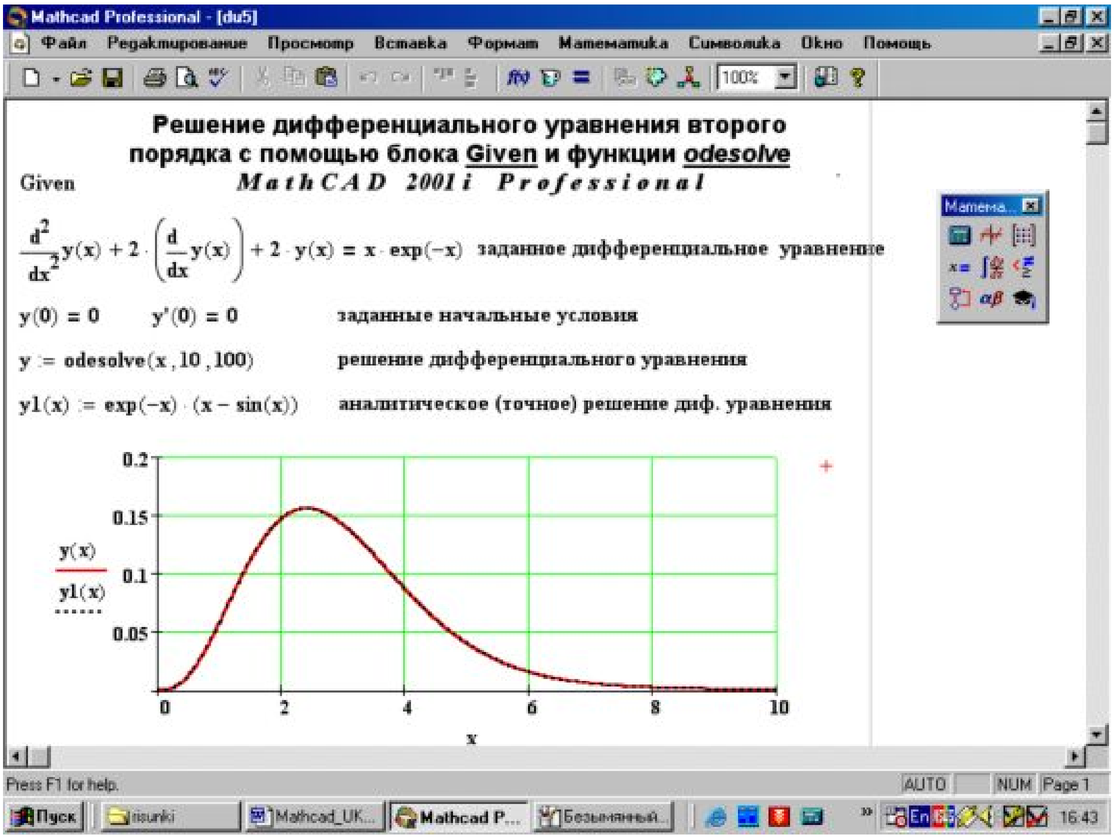


Рис. 4.3. Розв'язування задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами за допомогою функції *odesolve*

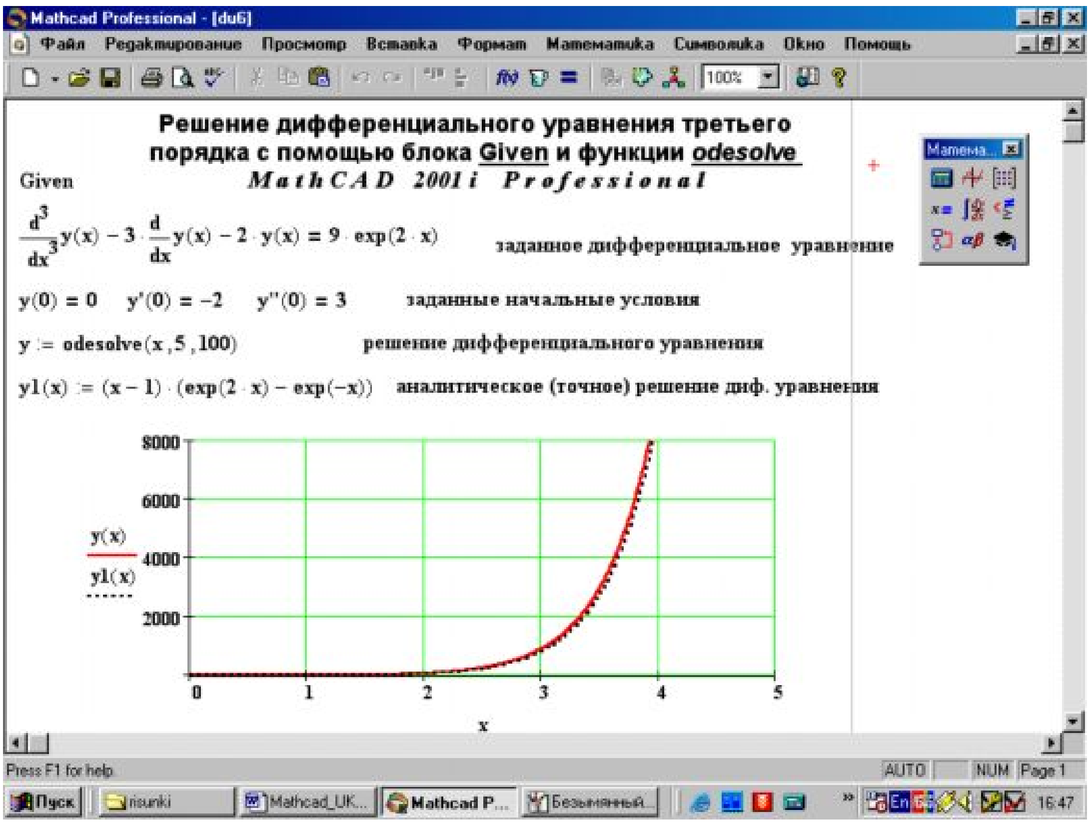


Рис. 4.4. Розв'язування задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами за допомогою функції *odesolve*

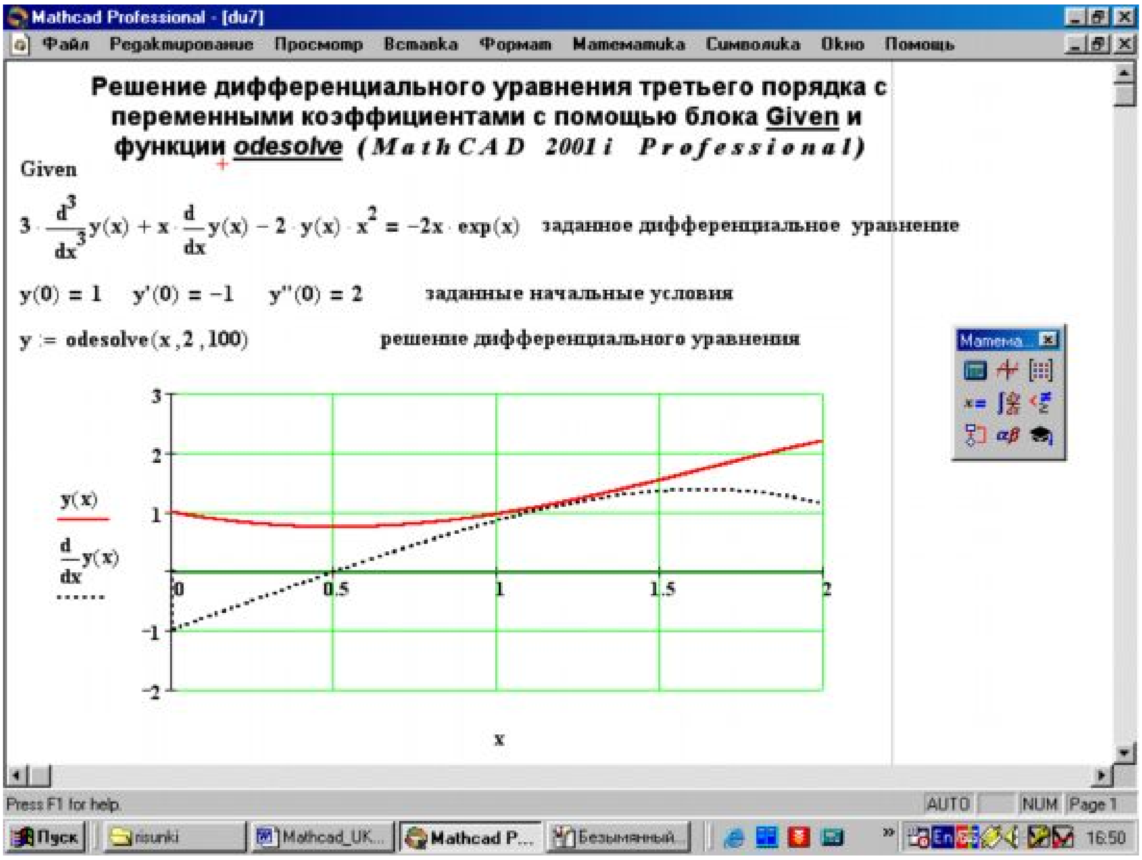


Рис. 4.5. Розв’язування задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами за допомогою функції *odesolve*

На рис. 4.3 – 4.5 наведені приклади застосування функції ***odesolve*** до розв’язування задачі Коші для різних типів диференціальних рівнянь. Як видно з цих ілюстрацій функція ***odesolve*** використовується в складі обчислювального блоку, що відкривається директивою ***Given***. У ньому перед функцією повинні бути задані саме рівняння і початкові умови. Із застосуванням функції ***odesolve*** розв’язування диференціальних рівнянь виглядає більш логічним і звичним – так само, як у блоках, призначених для розв’язування нелінійних алгебраїчних рівнянь.

4.2. Наближене чисельне розв'язування диференціальних рівнянь

Розв'язування диференціальних рівнянь модифікованим методом Ейлера

Найпростішим методом розв'язування диференціальних рівнянь виду $y' = f(x, y)$ є простий метод Ейлера. Він реалізується згідно з рекурентною формулою $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$, де h – крок розв'язування. Похибка цього методу значна (порядку h), тому він на практиці майже не застосовується.

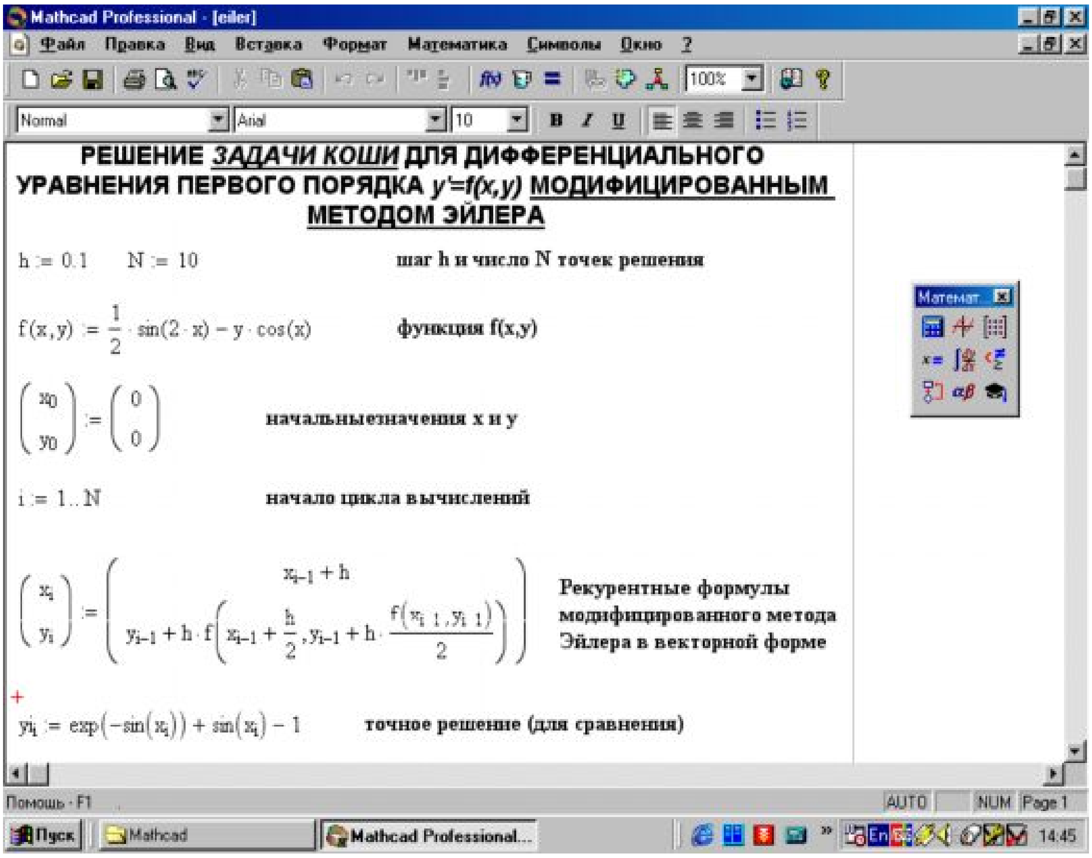
У документі на рис. 4.6,а показана реалізація так званого модифікованого методу Ейлера, похибка якого наближається до h^2 (тобто порядку 1%, якщо $h = 0.1$), що нерідко вже є прийнятним для наближеного розв'язку диференціальних рівнянь першого порядку.

Поліпшення точності обчислень з використанням цього методу фактично досягнуто за рахунок інтегрування методом трапецій замість методу прямокутників, характерного для реалізації простого методу Ейлера.

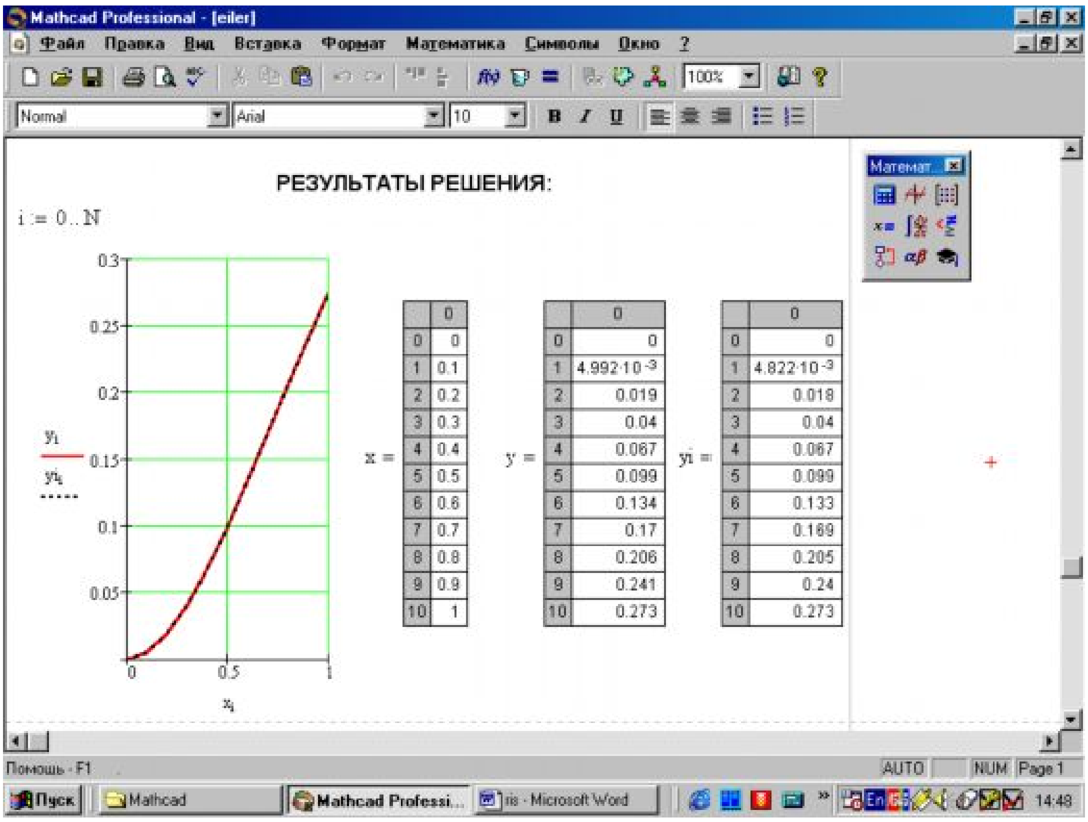
На рис. 4.6,б представлена друга частина документа, на якій зображені графіки точного розв'язку (пунктирна лінія) і наближеного чисельного розв'язку модифікованим методом Ейлера. Неважко помітити, що точки (через невисоку точність оцінки обчислень по графіках) дуже щільно укладаються на кривій точного розв'язку. Однак з таблиць векторів точного й наближеного розв'язків, також представлених на рис. 4.6,б, помітна розбіжність результатів в кінці інтервалу вже в третьому знаці після десяткової крапки.

Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку методом Рунге-Кутта

Тепер зупинимося на реалізації іншого добре відомого методу – методу Рунге-Кутта для розв'язування диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$. Нехай h – крок збільшення змінної x, i – індекс, що змінюється від 1 до N (N – число інтервалів розв'язку з кроком h). Метод Рунге-Кутта четвертого порядку дає похибку розв'язку порядку h^{-4}, що задовольняє найвищим вимогам щодо точності чисельних методів. Реалізація методу показана на рис. 4.7,а.

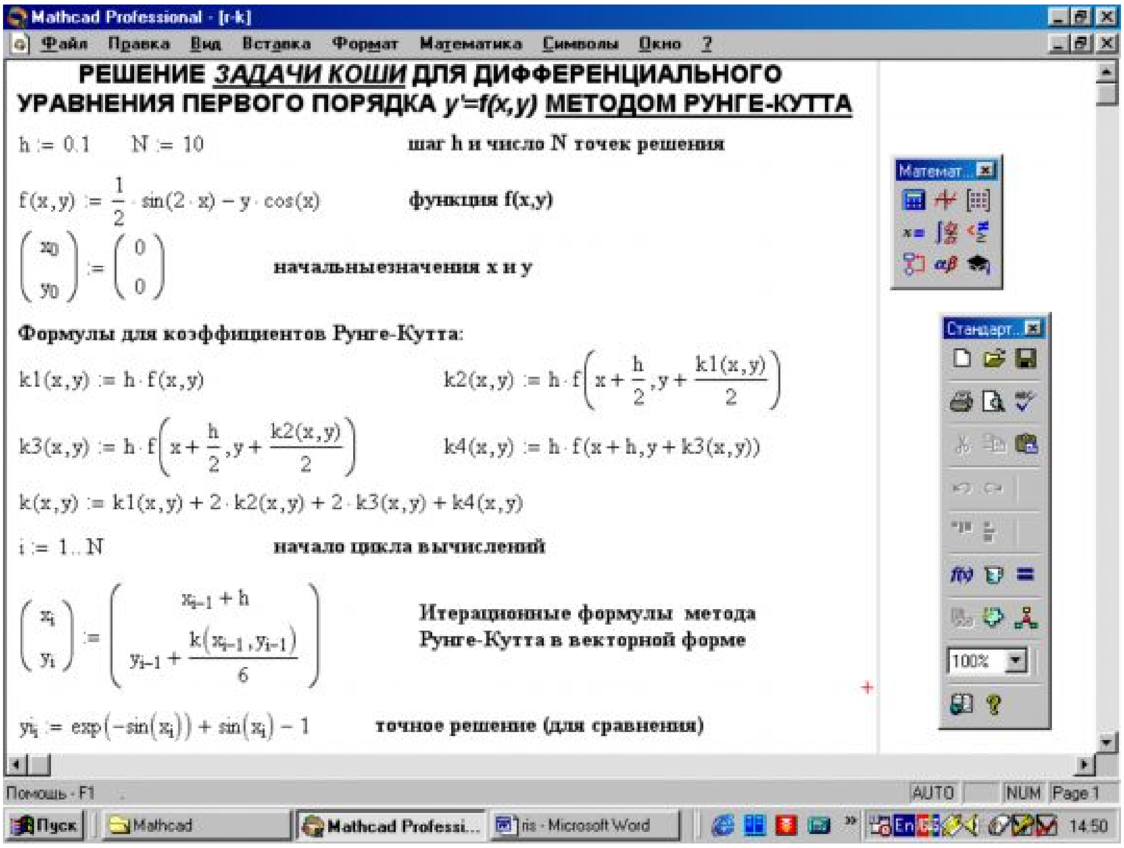


а

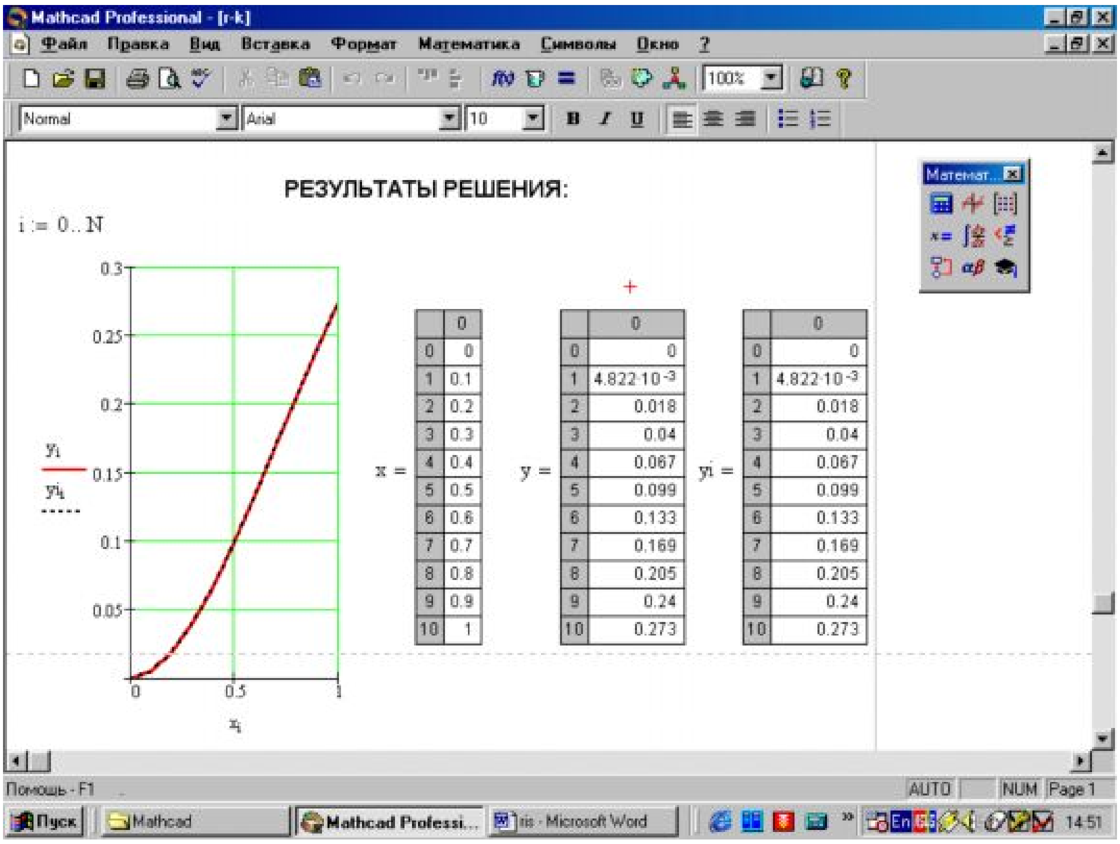


б

Рис. 4.6. Розв’язування диференціального рівняння модифікованим методом Ейлера: а – початок документа; б – кінець документа



а



б

Рис. 4.7. Розв’язування диференціального рівняння методом Рунге-Кутта: а – початок документа; б – кінець документа

Для розв'язування рівняння необхідно задати функцію $f(x, y)$, крок h зміни змінної x, число N точок розв'язку і початкові значення x і y. На рис. 4.7,а зазначений вектор початкових значень x і y, а також задана у векторній формі система рівнянь методу Рунге-Кутта. Обчислення коефіцієнтів формул Рунге-Кутта задано у вигляді функцій користувача. Друга частина документа (рис. 4.7,б) містить формулу точного розв'язку, графіки точного й наближеного розв'язків, а також вектори розв'язків. Неважко помітити, що в межах точності обчислень (три знаки після десяткової крапки) точний (аналітичний) і наближений розв'язки збігаються.

Розв'язування диференціальних рівнянь виду y'' = F(x, y, z) методом Рунге-Кутта

Диференціальні рівняння виду $y'' = F(x, y, z)$, де $z = y'$, називаються диференціальними рівняннями другого порядку. Це дуже важливий клас диференціальних рівнянь, що мають великі сфери застосування, наприклад, у механіці, гідромеханіці, теплофізиці і т. ін. Тому корисно ознайомитися з реалізацією алгоритмів їх розв'язування.

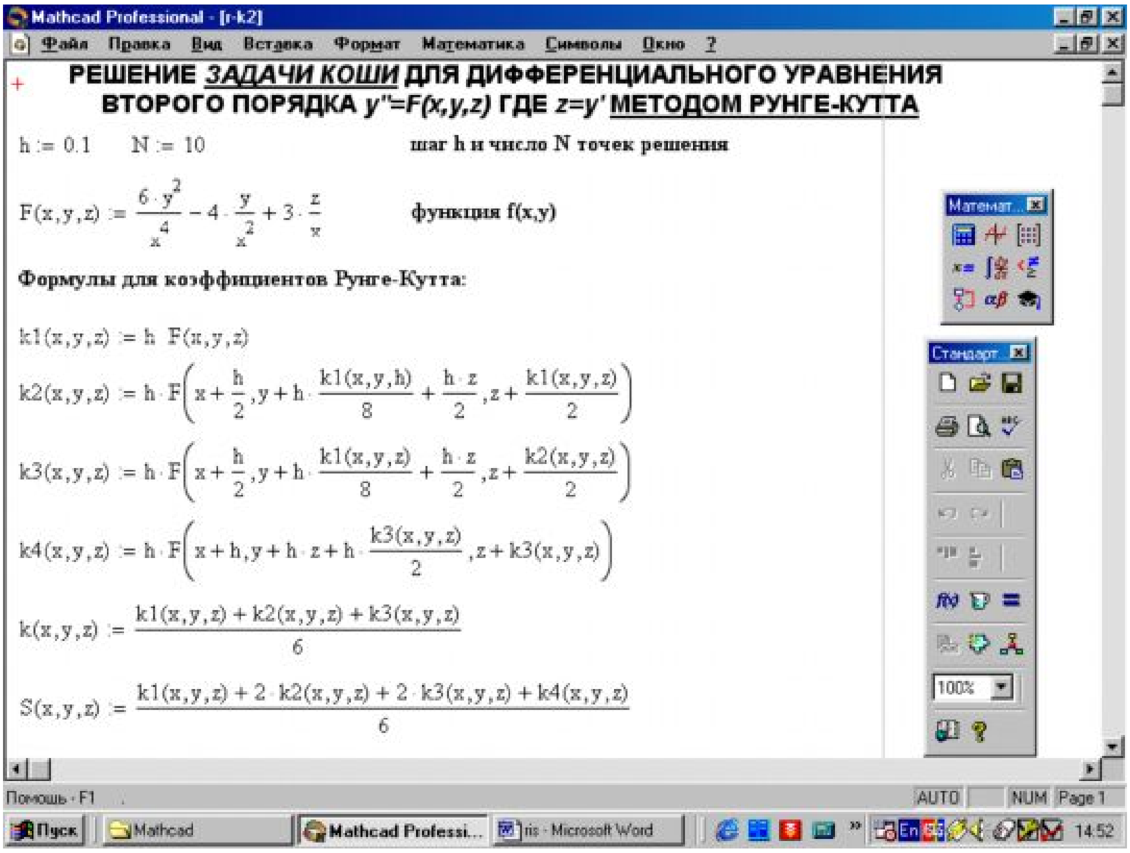
На рис. 4.8,а показаний початок документа з реалізацією методу Рунге-Кутта для розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння виду $y'' = F(x, y, z)$. Від реалізації даного методу для диференціальних рівнянь першого порядку документ відрізняється тільки конкретним видом формул для коефіцієнтів k_i і введенням, крім функції $k(x, y, z)$, ще однієї функції $S(x, y, z)$, необхідної для створення сітки значень $z = y'$.

Кінець цього документа зображено на рис. 4.8,б. Як бачимо, до складу системи рекурентних рівнянь у векторній формі додано одне рівняння, що задає сітку значень z. На графіку порівнюється одержаний наближений розв'язок $y(x)$ з точним розв'язком $y1(x)$, а також наведений графік похідної $z(x)$.

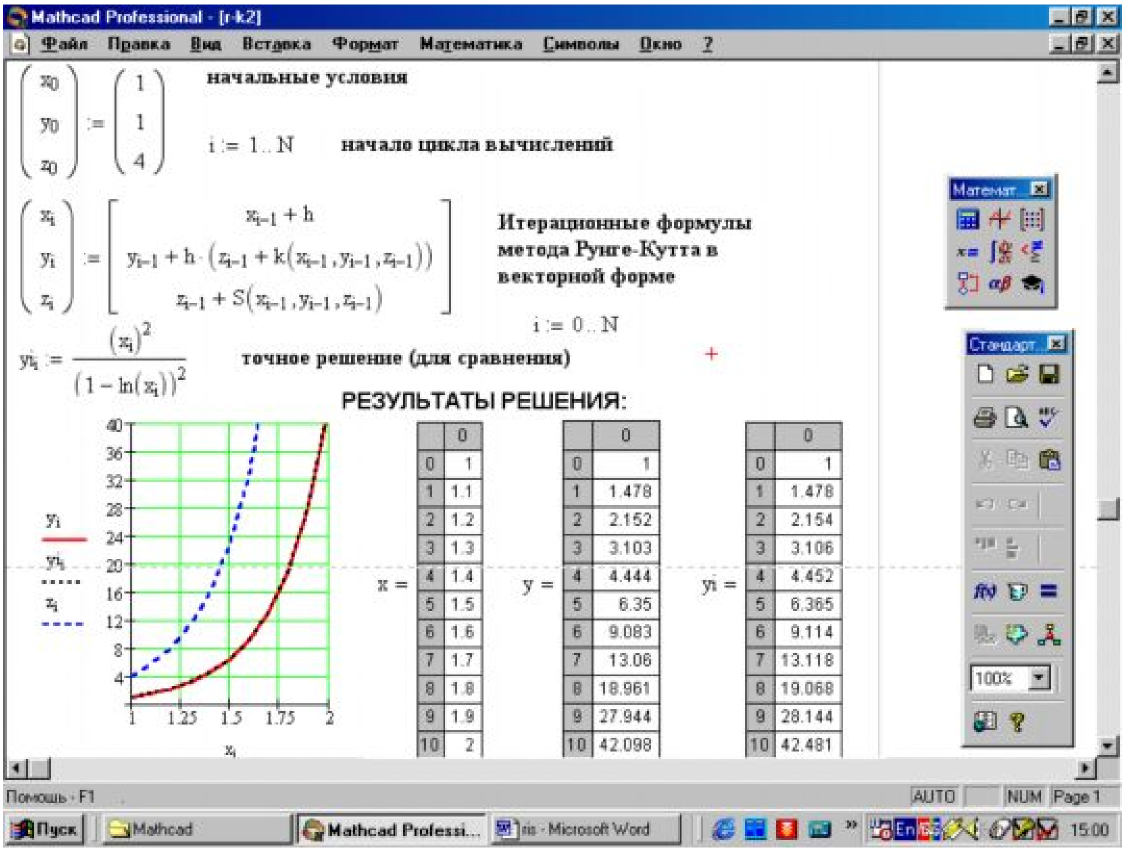
Для одержання розв'язку для нової функції $F(x, y, z)$ досить на початку документа задати функцію, крок інтегрування h і число N точок розв'язку.

Розв'язування системи з двох диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта

При переході від розв'язування одного диференціального рівняння до розв'язування систем диференціальних рівнянь складність алгоритму швидко наростає. У цьому неважко переконатися вже з розв'язування системи двох диференціальних рівнянь, представленого на рис. 4.9,а. Власне самої реалізації методу Рунге-Кутта на рис. 4.9,а не видно, оскільки вона прихована в невидимій правій частині документа. її відображено на рис. 4.9,б. Ускладнення алгоритму розв'язування полягає в ускладненні функцій користувача, що визначають коефіцієнти $k2 - k4$, використовувані у формулах Рунге-Кутта ($k1$ окремо не обчислюється, його значення підставлене у формулу для k у відкритому вигляді).



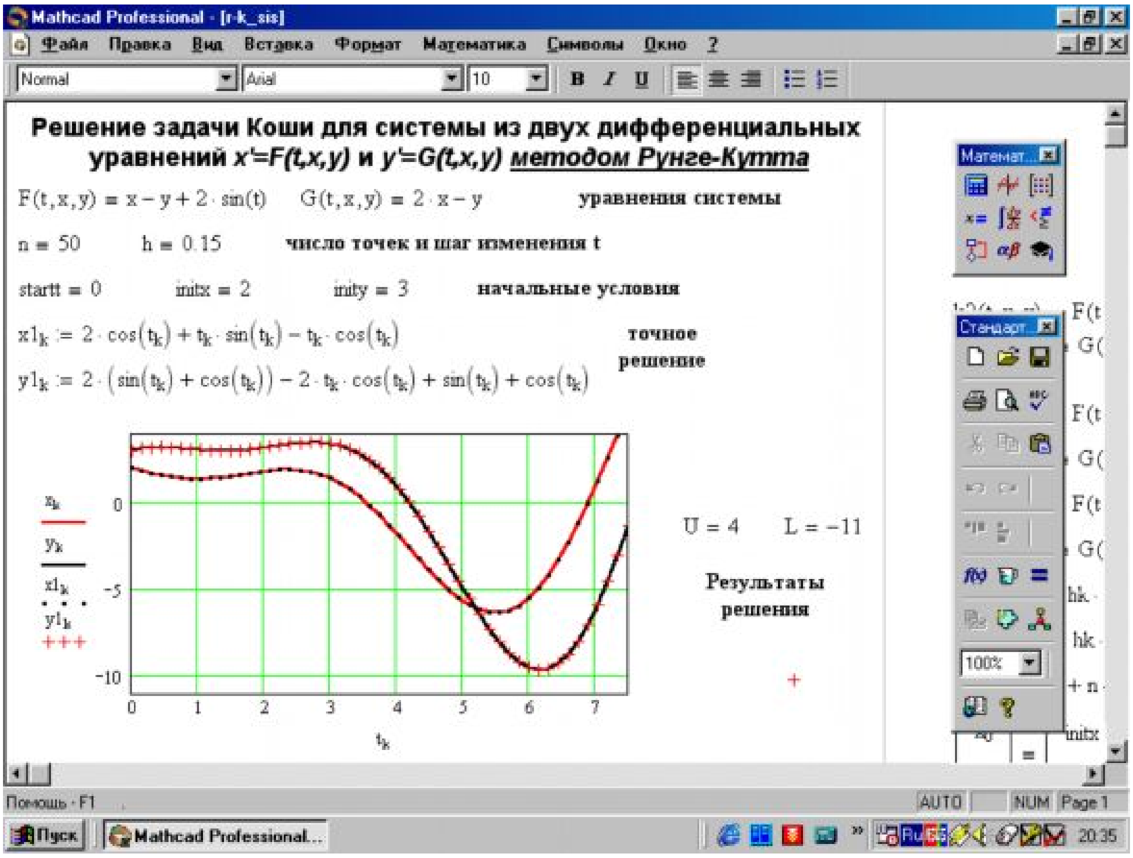
а



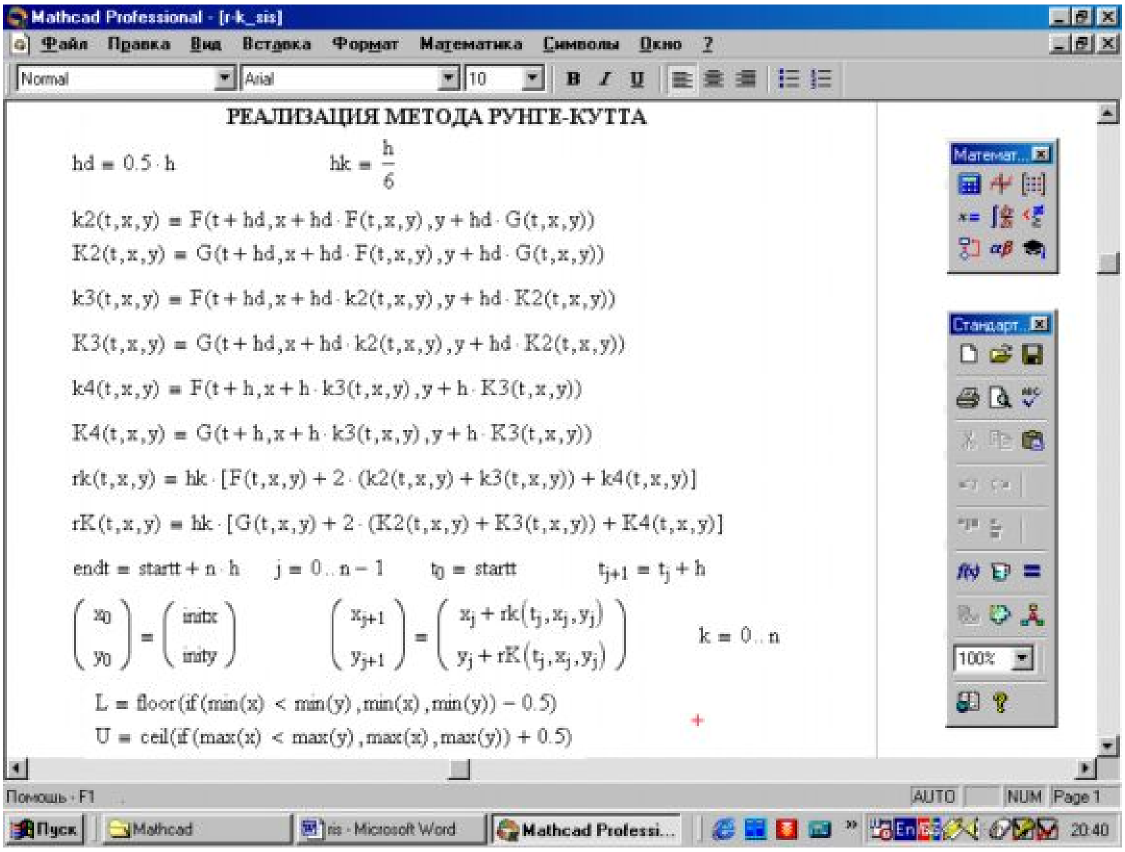
б

Рис. 4.8. Алгоритм розв'язування диференціального рівняння виду $y'' = F(x, y, z)$:

а – початок документа, б – кінець документа



а



б

Рис. 4.9. Розв'язування системи двох диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта: а – ліва частина документа, б – права частина документа

Векторна форма системи диференціальних рівнянь

Вбудовані в останні версії математичних систем MathCAD функції для розв'язування систем диференціальних рівнянь розв'язують, головним чином, систему із звичайних диференціальних рівнянь, подану у формі Коші:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{0,1}, \\ y_2(x_0) = y_{0,2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n(x_0) = y_{0,n}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Цю систему можна записати і у векторній формі: $\boldsymbol{Y}(x_0) = \boldsymbol{Y}_0$, $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{Y})$. Звідси випливає важливий висновок – розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші здійснюється аналогічно розв'язуванню одного диференціального рівняння, однак воно повинно бути записано у векторній формі. При цьому додавання кожного чергового рівняння збільшує число рівнянь у їх векторному записі. Природно, це збільшує складність розв'язування і веде до збільшення числа змінних у функціях, що задають коефіцієнти k_i, але принципово не змінює реалізації алгоритму обчислень. У цьому ми переконалися на тільки що розглянутому прикладі розв'язування задачі Коші для системи двох диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта (рис. 4.9). Вбудовані в MathCAD функції для розв'язування систем диференціальних рівнянь не мають цих труднощів, оскільки не вимагають складання формул для розв'язку систем і задають його в загальному вигляді. Слід, однак, зазначити, що реальні алгоритми розв'язування диференціальних рівнянь виявляються більш складнішими від розглянутих. Так, поширення набули адаптивні алгоритми, у яких на кожному кроці виконується контроль похибки розв'язку (функція ***Rkadapt***). Якщо похибка стає нижче заданої, крок h зменшується. І так доти, поки похибка не стане меншою від заданої. Це помітно знижує нестійкість розв'язку, але водночас збільшує час обчислень як на кожному кроці, так і в області можливої нестійкості розв'язку. Цілком зрозуміло, що метод Рунге-Кутта четвертого порядку є далеко не єдиним методом розв'язування задачі Коші для системи диференціальних рівнянь. Існує ціла група методів Рунге-Кутта різного порядку з різною похибкою обчислень, у тому числі методи Рунге-Кутта-Фельберга. Іноді застосовуються методи прогнозу й корекції, які дозволяють прогнозувати розв'язок на черговому кроці, а потім коригують його на цьому кроці.

4.3. Вправи для самостійної роботи

Вправа 1. Користаючись модифікованим методом Ейлера і методом Рунге-Кутта, розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь:

а) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0)=1$; б) $xy' = y - xe^{y/x},\ y(1)=2$; в) $y' = \dfrac{y}{3x-y^2},\ y(0)=-1$.

Одержані наближені чисельні розв'язки порівняти з точним розв'язком.

Вправа 2. За допомогою функцій ***rkfixed*** і ***Rkadapt*** розв'язати задачу Коші для систем диференціальних рівнянь, наведених у табл. 4.1. Побудувати графіки розв'язків, матрицю розв'язків, порівняти одержані результати.

Таблиця 4.1

Варіанти до вправи 2

№ з/п	Система диференціальних рівнянь	Початкові умови	Інтервал зміни змінної t
1	$\begin{cases}\dot{x} = y + 2e^t,\\ \dot{y} = x + t^2\end{cases}$	$x(0)=1,$ $y(0)=1$	[0; 1]
2	$\begin{cases}\dot{x} = y - 5\cos t,\\ \dot{y} = 2x + y\end{cases}$	$x(0)=0,$ $y(0)=1$	[0; 2]
3	$\begin{cases}\dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t},\\ \dot{y} = x + 2y\end{cases}$	$x(0)=2,$ $y(0)=1$	[0; 0.5]
4	$\begin{cases}\dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t},\\ \dot{y} = 2x - 2y\end{cases}$	$x(0)=2,$ $y(0)=1$	[0; 1]
5	$\begin{cases}\dot{x} = 4x + y - e^{2t},\\ \dot{y} = y - 2x\end{cases}$	$x(0)=1,$ $y(0)=1$	[0; 1]
6	$\begin{cases}\dot{x} = 2y - x + 1,\\ \dot{y} = 3y - 2x\end{cases}$	$x(0)=1,$ $y(0)=0$	[0; 2]

№ з/п	Система диференціальних рівнянь	Початкові умови	Інтервал зміни змінної t
7	$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$	$x(0) = 0,$ $y(0) = 0$	[0; 0.5]
8	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -2x + 2t \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 0$	[0; 1]
9	$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 2$	[0; 1]
10	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^{t} \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 1$	[0; 5]
11	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t \end{cases}$	$x(0) = 2,$ $y(0) = 3$	[0; 1]
12	$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^{t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 0$	[0; 2]
13	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 0$	[0; 1]
14	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$	$x(0) = 0,$ $y(0) = 0$	[0; 1]
15	$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 1$	[0; 1]

Вправа 3. За допомогою функції ***odesolve*** розв'язати задачу Коші для рівнянь наведених у табл. 4.2. Побудувати графіки функцій $y(x)$ і $y'(x)$.

Таблиця 4.2

Варіанти до вправи 3

№ з/п	Диференціальні рівняння	Початкові умови	Інтервал
1	$y'' - 2y' + 2y = e^{x} + x\cos x$	$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$	[0; 1]
	$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = -2xe^{x}$	$y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$	[0; 2]
	$y''' + y' = \sin x + x\cos x$	$y(1) = 1$, $y'(1) = -2$, $y''(1) = 0$	[1; 4]
2	$y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$	$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1$	[0; 3]
	$x^{2}(x+1)y'' - 2y = 2x + 1$	$y(1) = 2,\ \ y'(1) = 0$	[1; 5]
	$y''' - 4y'' + 3y' = x^{2} + xe^{2x}$	$y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$	[0; 1]
3	$y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$	$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$	[0; 1]
	$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 6x$	$y(1) = 3,\ \ y'(1) = 2$	[1; 2]
	$y''' - y'' - y' + y = 3e^{x} + 5x\sin x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$	$\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
4	$y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\cos 5x$	$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$	[0; 1]
	$xy'' + 2y' - xy = e^{-2x}\sin x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

№ з/п	Диференціальні рівняння	Початкові умови	Інтервал
	$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$	$\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
5	$y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x$	$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$	[0; 2]
	$y'' - 2\left(1 + \mathrm{tg}^2\, x\right)y = x^2$	$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$	[0; 1]
	$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$	$y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$	[0; 10]
6	$y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x$	$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$	[0; 1]
	$x(x-1)y'' - xy' + y = xe^{-x}$	$y(2) = 0,\ \ y'(2) = 0$	[2; 5]
	$y''' + y' = \sin x + x\cos x$	$y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$	[1; 2]
7	$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$	$y(1) = 2,\ \ y'(1) = 0$	[1; 5]
	$\left(e^x + 1\right)y'' - 2y' - e^x y = -2x$	$y(0) = -1,\ \ y'(0) = 2$	[0; 1]
	$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$	$\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
8	$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$	$y(1) = 2,\ \ y'(1) = 1$	[1; 2]
	$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 6xe^{-2x}$	$y(1) = -1,\ \ y'(1) = 1$	[1; 3]
	$y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$	$y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$	[0; 1]

№ з/п	Диференціальні рівняння	Початкові умови	Інтервал
9	$y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\;\; y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$	$\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$
	$xy'' + 2y' - xy = \cos x$	$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0,\;\; y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$	$\left[\dfrac{\pi}{4}; 2\pi\right]$
	$y''' - y'' - y' + y = 3e^{x} + 5x\sin x$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\; y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1,$ $y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$	$\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$
10	$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$	$y(1) = 1,\;\; y'(1) = 2$	[1; 3]
	$y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2\, x)y = x + 1$	$y(0) = -2,\;\; y'(0) = 1$	[0; 1]
	$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$	$y(0) = 0,\; y'(0) = -3,$ $y''(0) = 3$	[0; 10]
11	$y'' + y = 4e^{x}$	$y(0) = 4,\;\; y'(0) = -3$	[0; 4]
	$x(x-1)y'' - xy' + y = \sin x + \cos 3x$	$y(2) = -1,\;\; y'(2) = 0$	[2; 5]
	$y''' + y' = \sin x + x\cos x$	$y(1) = 1,\; y'(1) = -2,$ $y''(1) = 0$	[1; 4]
12	$y'' - 2y' = 2e^{x}$	$y(1) = -1,\;\; y'(1) = 0$	[1; 2]
	$(e^{x} + 1)y'' - 2y' - e^{x}y = x^3 + x\sin x$	$y(1) =,\;\; y'(1) = 0$	[1; 2]
	$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\; y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1,$ $y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$	$\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$
13	$x^3(y'' - y) = x^2 - 2$	$y(2) = 0,\;\; y'(2) = 0$	[2; 4]
	$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 2x^2$	$y(0) = 0,\;\; y'(0) = -2$	[0; 10]

№ з/п	Диференціальні рівняння	Початкові умови	Інтервал
	$y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$	$y(0) = -1,\ y'(0) = 0,$ $y''(0) = 1$	[0; 1]
14	$y'' + y = 2\sec^3 x$	$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ \ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$	$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right]$
	$x^2(x+1)y'' - 2y = x^2 e^{x^2}$	$y(0) = 0,\ \ y'(0) = -5$	[0; 3]
	$y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x\sin x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$ $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$	$\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
15	$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\cos^2(x)$	$y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1$	[0; 5]
	$x^2 y'' \ln x - xy' + y = x$	$y(2) = 0,\ \ y'(2) = 0$	[2; 3]
	$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$	$y(0) = 0,\ y'(0) = -3,$ $y''(0) = 3$	[0; 10]

Вправа 4. Методом Рунге-Кутта розв'язати задачу Коші для систем рівнянь, вміщених у табл. 4.3. Побудувати графіки їх розв'язків.

Таблиця 4.3

Варіанти до вправи 4

№ з/п	Система диференціальних рівнянь	Початкові умови
1	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 1$
2	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$	$x(0) = 2,$ $y(0) = 1$

№ з/п	Система диференціальних рівнянь	Початкові умови
3	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t \end{cases}$	$x(0) = 2,$ $y(0) = 3$
4	$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$	$x(0) = 0,$ $y(0) = 1$
5	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -2x + 2t \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 0$
6	$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 0$
7	$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$	$x(0) = 0,$ $y(0) = 0$
8	$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 1$
9	$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 2$
10	$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + t^{2} \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 1$
11	$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$	$x(0) = 2,$ $y(0) = 1$
12	$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 1$
13	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$	$x(0) = 0,$ $y(0) = 0$

№ з/п	Система диференціальних рівнянь	Початкові умови
14	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 0$
15	$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$	$x(0) = 1,$ $y(0) = 0$

Вправа 5. Користуючись методом Рунге-Кутта, розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь:

1) $x^2 y'' = y'^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1;$

2) $yy'' + y = y'^2, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1;$

3) $xy'' = y' + x\left(y'^2 + x^2\right), \quad y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2.$

4.4. Контрольні запитання

1. Які вбудовані функції передбачені в системі MathCAD для розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь?
2. Для чого призначена функція ***rkfixed*** ?
3. Які з вбудованих функції системи MathCAD призначені для розв'язування жорстких систем диференціальних рівнянь?
4. Чим відрізняється робота функцій ***stiffr*** і ***Stiffr*** ?
5. Який вигляд мають функції для розв'язування диференціальних рівнянь Пуассона і Лапласа?
6. Які Ви знаєте вбудовані функції системи MathCAD, що призначені для розв'язування крайових задач?
7. Як розв'язуються диференціальні рівняння за допомогою функції ***odesolve***?
8. Для чого призначені (дайте характеристику й опис аргументів), наведені нижче функцій?
   - ***rkadapt (y, x1, x2, acc, F, k, s)***;
   - ***Rkadapt (y, x1, x2, n, F)***;
   - ***rkfixed (y, x1, x2, n, F)***;

- ***Bulstoer (y, x1, x2, n, F)***;
- ***bulstoer (y, x1, x2, ac, F, k, s)***;
- ***Stiffb (y, x1, x2, n, F, J)***;
- ***stiffb (y, x1, x2, ac, F, J, k, s)***;
- ***Stiffr (y, x1, x2, n, F, J)***;
- ***stiffr (y, x1, x2, ac, F, J, k, s)***;
- ***multigrid (M, n)***;
- ***relax (M1, M2, M3, M4, M5, A, U, r)***;
- ***bvalfit (v1, v2, x1, x2, xi, D, load1, load2, score)***;
- ***sbval (y, x1, x2, D, load, score)***;
- ***odesolve (x, b, step)***.

5. ФОРМАТУВАННЯ ГРАФІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

5.1. Форматування двовимірних графіків

Вікно форматування двовимірних графіків

Підменю **График (Graph)** меню **Формат (Format)** задає формат графіків. Почнемо з команди **Вычерчивание X–Y... (X-Y Plot)** – декартовий графік. Ця команда виводить у вікні документа як поточне діалогове вікно з параметрами форматування двовимірних графіків (рис. 5.1). Слід пам'ятати, що для зміни формату вже побудованого графіка необхідно його виділити (виділений графік обводиться суцільною лінією з маркерами зміни розміру) і клацнути на ньому правою кнопкою «миші», а далі у контекстному меню, що з'явилося, вибрати команду **Формат (Format).**

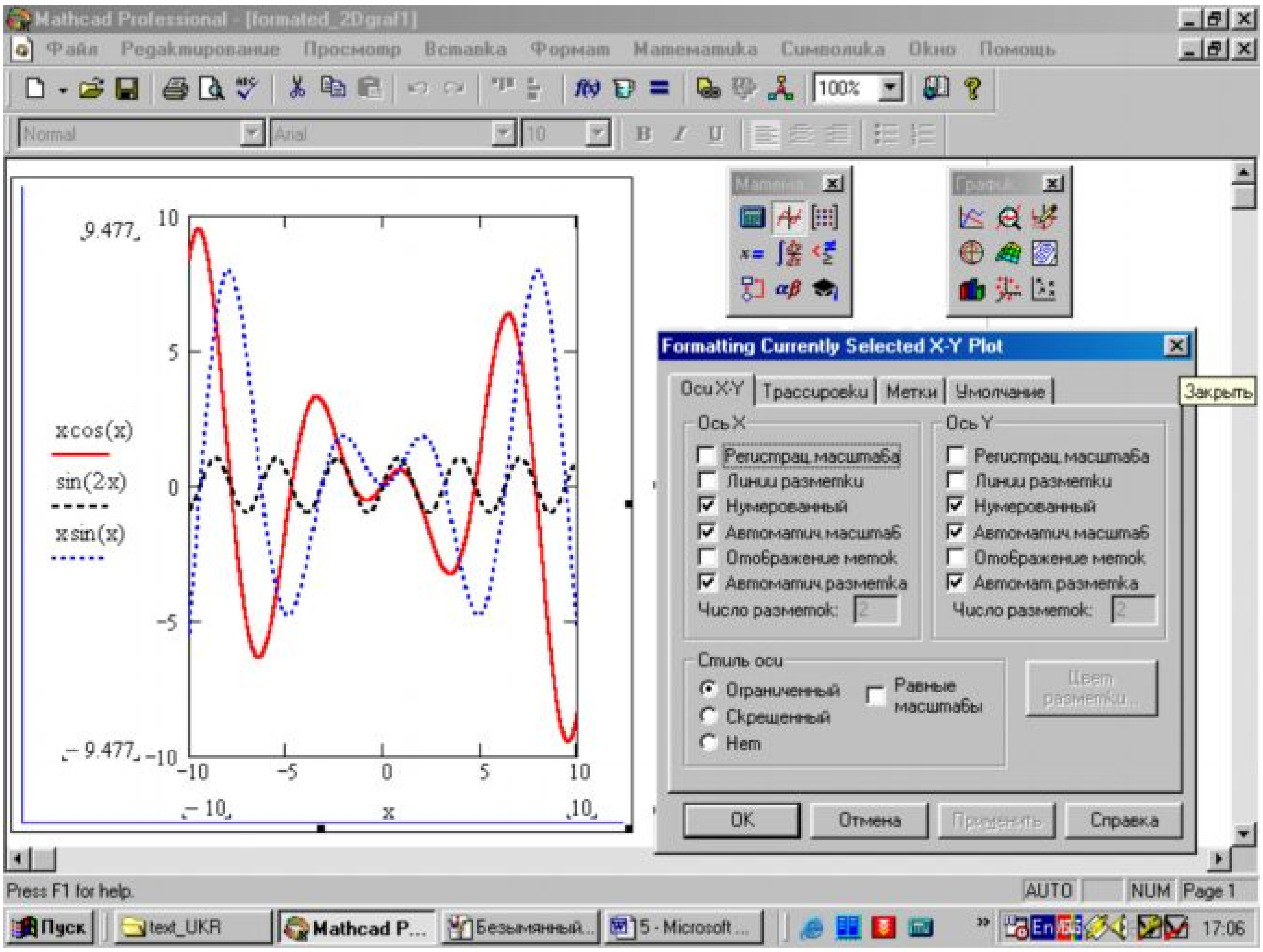


Рис. 5.1. Вікно форматування двовимірних графіків (MathCAD 2001i Professional)

Як видно з рис. 5.1, діалогове вікно форматування має чотири вкладки:

- **Оси X-Y (X-Y Axes)** – задання параметрів форматування осей;
- **Трассировки (Traces)** – задання параметрів форматування ліній графіка;
- **Метки (Labels)** – задання параметрів форматування написів осей;
- **Умолчание (Defaults)** – призначення встановлених параметрів форматування параметрами за замовчуванням.

Зауваження. Усі параметри графіка у вікні форматування стосуються тільки виділеного графіка.

Форматування осей графіка

На вкладці **Оси X-Y (X-Y Axes)** наведені основні параметри, що стосуються осей X і Y (рис. 5.2):

- **Логарифм. шкала (Log Scale**) – встановлення логарифмічного масштабу;
- **Вспом. линии (Grid Lines)** – встановлення ліній масштабної сітки;
- **Нумерация (Numbered)** – встановлення цифрових даних на осях;
- **Автомасштаб (Autoscale)** – автоматичне масштабування графіка;
- **Показать Метки (Show Markers)** – встановлення поділок на осях;
- **Авто сетка (Auto Grid) –** автоматичне встановлення масштабних ліній;
- **Размер сетки (Number of Grids)** – встановлення заданого числа масштабних ліній.

Призначення всіх цих параметрів цілком очевидне. Відзначимо лише таке: якщо прапорець **Вспом. линии (Grid Lines)** знятий, масштабна сітка графіка не будується (рис. 5.1), хоча на осях розміщуються короткі поділки. Прапорець **Нумерация (Numbered)** забезпечує можливість редагування цифрових даних, наприклад округлення нижньої і верхньої границь змін значень абсцис і ординат, що у разі автоматичного вибору масштабу можуть виявитися десятковими числами з дробовою частиною.

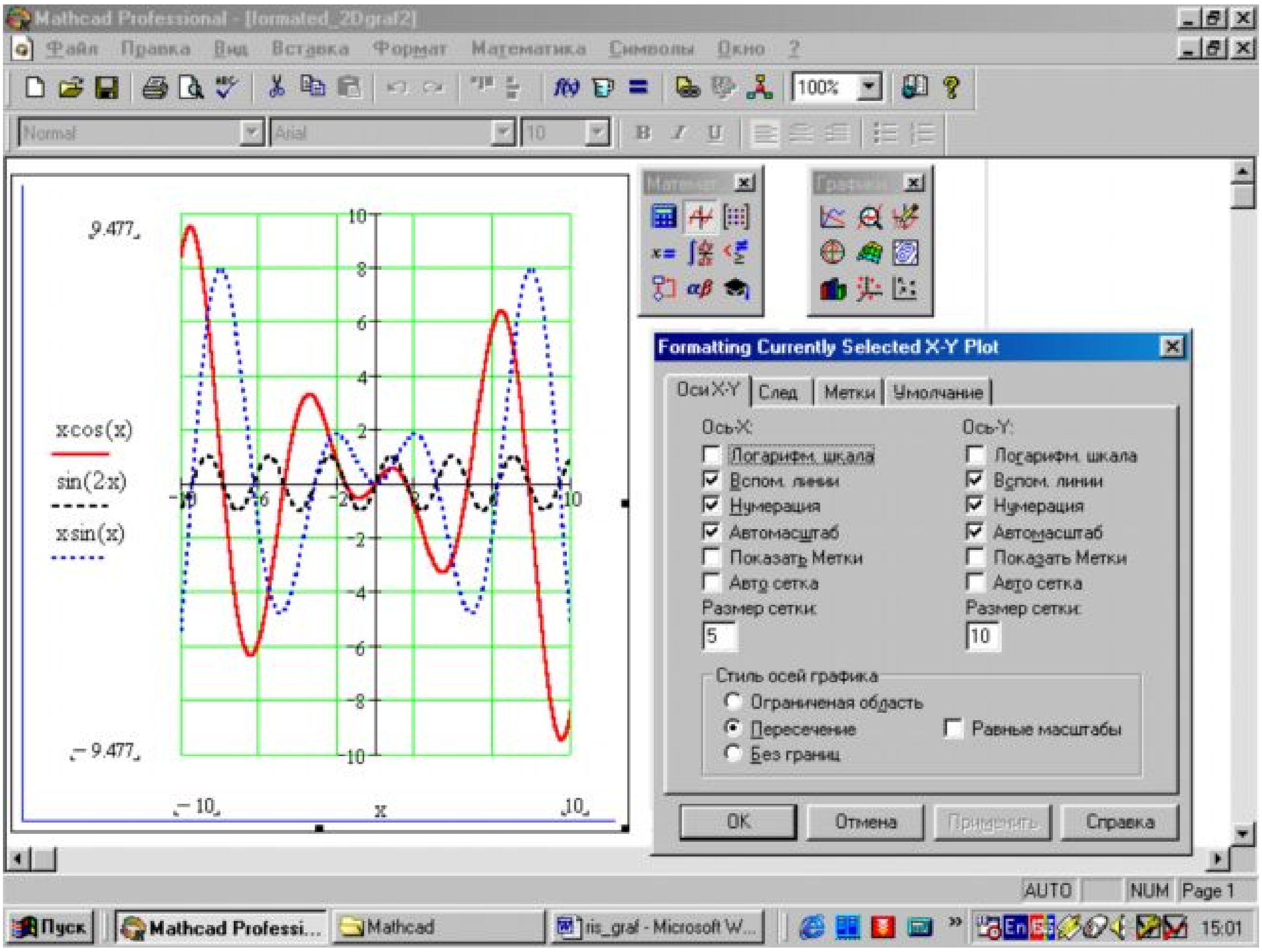


Рис. 5.2. Приклад форматування осей двовимірного графіка (MathCAD 2000)

Група **Стиль осей графика (Axes Style)** дозволяє створити стиль відображення координатних осей:

- ➢ **Ограниченная область (Boxed)** – осі у вигляді прямокутника (рамка);
- ➢ **Пересечение (Crossed)** – осі, що перетинаються;
- ➢ **Без границ (None)** – відсутність осей;
- ➢ **Равные масштаби (Equal Scales)** – встановлення однакового масштабу на осях графіка.

У нижній частині вкладки (рис. 5.2) є такі кнопки:

- ➢ **OK** – закрити вікно;
- ➢ **Отмена** – закрити вікно без збереження встановлених параметрів;
- ➢ **Применить** – застосувати встановлені параметри до виділеного графіка;
- ➢ **Справка** – вивід довідки.

На рис. 5.2 показано, як впливають деякі параметри форматування осей на вигляд вихідного графіка (рис. 5.1). У даному випадку додані лінії сітки, змінено число поділок на осях, а також вигляд осей.

Форматування ліній графіків

Вкладка **Трассировки (Traces)**, що зображена на рис. 5.3, призначена для керування відображенням ліній, з яких будується графік.

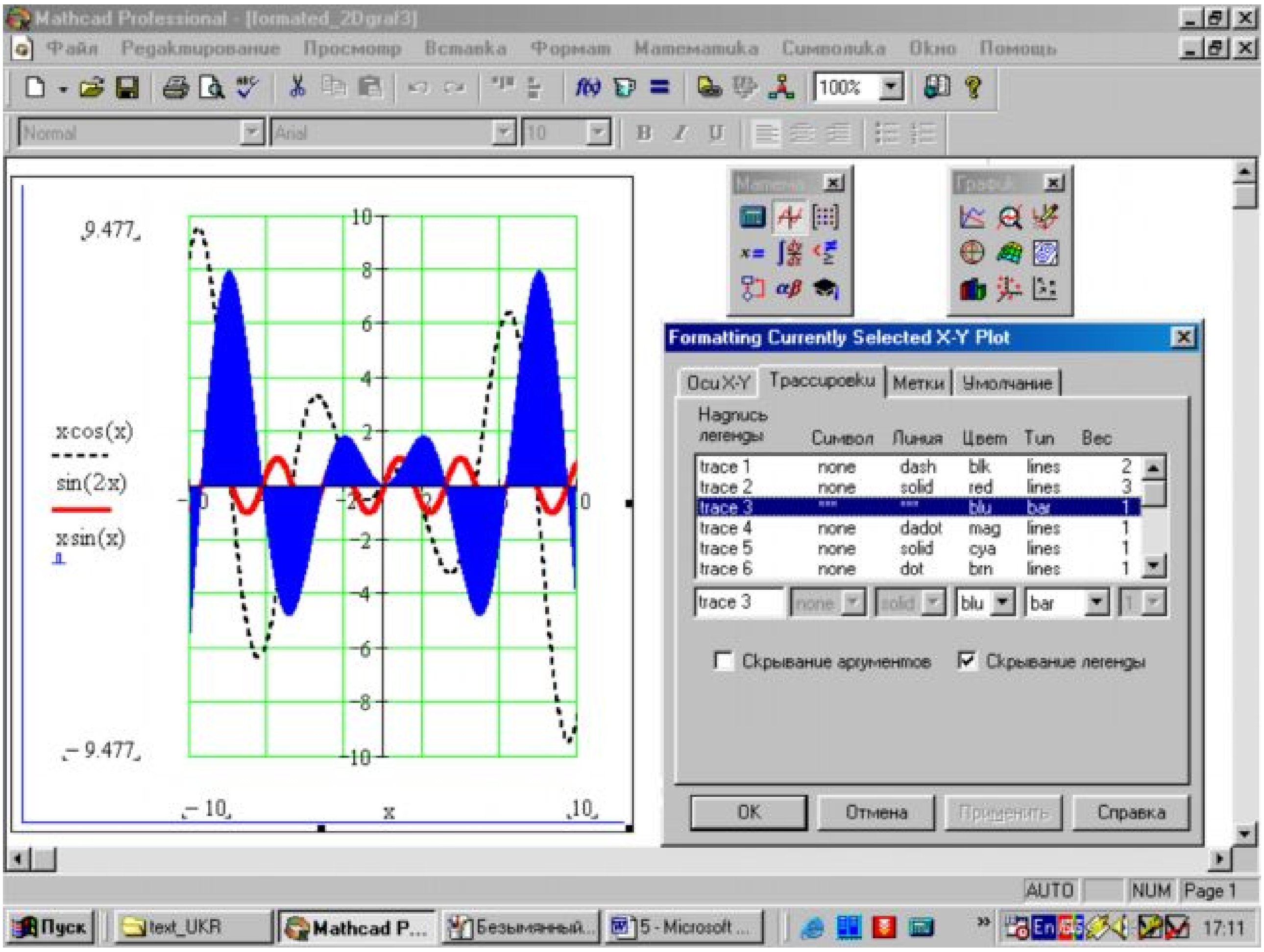


Рис. 5.3. Вкладка Трассировки (Traces) (MathCAD 2001i Professional)

На цій вкладці наведені такі параметри:

- **Надпись легенды (Legend Label)** – вибір імені лінії графіка в легенді;
- **Символ (Symbol)** – вибір символу, що міститься на лінії, для оцінки вузлових точок відповідного графіка;
- **Линия (Line)** – встановлення типу ліній графіка (суцільна, пунктир то що);
- **Цвет (Color)** – встановлення кольору ліній і вузлових точок графіка;
- **Тип (Type)** – встановлення типу графіка;
- **Вес (Weight)** – встановлення товщини ліній графіка.

Вузлові точки графіків (точки, для яких обчислюються координати) часто треба виділити будь-якою фігуркою – кружечком, хрестиком, прямокутником і т.

д. Список стовпця **Символ (Symbol)**, що розкривається в нижній частині, дозволяє вибрати такі позначки для вузлових точок графіка кожної з функцій:

- **none** – без позначки;
- **x's** – нахилений хрестик;
- **+'x** – прямий хрестик;
- **box** – квадрат;
- **dmnd** – ромб;
- **o's** – коло.

Графіки окремих функцій можна також виділяти, використовуючи для їх побудови лінії різного типу. Список стовпця **Линия (Line**), що розкривається в нижній частині, дозволяє вибрати такі типи ліній:

- **none** – лінія не будується;
- **solid** – безперервна суцільна лінія;
- **dash** – пунктирна лінія;
- **dot** – штрихова лінія;
- **dadot** – штрихпунктирна лінія.

Інший розповсюджений спосіб виділення різних кривих на графіку полягає в зміні їх кольору. Список стовпця **Цвет (Color**), що розкривається в нижній частині, дозволяє вибрати такі основні кольори ліній і вузлових точок:

- **red** – червоний;
- **blu** – синій;
- **grn** – зелений;
- **mag** – бузковий;
- **cya** – голубий;
- **brn** – коричневий;
- **blk** – чорний;
- **wht** – білий.

Важливе значення має і тип графіка – стовпець **Тип (Type)**. Список, що розкривається в нижній частині цього стовпця, дає можливість вибрати такі типи ліній графіка (рис. 5.6):

- **line** – побудова лініями;
- **points** – побудова точками;
- **error** – побудова вертикальними рисками з оцінкою інтервалу похибок;

- **bar** – побудова у вигляді стовпців гістограми;
- **step** – побудова східчастою лінією;
- **draw** – побудова протягуванням від точки до точки;
- **stem** – побудова лініями, що паралельні осі OY.

Можливі конфлікти між позначкою символів і типом ліній автоматично усуваються. При цьому пріоритет віддається параметру **Тип (Type)**, а конфліктні типи ліній або точок позначаються трьома зірочками.

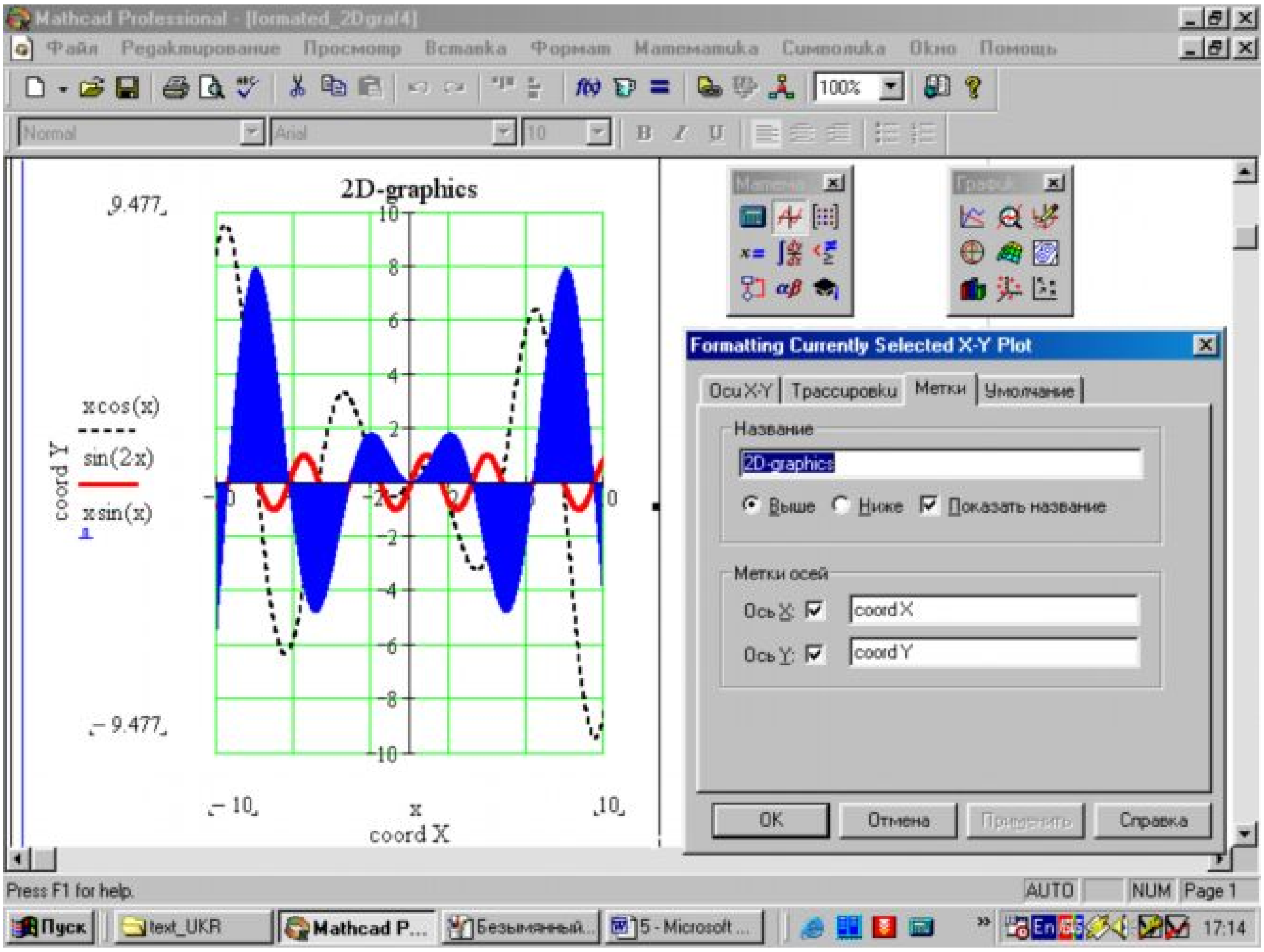


Рис. 5.4. Вкладка задання додаткових написів (MathCAD 2001i Professional)

Ще два параметри пов'язані з можливістю усувати з графіка допоміжні написи:

➢ **Скрывание аргументов (Hide Argument)** – встановлення цього прапорця дозволяє сховати позначення математичних виразів на осях графіка;

➢ **Скрывание легенды (Hide Legend)** – встановлення цього прапорця дозволяє сховати імена кривих графіка.

На рис. 5.3 наведені результати переформатування графіків, зображених на рис. 5.2.

Задання написів на графіках

Вкладка **Метки (Labels)** дозволяє вводити у графік додаткові написи (це ілюструє рис. 5.4).

Для задання написів служать поля вводу:

- **Название (Title)** – задання титульного напису до малюнка;
  - **Выше (Above)** – над графіком;
  - **Ниже (Below)** – під графіком;
  - **Показать название (Show title)** – включає або виключає відображення титульного напису;
- **Метки осей (Axis Labels)** – задання написів на осях:
  - **Ось X (X-Axis)** – задання напису на осі X;
  - **Ось Y (Y-Axis)** – задання напису на осі Y.

Параметри графіків за замовчуванням

Вкладка **Умолчание (Defaults)**, яку показано на рис.5.5, дає можливість призначити встановлені на інших вкладках параметри форматування параметрами за замовчуванням. Для цього служить прапорець встановлення **Использовать для Умолчания (Use for Defaults)**. Ці параметри будуть використані надалі у ході побудови графіків функцій однієї змінної.

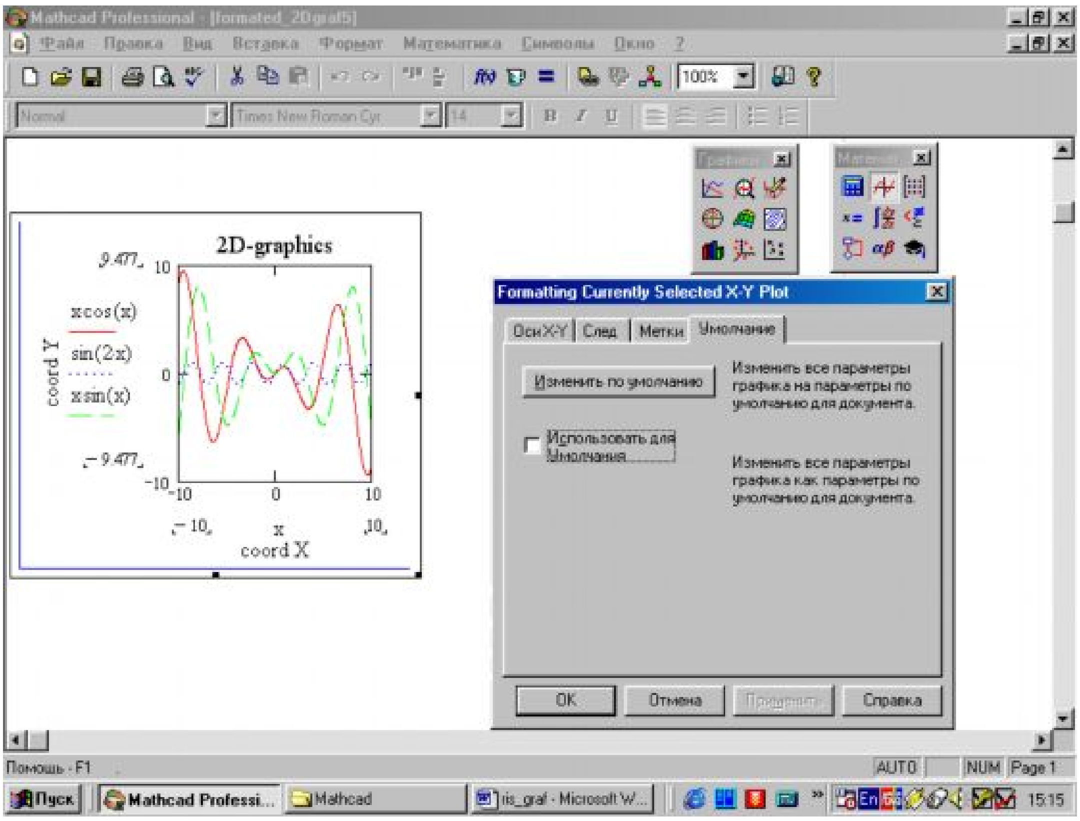


Рис. 5.5. Вкладка Умолчание (Defaults) (MathCAD 2000 Professional)

Щоб повернути всі стандартні параметри відображення графіків функцій однієї змінної (рис. 5.5), досить клацнути на кнопці **Изменить по умолчанию (Change to Defaults)**.

Приклади форматування двовимірних графіків

Вплив деяких параметрів показано на графіках, розташованих ліворуч від діалогового вікна встановлення цих параметрів. Для візуалізації обраних параметрів у разі відкритого вікна їх встановлення служить кнопка **Применить** кожного діалогового вікна. Натискаючи на цю кнопку, можна спостерігати за змінами ще до закриття вікна, що помітно полегшує експериментування з різними форматами графіків.

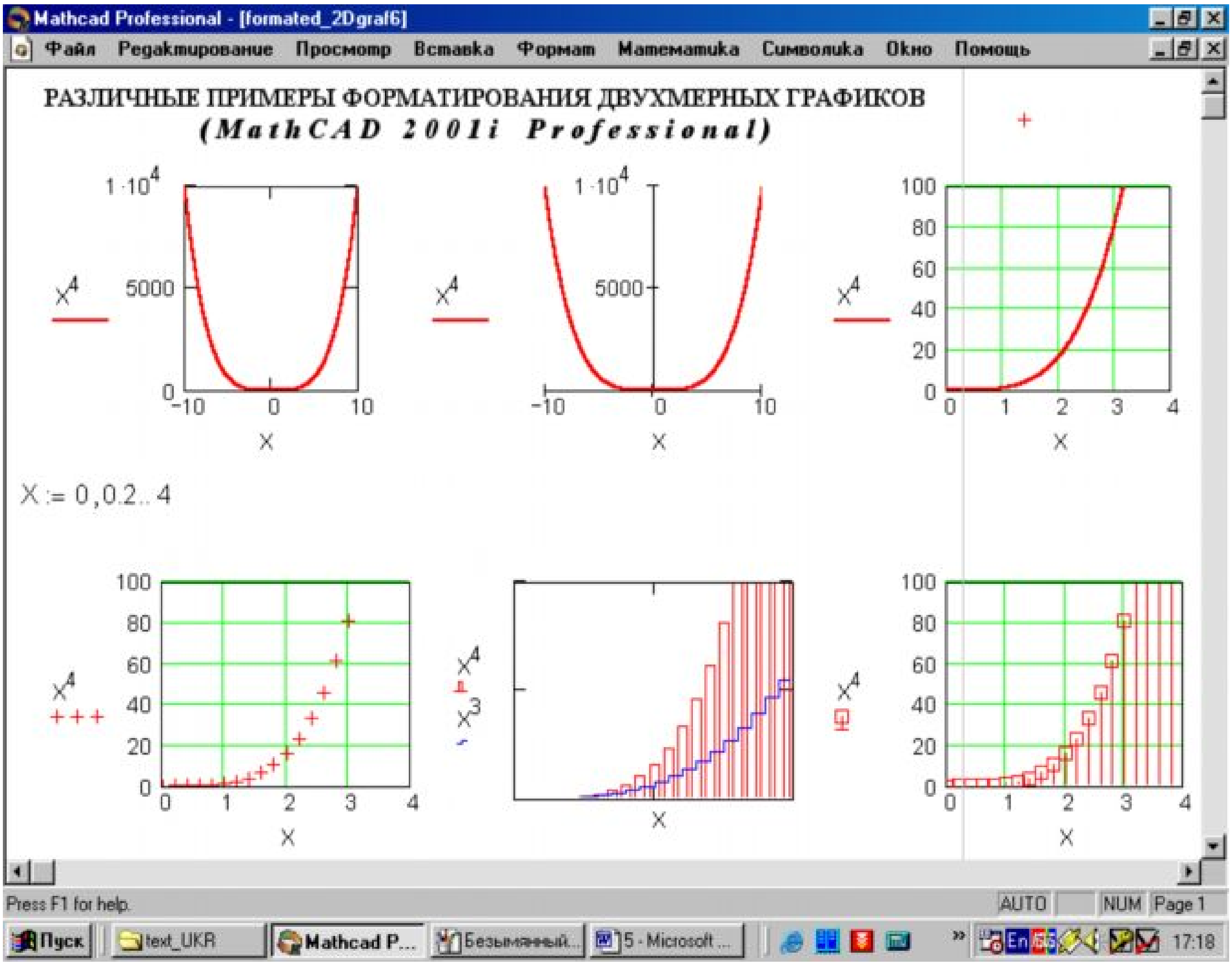


Рис. 5.6. Варіанти форматування графіка однієї і тієї ж функції

У цілому перелічені параметри надають можливість створювати графіки найрізноманітніших видів, що задовольняють будь-яким вимогам користувача (рис. 5.6).

Задання різних форматів ліній дозволяє впевнено розрізняти криві на графіку і співвідносити їх з тією або іншою функцією, а введення додаткових написів (титульної і на осях) – урізноманітнити графіки.

Трасування і масштабування

Ще однією можливістю в роботі з двовимірними графіками є застосування спеціального графічного курсору у вигляді двох пунктирних ліній (рис. 5.7), що перетинають усе вікно графіка. Вони з'являються після вибору команди **Трассировка (X-Y Trace)** у підменю **График (Graph)** меню **Формат (Format)** або команди **Трассировка** в контекстному меню після натискання правою кнопкою «миші» на графіку.

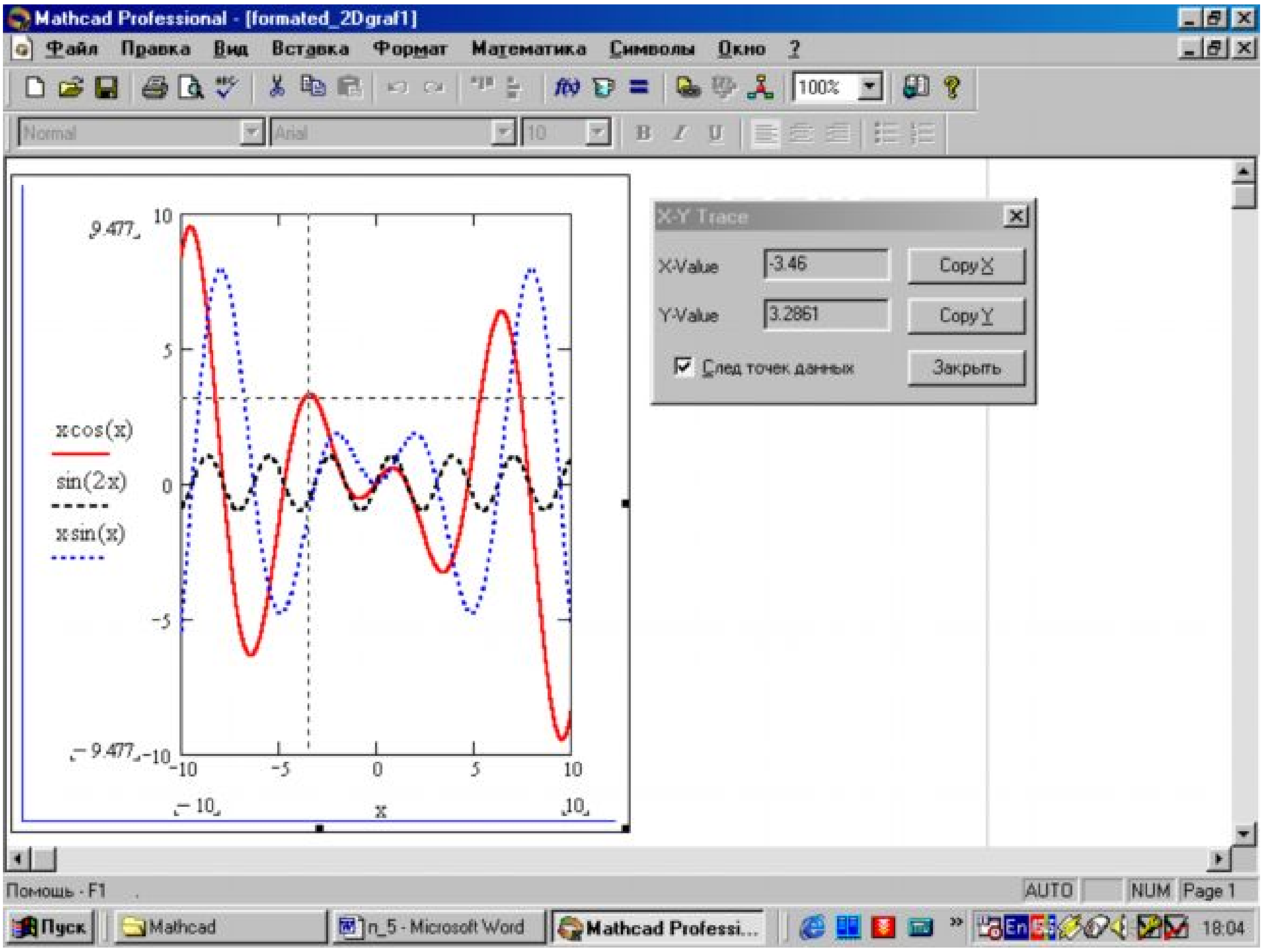


Рис. 5.7. Застосування команди Трассировка до двовимірного графіка

Якщо в діалоговому вікні трасування знято прапорець **След точек данных (Track Data Points)**, курсор вільно переміщується за графіком, при цьому його координати відображаються у вікні трасування. Помістивши курсор на точку графіка, яка нас цікавить, можна приблизно визначити її координати.

Однак уручну важко точно з'єднати положення курсору з обраною точкою графіка. Для цього передбачений режим спостереження за кривою графіка. Він реалізується встановленням прапорця **След точек данных (Track Data Points)**. При цьому переміщення курсору по кривій відбувається автоматично і його легко установити на будь-якій точці цієї кривої.

Ще один спосіб роботи з двовимірними графіками полягає в перегляді частин графіків з можливістю їхнього збільшення. Вона реалізується командою **Приближение (X-Y Zoom)** підменю **График** меню **Формат** (рис. 5.8, 5.9).

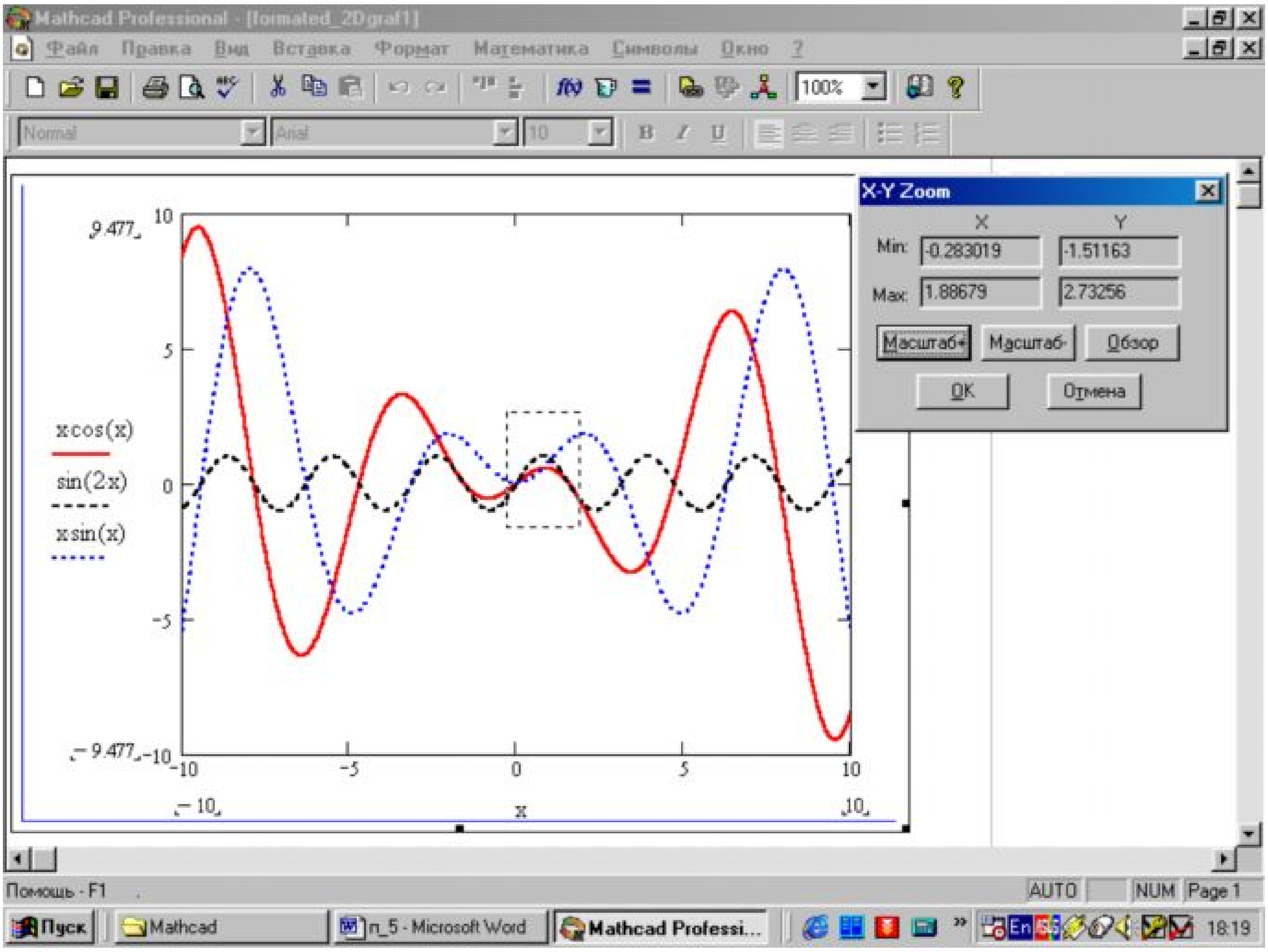


Рис. 5.8. Виділення частини графіка в декартовій системі координат

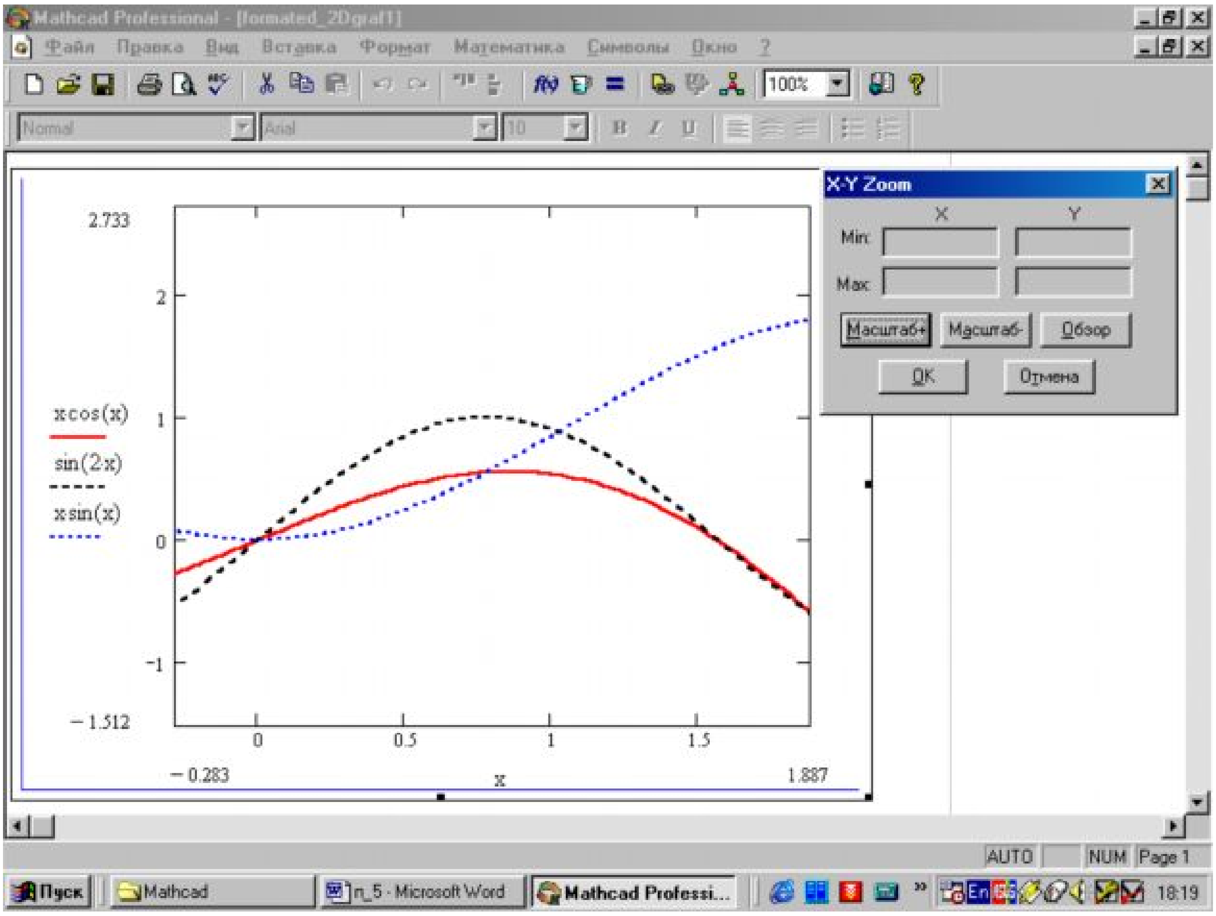


Рис. 5.9. Перегляд частини графіка в декартовій системі координат

У цілому ж слід зазначити, що форматування графіків у декартовій системі координат дозволяє одержати майже всі типи графіків, що використовуються в математичній та науково-технічній літературі.

5.2. Форматування графіків у полярній системі координат

Вікно форматування полярних графіків

Команда **Полярное Вычерчивание (Polar Plot)** підменю **График (Graph)** меню **Формат (Format)** забезпечує задання форматів графіків, що будуються в полярній системі координат. Під час її виконання відкривається діалогове вікно, зображене на рис. 5.10.

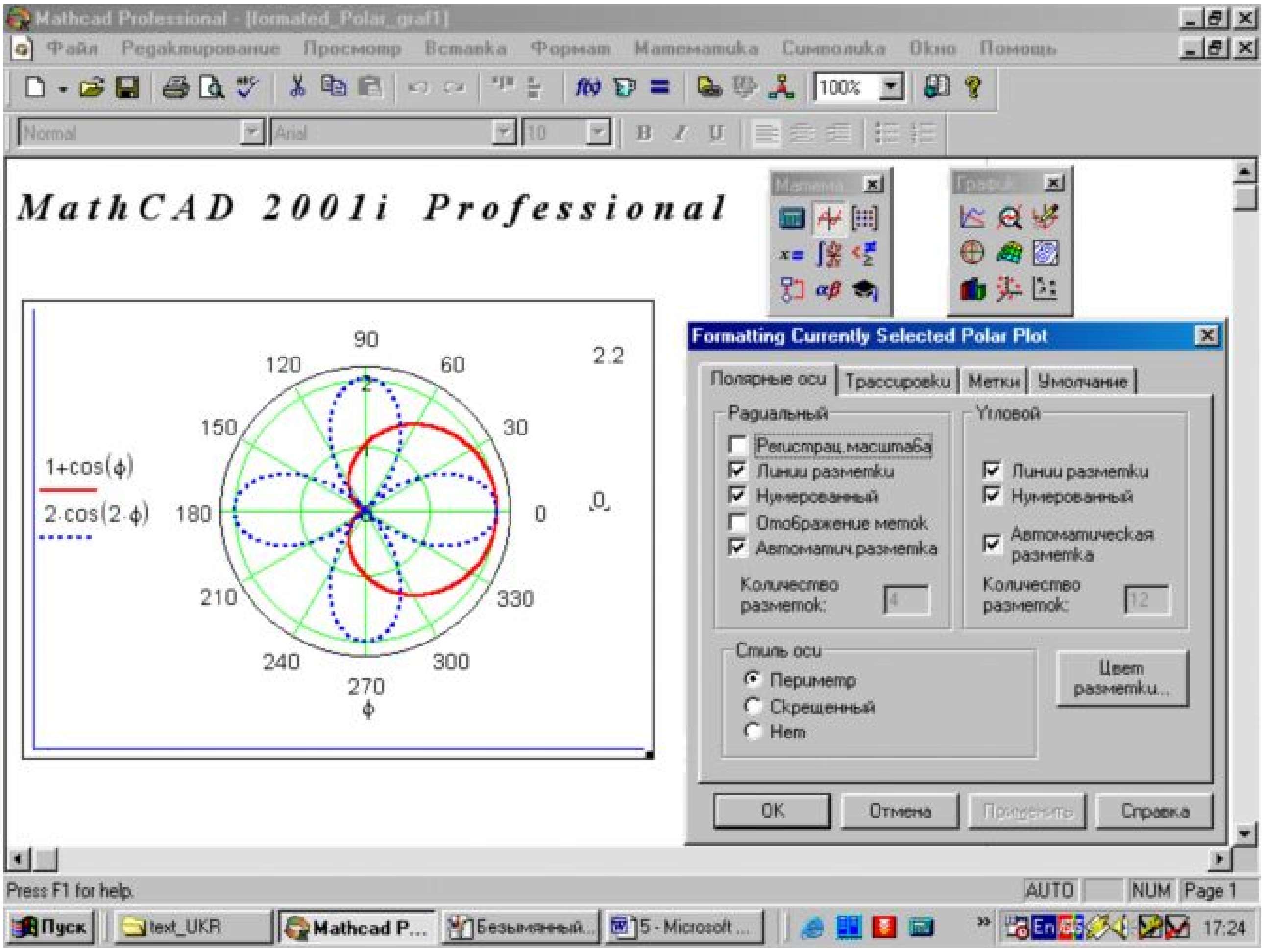


Рис. 5.10. Вікно форматування графіків у полярній системі координат

Вікно містить чотири вкладки:

- **Полярные оси (Polar Axes)** – задання параметрів форматування осей;
- **Трассировки (Traces)** – задання параметрів форматування ліній графіка;
- **Метки (Labels)** – задання параметрів форматування написів осей;
- **Умолчание (Defaults)** – призначення встановлених параметрів форматування параметрами за замовчуванням.

На рис. 5.10 відкрита вкладка **Полярные оси (Polar Axes)**. На цій вкладці задаються формати відображення радіуса-вектора – **Радиальный (Radial)** і його кута – **Угловой (Angular)**. Параметри описано вище, тому немає необхідності їх повторювати. Група **Стиль оси (Axes Style)** дозволяє задати стиль відображення координатних осей або у вигляді кола, проведеного навколо графіка – перемикач **Периметр (Perimeter)**, або у вигляді перехрещених осей – перемикач **Скрещенный (Crossed)**, або без відображення координатних осей – перемикач **Нет (None)**.

Вкладки <u>Трассировки</u> (Traces), <u>Метки</u> (Labels) і <u>Умолчание</u> (Default)

Параметри вкладок **Трассировки** і **Метки** також аналогічні раніше описаним у двовимірних графіках. Вкладка **Метки** спрощена – на ній передбачена установка тільки додаткового титульного напису.

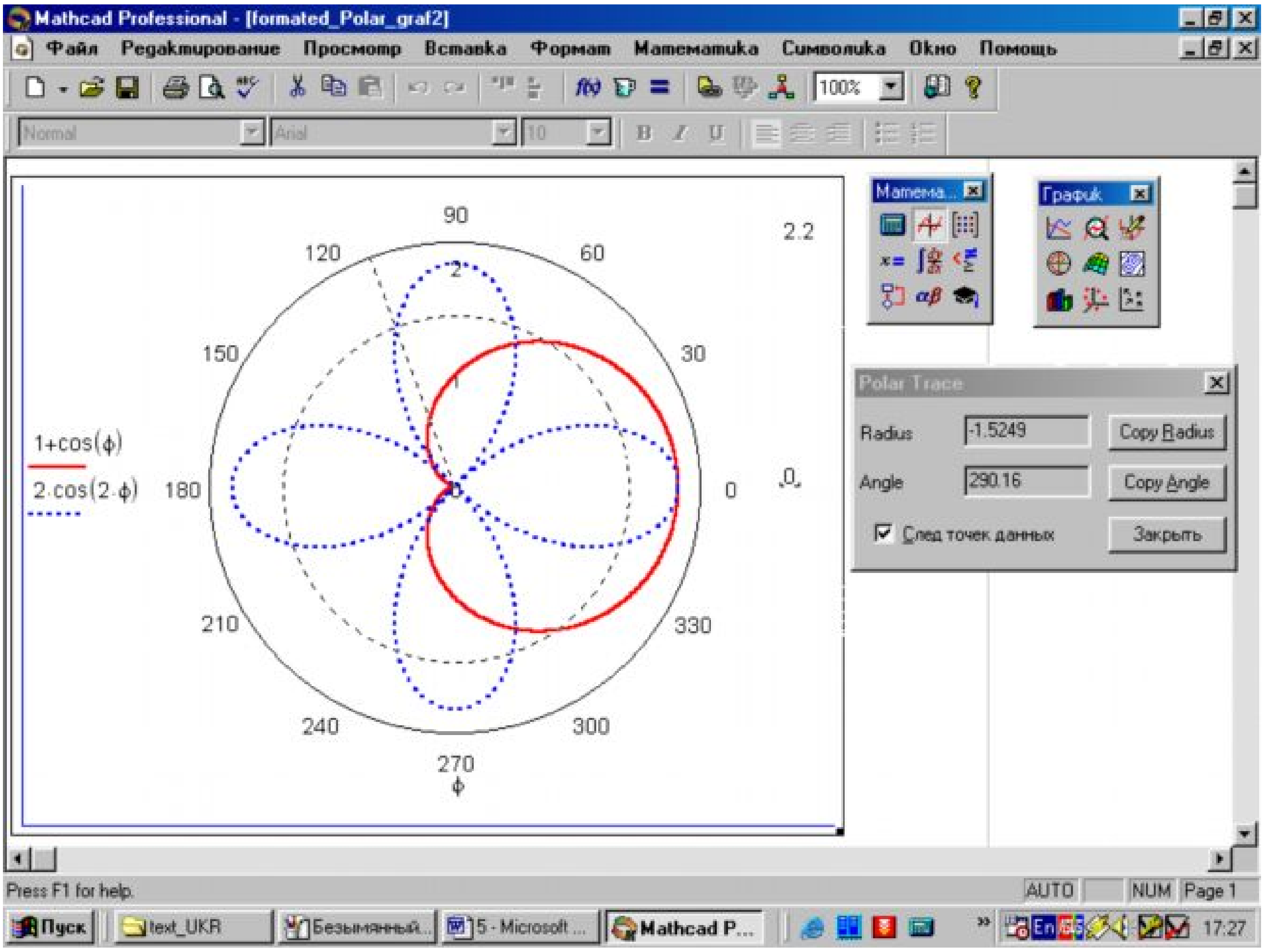


Рис. 5.11. Трасування графіка в полярній системі координат (MathCAD 2001i)

Вкладка **Умолчание** дозволяє зафіксувати введені параметри і призначити їх надалі як параметри за замовчуванням. Таким чином, ви можете один раз настроїти систему і надалі використовувати обрані параметри форматування для побудови інших графіків.

Трасування і масштабування графіка в полярній системі координат

Як і в декартовій системі координат, у полярній системі координат також передбачена можливість трасування графіків за допомогою графічного курсору. Вона реалізується командою **Трассировки**, що виводить діалогове вікно, наведене на рис. 5.11.

Трасування в даному випадку виконується обертальними рухами покажчика миші по колу. На графіку з'являється радіальний відрізок пунктирної прямої і пунктирне коло. Відрізок прямої задає кут радіуса-вектора, а коло – положення його кінця, тобто відстань від центра координатної системи до точки перетину з колом відрізка, що обертається. Координати (кут і відстань) відображаються у вікні трасування.

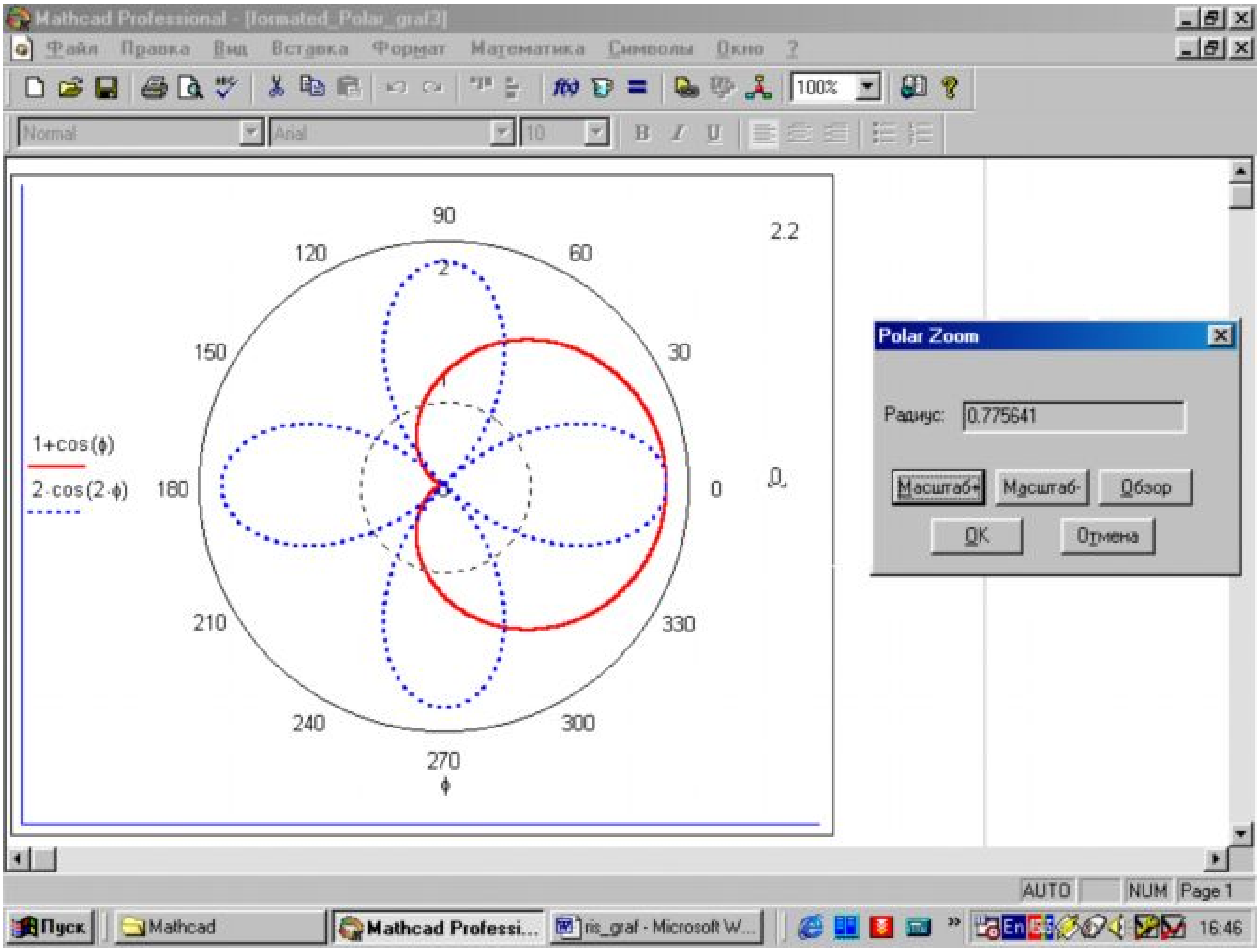


Рис. 5.12. Виділення частини графіка в полярній системі координат

Трасування можливе як без спостереження за кривою графіка, так і зі спостереженням за нею. У другому випадку треба встановити прапорець **След точек данных (Track Data Points)**. За допомогою кнопок **Copy Radius** і **Copy Angle** положення кінця радіуса-вектора поточної точки (кута і довжини радіуса) можна скопіювати в буфер обміну. А за допомогою команди **Вставить (Paste)** можна перенести це значення в необхідний математичний вираз.

Команда **Приближение (Polar Zoom)** дозволяє переглядати виділену частину графіка в полярній системі координат. Виділення виконується зміною радіуса пунктирного кола (рис. 5.12).

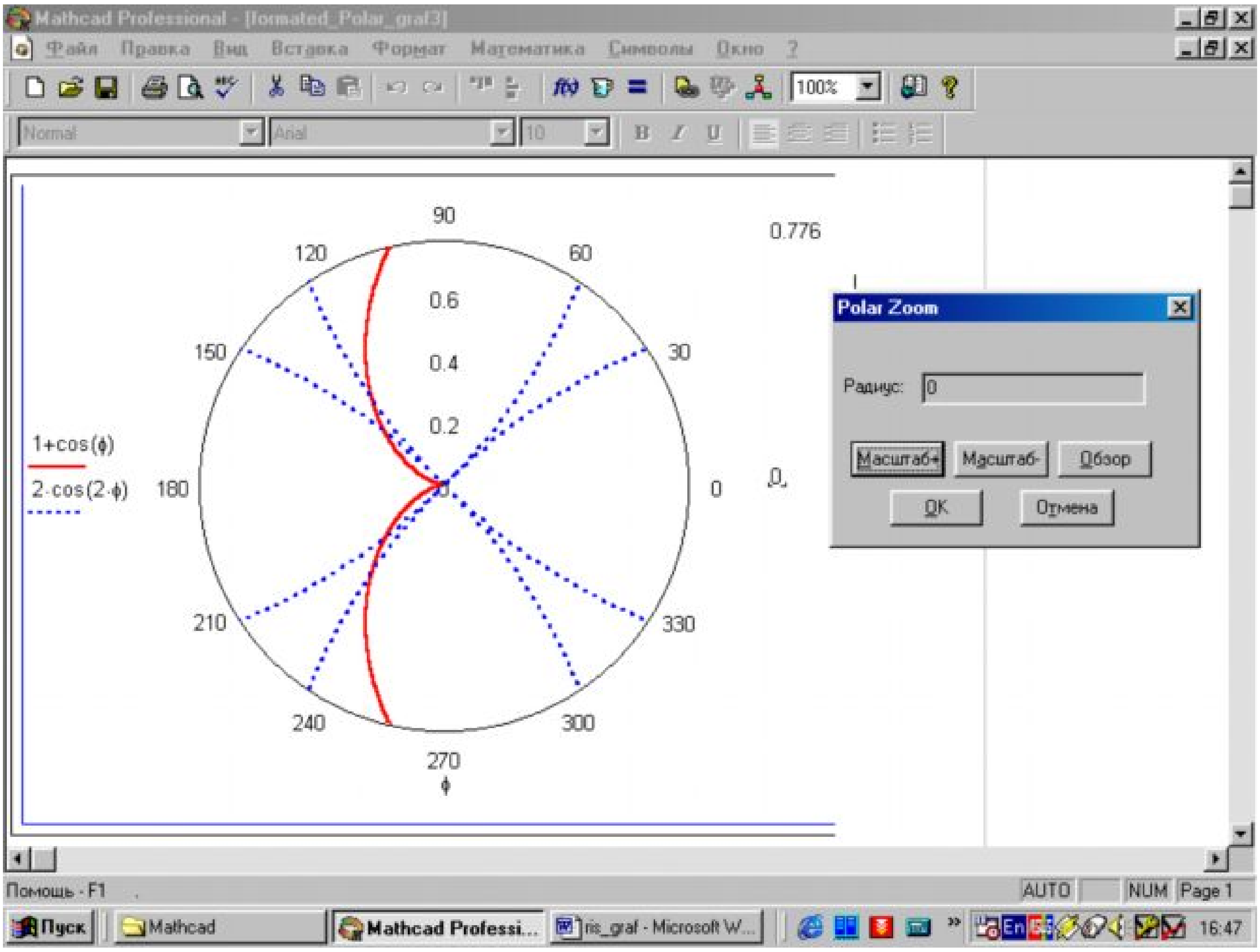


Рис. 5.13. Перегляд частини графіка в полярній системі координат

Натиснувши на кнопку **Масштаб+ (Zoom)**, можна одержати графік виділеної частини зі збільшенням (рис. 5.13).

Призначення інших кнопок вікна перегляду таке ж саме, що й у вікна перегляду графіків у декартовій системі координат.

5.3. Форматування тривимірних графіків

Вікно форматування тривимірних графіків

Команда **3D Вычерчивание (3D Plot)** підменю **График (Graph)** меню **Формат (Format)** служить для встановлення параметрів форматування тривимірних графіків. Вона викликає появу вікна форматування, зображеного на рис. 5.14.

Це вікно має ряд вкладок:

- **Основное (General)** – встановлення загальних параметрів форматування;
- **Степени свободы (Axes)** – встановлення параметрів форматування координатних осей (тип, товщина і колір ліній осей, число поділок, їх нумерація, масштаб та ін.);
- **Оформление (Appearance)** – встановлення вигляду графіка (параметри фарбування і тип точок, що використовуються для побудови фігур і поверхонь);
- **Освещение (Lighting)** – задання умов висвітлення і вибір схеми висвітлення;
- **Заголовок (Title)** – задання титульних написів і їх параметрів;
- **Задние плоскости (Backplanes)** – встановлення параметрів форматування граней;
- **Специальный (Special)** – задання спеціальних ефектів форматування (контурні лінії, стовпці, інтерполяція за кольором та ін.);
- **Улучшенный (Advanced)** – встановлення додаткових параметрів (перспективи, світлові ефекти, якість друку та ін.);
- **Данные QuickPlot (QuickPlot Data)** – параметри швидкої побудови графіків.

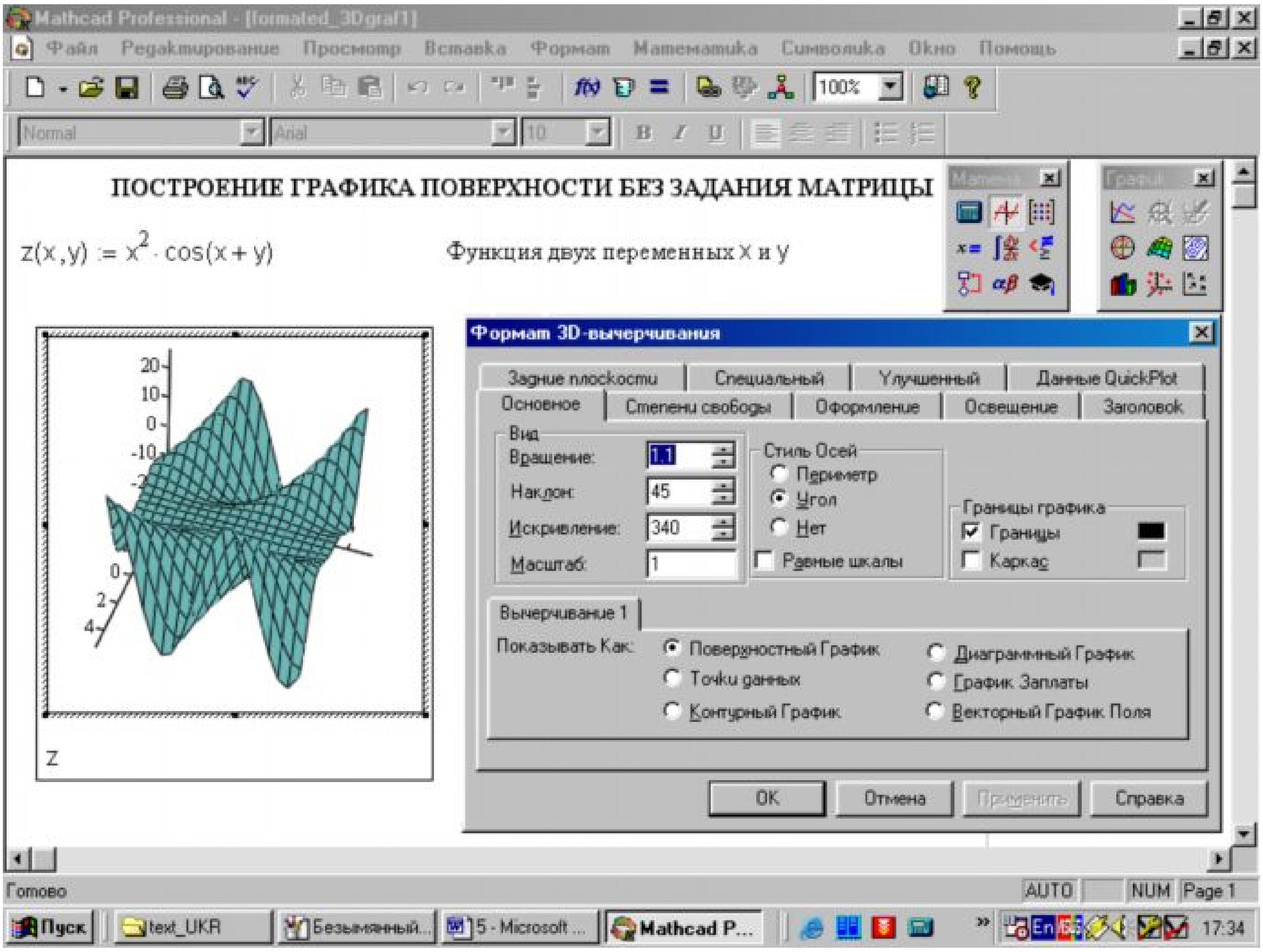


Рис. 5.14. Вікно форматування тривимірного графіка (MathCAD 2001i Professional)

Це вікно можна викликати й іншими способами – подвійним натисканням на тривимірному графіку або з контекстного меню.

Основні (загальні) параметри форматування

Розглянемо вкладку **Основные (General)**, що задає найважливіші параметри (рис. 5.15). Вона містить параметри кутів зображення фігури, стилі осей і зовнішнє оформлення. Найбільш важливі параметри представлені в нижній частині вікна – перемикачі виду фігур.

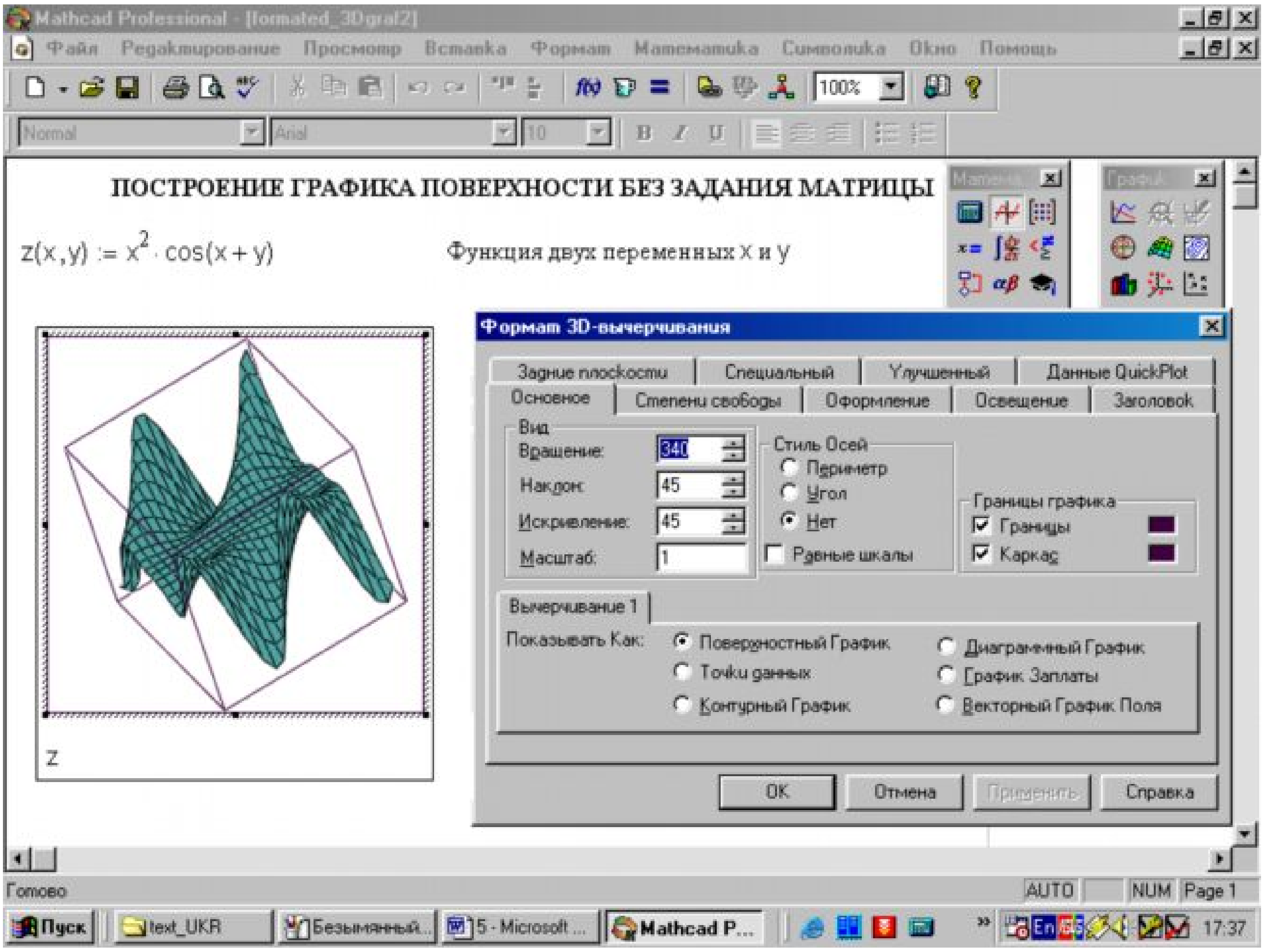


Рис. 5.15. Параметри форматування вкладки Основне

У розділі **Вид (View)** розташовані такі поля:

- **Вращение (Rotation)** – задання кута повороту (від 0 до 360 градусів);
- **Наклон (Titl)** – задання кута нахилу (від 0 до 180 градусів);
- **Искривление (Twist)** – задання кута обертання (від 0 до 360 градусів);
- **Масштаб (Zoom)** – задання відносного розміру (за замовчуванням 1);

Розділ **Стиль Осей (Axes Style)** дозволяє задати стиль відображення осей:

- **Периметр (Perimeter)** – по периметру;
- **Угол (Corner)** – у куті;
- **Нет (None)** – без відображення осей;
- **Равные шкалы (Equal Scales)** – рівні масштаби на всіх осях.

У розділі **Границы графика (Frames)** – установлюються параметри рисунка:

- **Границы (Show Border)** – показати рамку навколо рисунка;
- **Каркас (Show Box)** – показати рисунок, що обрамляється, у вигляді паралелепіпеда.

На рис. 5.15 показаний приклад зміни основних (загальних) параметрів графіка.

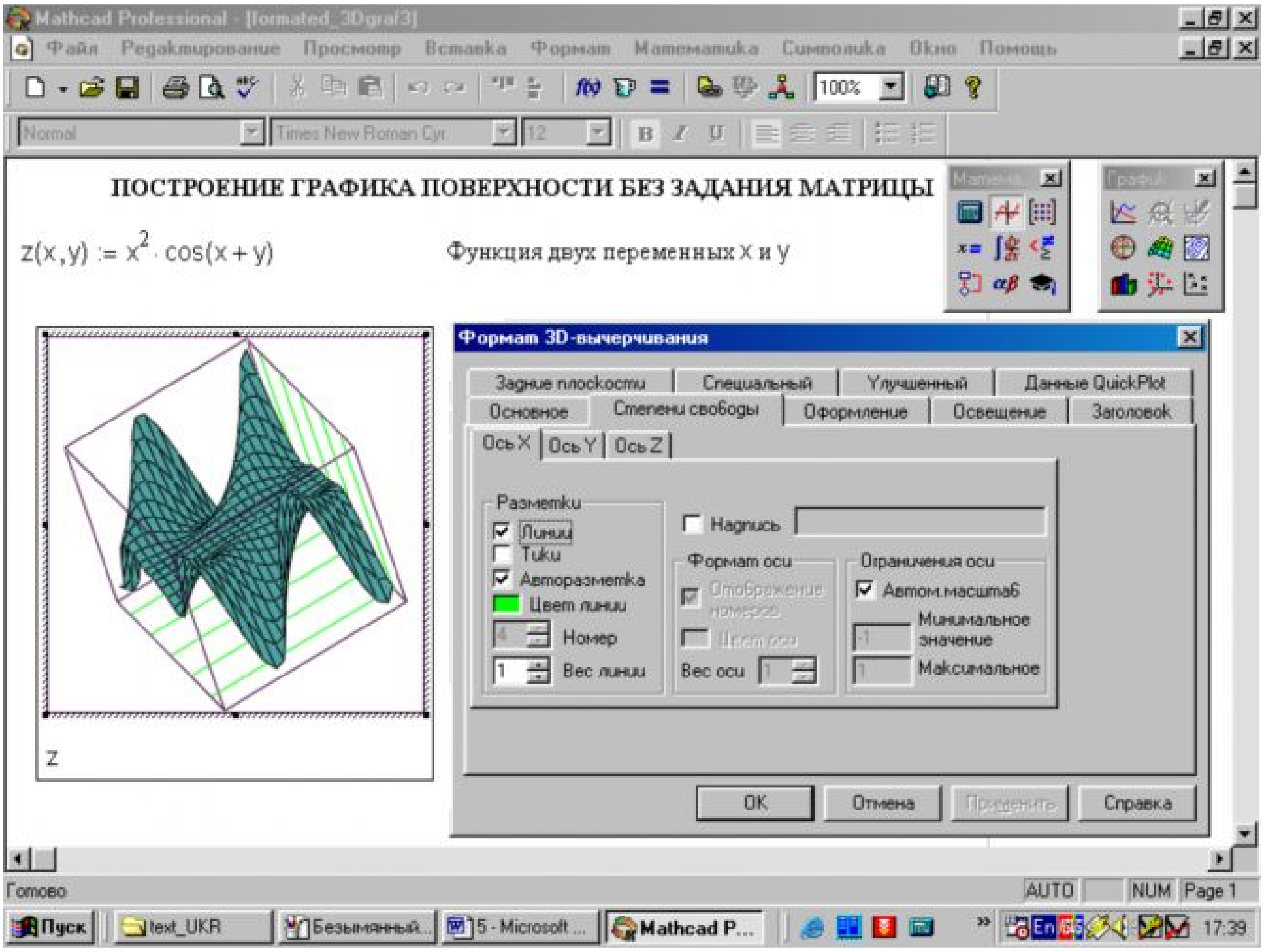


Рис. 5.16. Вікно форматування тривимірних графіків
з відкритою вкладкою Степени свободы (MathCAD 2001i Professional)

На рис. 5.15 були змінені параметри кута повороту (обертання) фігури, її обрамлення, прибране відображення координатних осей.

Параметри форматування осей

Вкладка **Степени свободы (Axes)** служить для встановлення параметрів координатних осей тривимірного графіка. Вікно форматування з відкритою вкладкою **Степени свободы** показане на рис. 5.16.

Усередині цієї вкладки містяться ще три ідентичні вкладки **Ось-X (X-Axis)**, **Ось-Y (Y-Axis)**, **Ось-Z (Z-Axis)**, які дозволяють встановити параметри кожної з координатних осей X, Y і Z.

У розділі **Разметки (Grids)** встановлюється формат координатної сітки:

- **Линии (Draw Lines)** – відображення ліній сітки;
- **Тики (Draw Ticks)** – відображення поділок на осях;
- **Авторазметка (Auto Grid)** – автоматичний вибір числа ліній;
- **Цвет линии (Line Color)** – відображення кольорових ліній сітки;
- **Номер (Number)** – встановлення кількості поділок;
- **Вес линии (Line Weight)** – встановлення ширини ліній сітки.

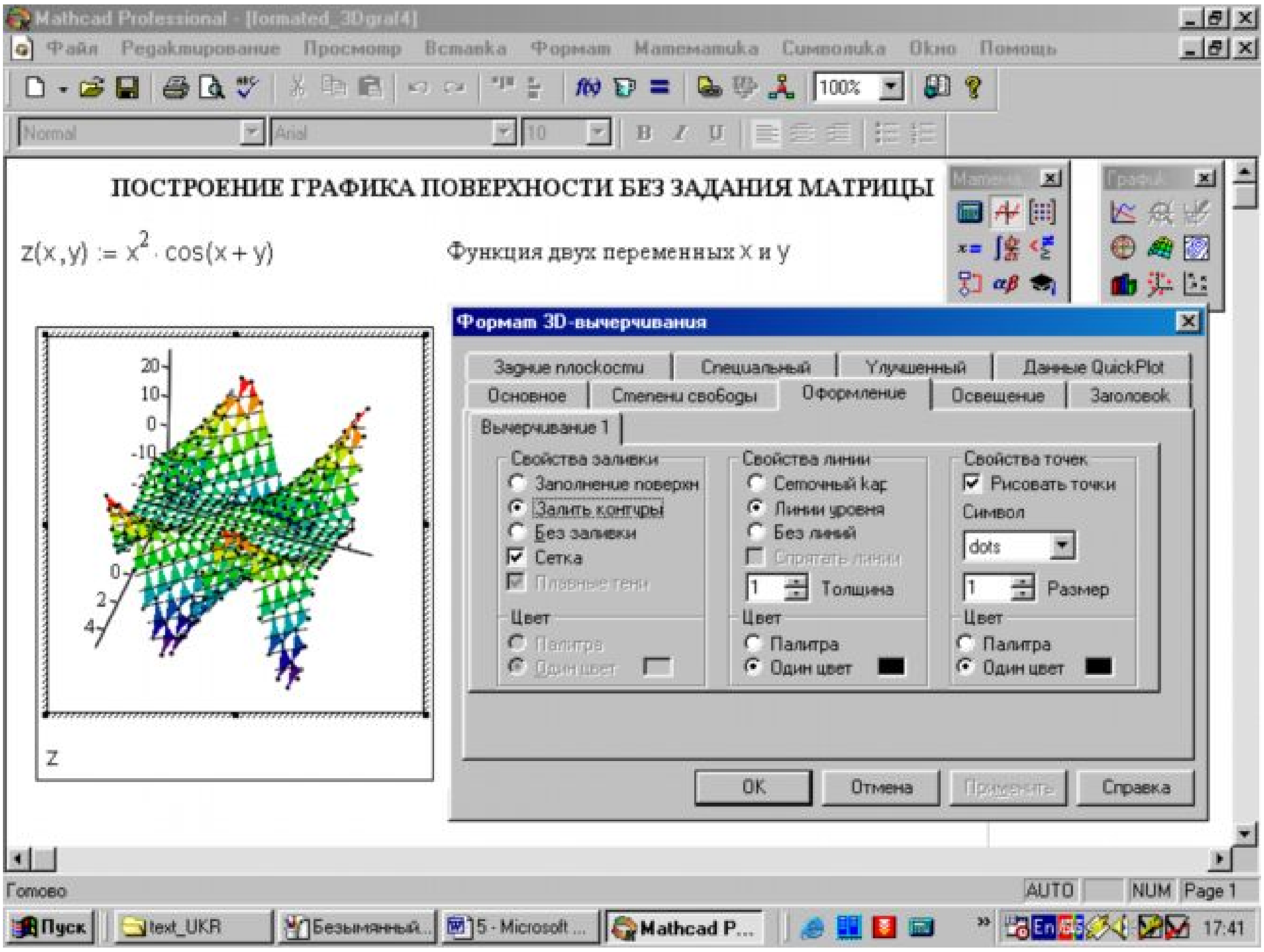


Рис. 5.17. Вікно форматування тривимірних графіків з відкритою вкладкою Оформление

У розділі **Формат оси (Axis Format)** встановлюються безпосередньо параметри координатних осей:

- **Отображение номеров (Show Numbers)** – відображення числових значень осей;
- **Цвет оси (Axis Color)** – відображення кольору осей;
- **Вес оси (Axis Weight)** – встановлення ширини ліній осей.

У розділі **Ограничения оси (Axis Limits)** задається границя зміни координат:

- **Автом. масштаб (Auto Scale)** – автоматичне встановлення масштабу;
- **Минимальное значение (Minimum Value)** – мінімальне значення координати;
- **Максимальное (Maximum Value)** – максимальне значення координати.

Приклад форматування координатних осей наведений на рис. 5.16.

Параметри форматування зовнішнього вигляду

Вікно форматування тривимірних графіків з відкритою вкладкою **Оформление** зображено на рис. 5.17.

На цій вкладці розташовані три розділи:

- **Свойства заливки (Fill Options)** – встановлення параметрів заливання поверхонь;
- **Свойства линии (Line Options)** – встановлення режиму відображення ліній і їх фарбування;
- **Свойства точек (Point Options)** – встановлення режиму відображення точок різними символами і фарбування.

У кожному розділі є перемикачі для вибору схеми фарбування **Палитра (Colormap)** або **Один цвет (Solid Color)**. Уявлення про те, наскільки параметри даної групи впливають на вигляд графіка дає рис. 5.17.

Параметри форматування написів на графіку

Вкладка **Заголовок (Title)**, що наведена на рис. 5.18, дозволяє розташувати на графіку введений в поле **Название графика (Graph Title)** напис. Перемикачем **Сверху (Above)** і **Снизу (Below)** встановлюють місце розташування напису відносно рисунка, перемикач **Скрыть (Hide)** дозволяє відмовитися від відображення напису.

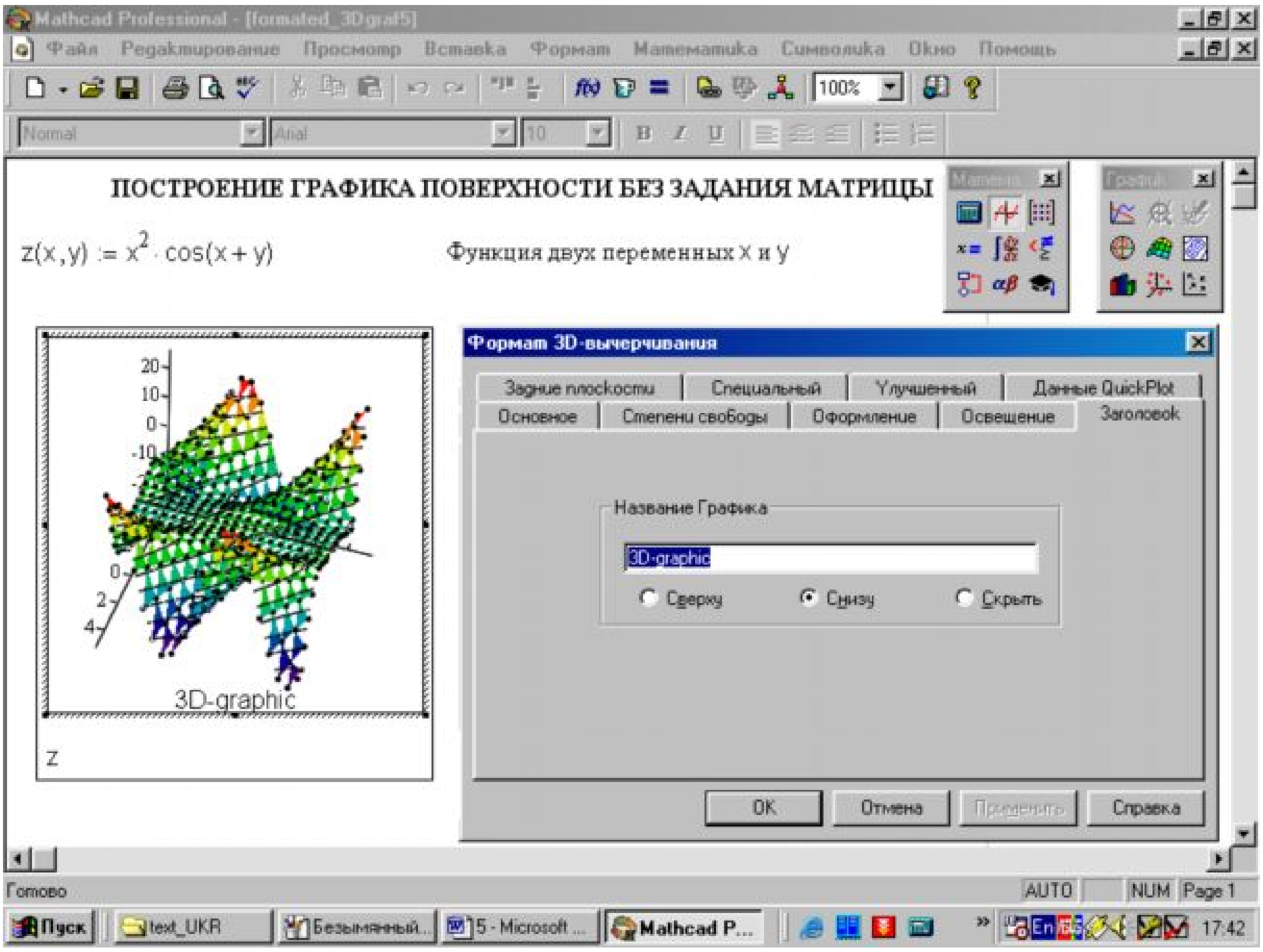


Рис. 5.18. Вкладка задання і відображення написів для тривимірних графіків

Виведені таким чином написи органічно вписуються в графік, причому вони не зникають після перебудови графіків, що іноді трапляється з написами, які виконуються у вигляді текстових блоків, накладених на блоки графіків.

Параметри форматування підсвічування

Вкладка **Освещение (Lighting)** дозволяє задати ефект підсвічування тривимірної поверхні або фігури (рис. 5.19).

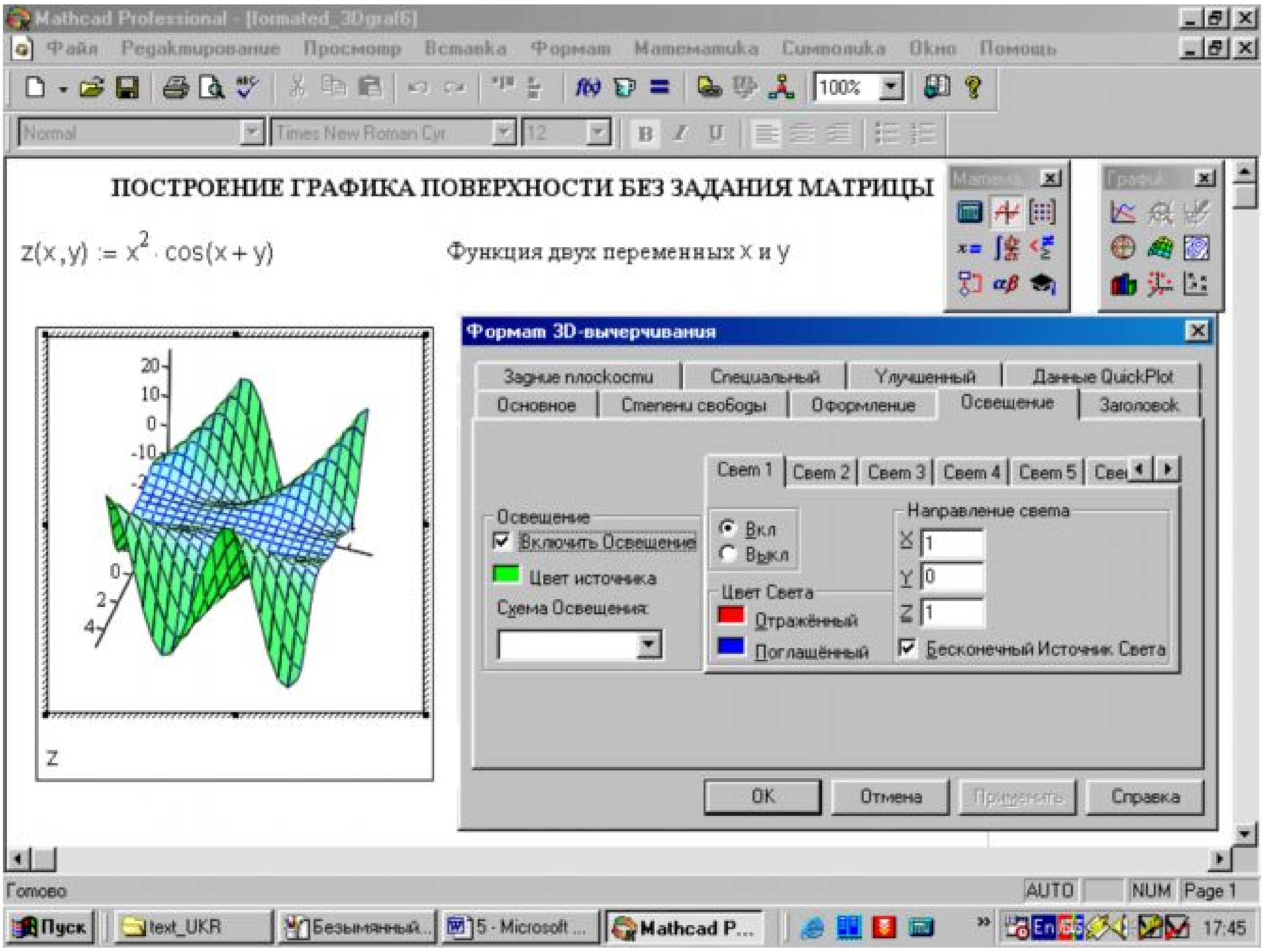


Рис. 5.19. Вкладка Освещение

У розділі **Освещение (Lighting)** можна включити підсвічування – прапорець **Включить Освещение (Enable Lighting)** і вибрати **Схему Освещение (Lighting Scheme)** або створити її самостійно за допомогою наявних на цій вкладці параметрів.

Параметри форматування граней

Вкладка **Задние плоскости (Backplanes)** містить параметри для форматування граней тривимірного графіка: **X-Y Основание (X-Y Backplanes)**, **Y-Z**

Основание (Y-Z Backplanes) і **X-Z Основание (X-Z Backplanes)**. Їм відповідають три однакові вкладки (рис. 5.20).

На цих вкладках розташовані два прапорці:

- **Закрасить Основание (Fill Backplane)**;
- **Граница Основания (Backplane Border)**.

Колір заливання встановлюється у вікні **Цвет (Color)**.

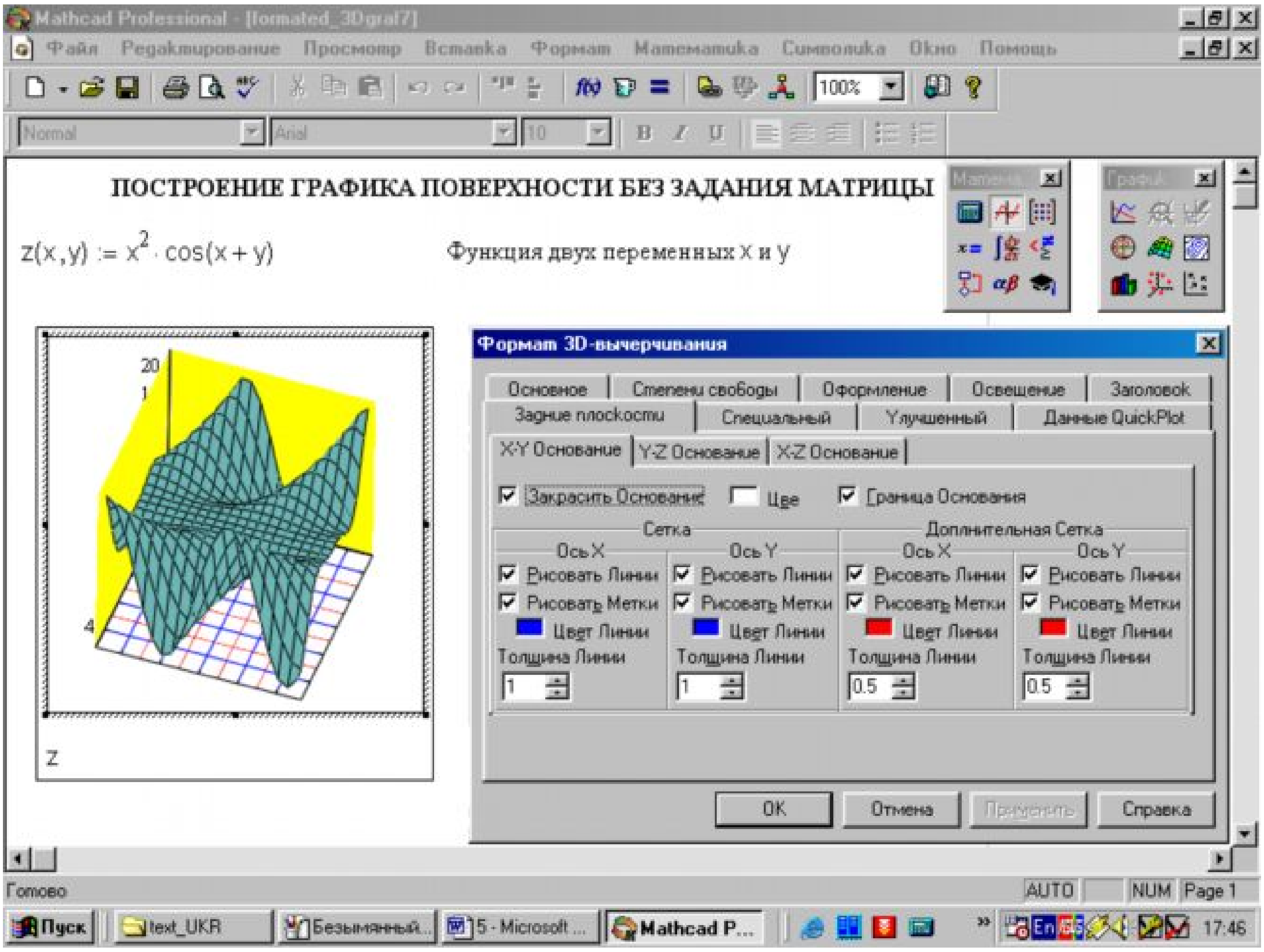


Рис. 5.20. Вкладка форматування граней

Крім того, маємо розділи для задання сітки на гранях – **Сетка (Grids)** і **Дополнительная Сетка (Subgrids)** з відповідними прапорцями. Після їх натисканні в кольоровому полі з'являється діалогове вікно вибору кольору. Доступні кольори визначаються можливостями застосовуваного відеоадаптера.

Параметри форматування спеціальних ефектів

Вкладка **Специальный (Special)** служить для задання різних спеціальних ефектів (рис. 5.21).

Групи параметрів цієї вкладки перераховані нижче:

➢ **Свойства Контура (Contour Options)** – розділ, у якому наведені параметри відображення, фарбування і кількості контурних ліній;

➢ **Вид Диаграммы (Bar Plot Layout)** – розділ, у якому наведені параметри форматування стовпчикової діаграми;

➢ **Сетка (Interpolated Mesh)** – розділ, що дозволяє задати інтерполяцію поверхні за заданим числом ліній у рядках і стовпцях (за замовчуванням – це число 21);

➢ **Соотношение (Connectivity)** – розділ, що дає можливість зв'язати функціональне фарбування з параметрами, що змінюються (наприклад, координатами).

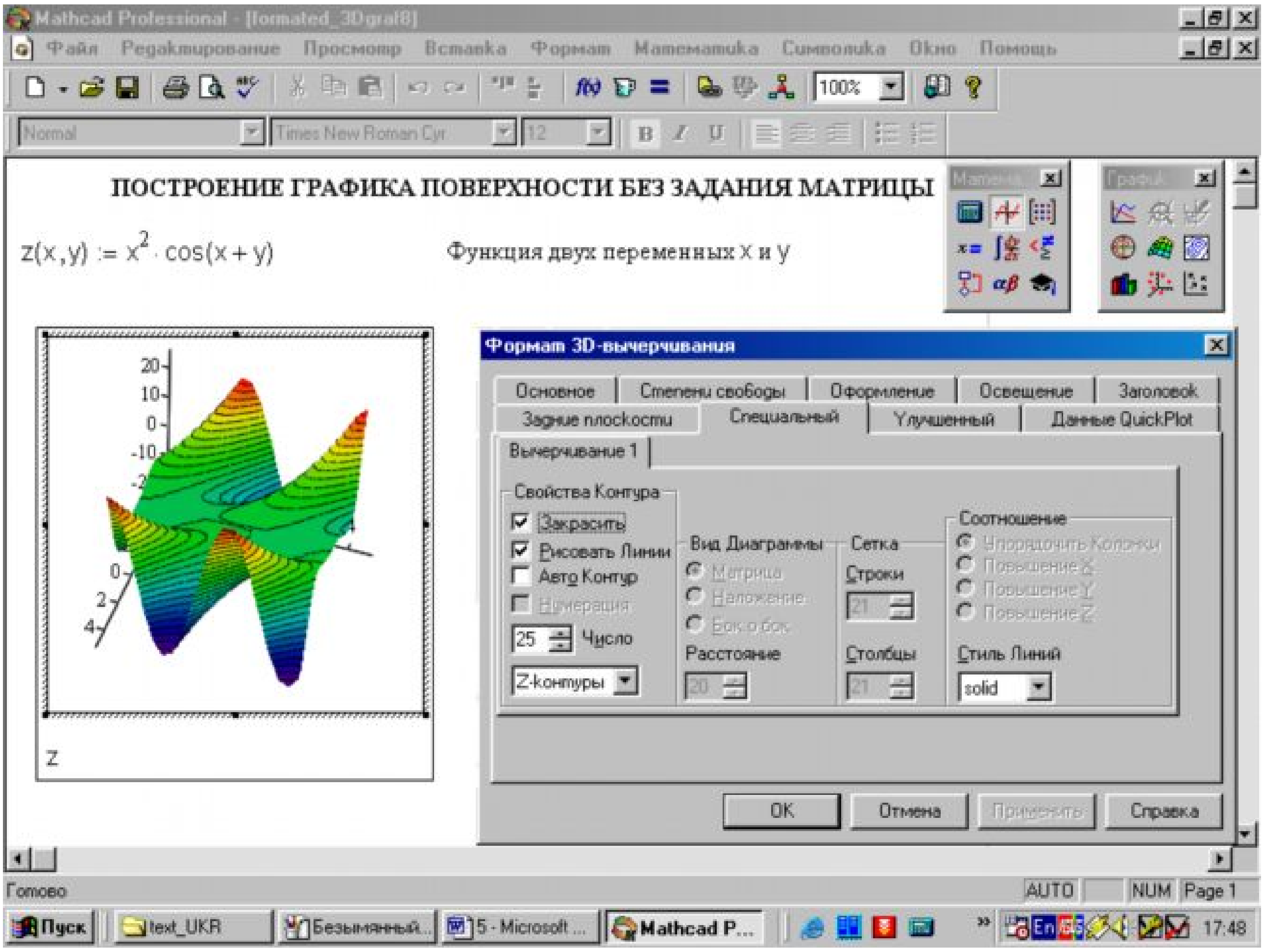


Рис. 5.21. Вкладка встановлення спеціальних ефектів

Параметри цієї вкладки є контекстно залежними, тому вони можуть розрізнятися у різних видів графіків.

Додаткові параметри форматування

Вкладка **Улучшенный (Advanced)** служить для встановлення ряду додаткових параметрів, наприклад параметрів відображення фігури, друку її на принтері, кольорового оформлення (рис. 5.22).

У розділі **Дополнительные опции просмотра (Advanced View Options)** встановлюються найбільш важливі параметри:

- **Туман (Enable Fod)** – включення ефекту туману (серпанку);
- **Перспектива (Perspective)** – відображення поверхні (фігури) у перспективі;
- **Вертикальная Шкала (Vertical Scale)** – встановлення масштабу по вертикалі;
- **Дистанция обзора (Viewing Distance)** – встановлення відстані, з якої фігура розглядається.

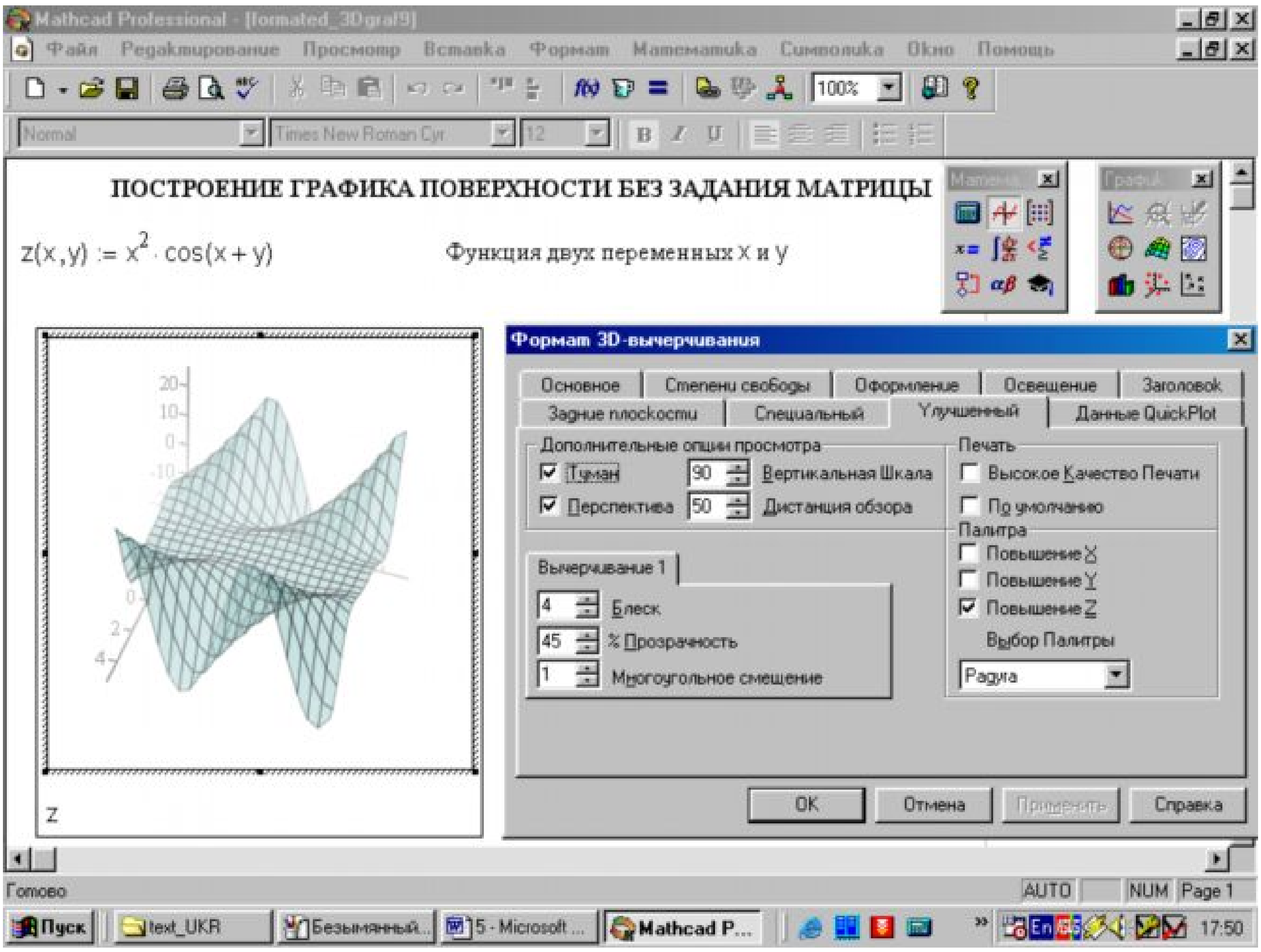


Рис. 5.22. Вікно форматування тривимірних графіків з відкритою вкладкою Улучшенный

Розділ **Печать (Printing)** містить два прапорці для задання параметрів друку – зі звичайною і підвищеною якістю. У розділі **Палитра (Colormap)** можна задати функціональне зафарбовування за зростанням значень координат точок уздовж осей X, Y, Z.

Параметри швидкої побудови графіків

Вкладка **Данные QuickPlot (QuickPlot Data)** (рис. 5.23) дозволяє задати основні параметри для швидкої побудови тривимірних графіків без задання матриць аплікат поверхонь.

На цій вкладці розташовані три групи параметрів:

- **Диапазон 1 (Range 1)** – задання меж за першим параметром;
- **Диапазон 2 (Range 1)** – задання меж за другим параметром;
- **Система координат (Coordinate System)** – вибір однієї з трьох систем координат.

Межі зміни параметрів задаються від початкового значення – поле **начало (Start)** до кінцевого – **конец (End)**. Крім того, задається число ліній, якими представлена поверхня (поле з лічильником **#Сеток (#Grids)**). Можливий також вибір однієї з трьох систем координат – перемикачі **Картезианская (Cartesian)**, **Сферическая (Spherical)** і **Цилиндрическая (Cylindrical)**.

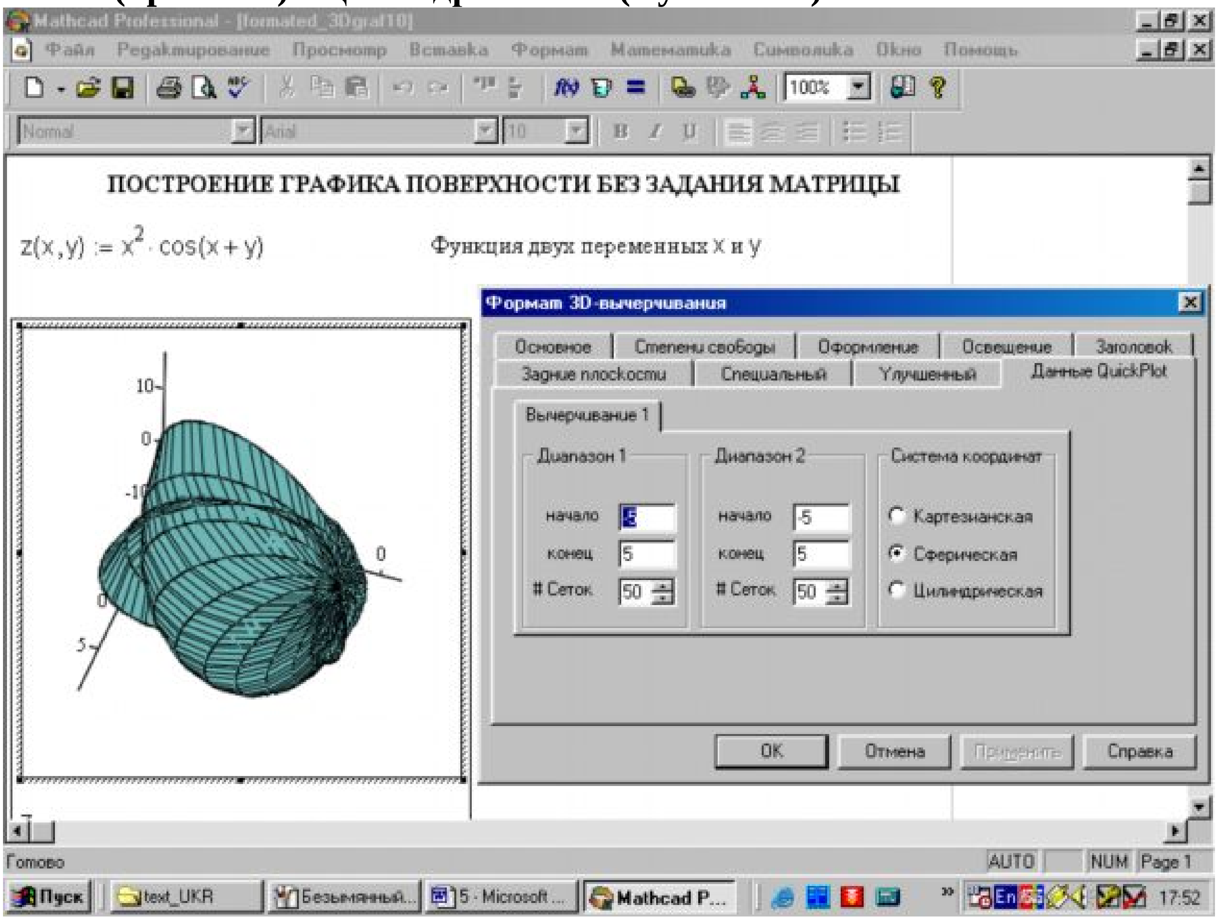


Рис. 5.23. Вкладка Данные QuickPlot

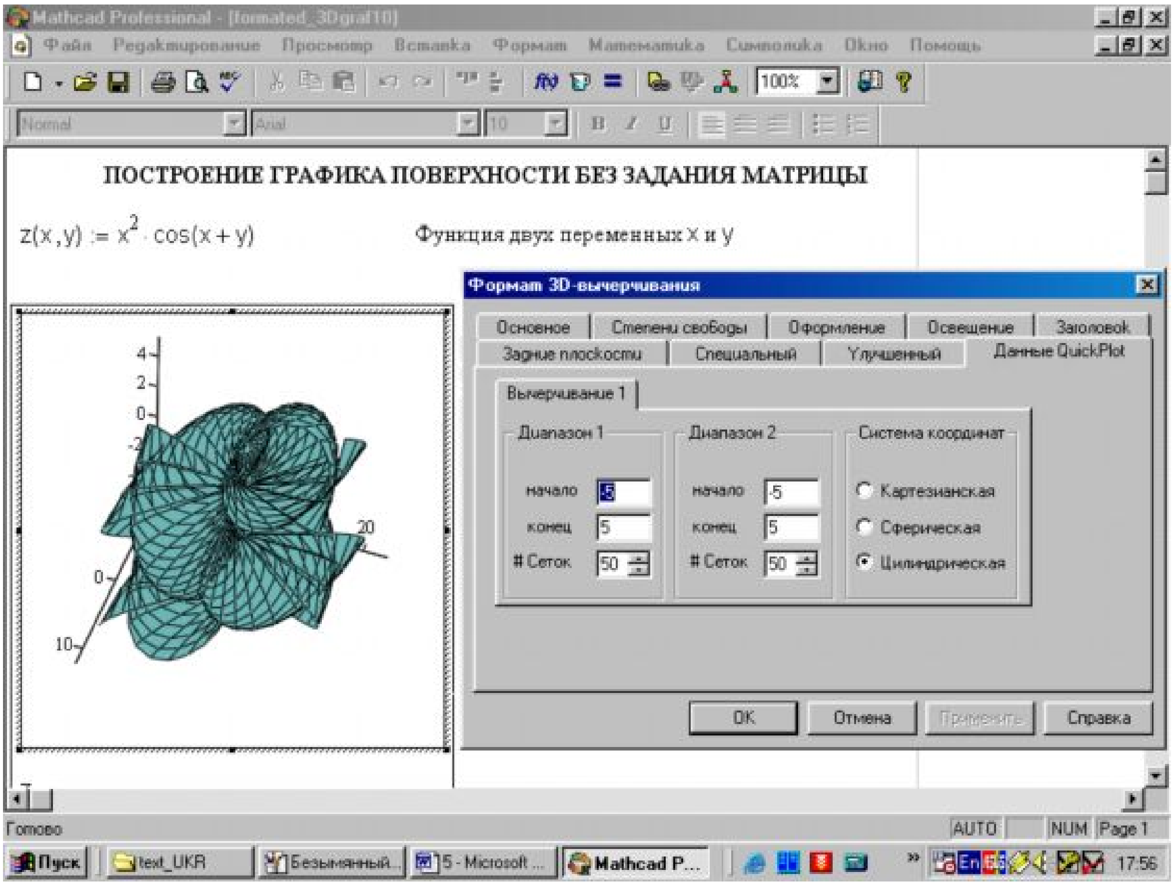


Рис. 5.24. Побудова графіка поверхні в циліндричній системі координат

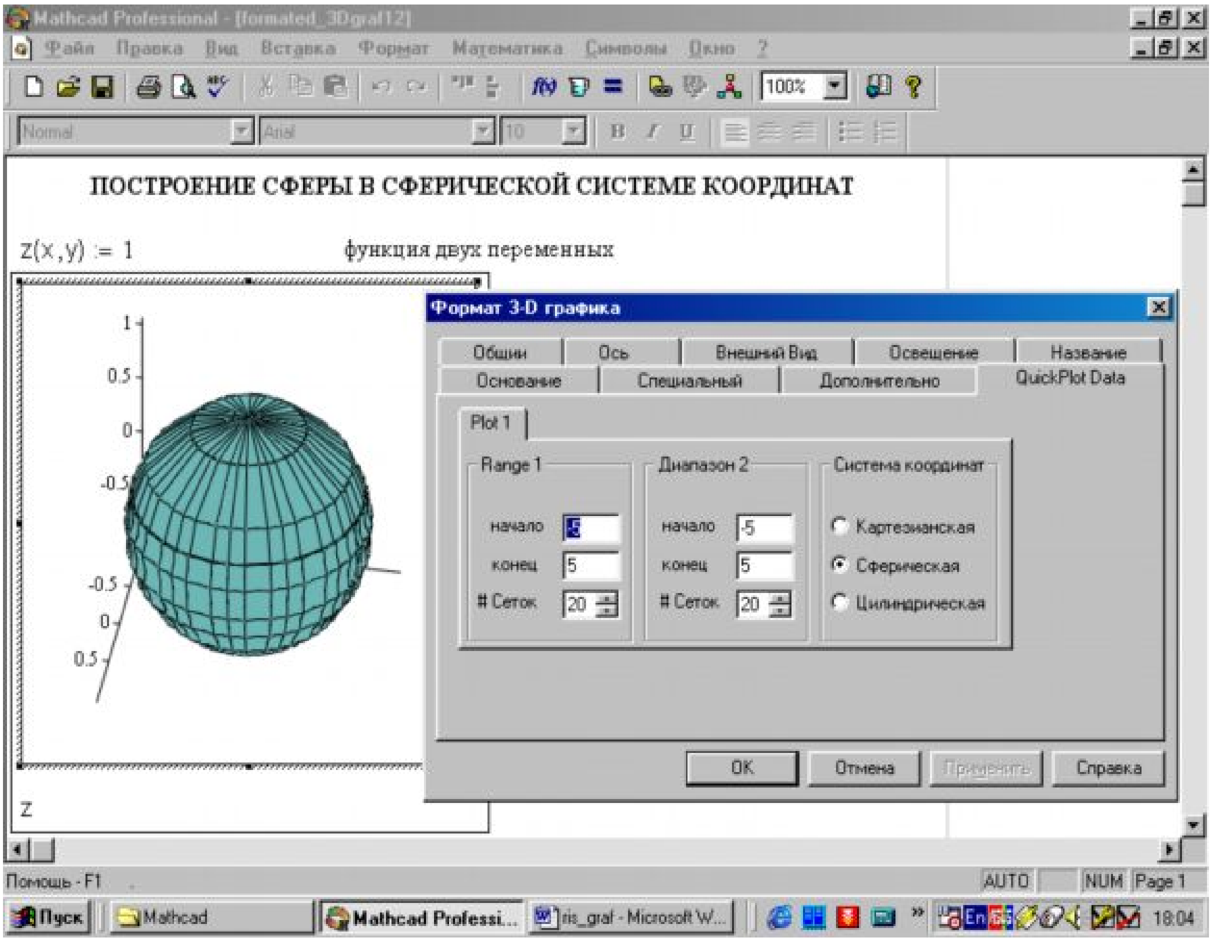


Рис. 5.25. Побудова сфери одиничного радіуса у сферичній системі координат

На рис. 5.23 показано, настільки незвичайний вигляд має вихідна фігура (рис. 5.14), побудована у сферичній системі координат. На рис. 5.24 та ж фігура зображена в циліндричній системі координат.

Застосування двох додаткових систем координат розширює можливості побудови графіків у системі MathCAD. Наприклад, щоб побудувати сферу в сферичній системі координат, досить задати вихідний вираз $z(x, y) = R$, де R – радіус сфери. На рис. 5.25 проілюстрована побудова сфери одиничного радіуса.

Ще одну фігуру, побудовану в циліндричній системі координат, показано на рис. 5.26. Вона описується виразом $z(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 + 1)$.

Більш потужні математичні системи, наприклад Maple, мають можливість побудови тривимірних графіків у набагато більшому числі систем координат.

Однак слід зазначити, що, використовуючи відомі формули перетворення координат з однієї системи в іншу, у MathCAD можна виконати побудову графіків і в інших системах координат, крім тих, що зазначені на вкладці **Данные QuickPlot Data**.

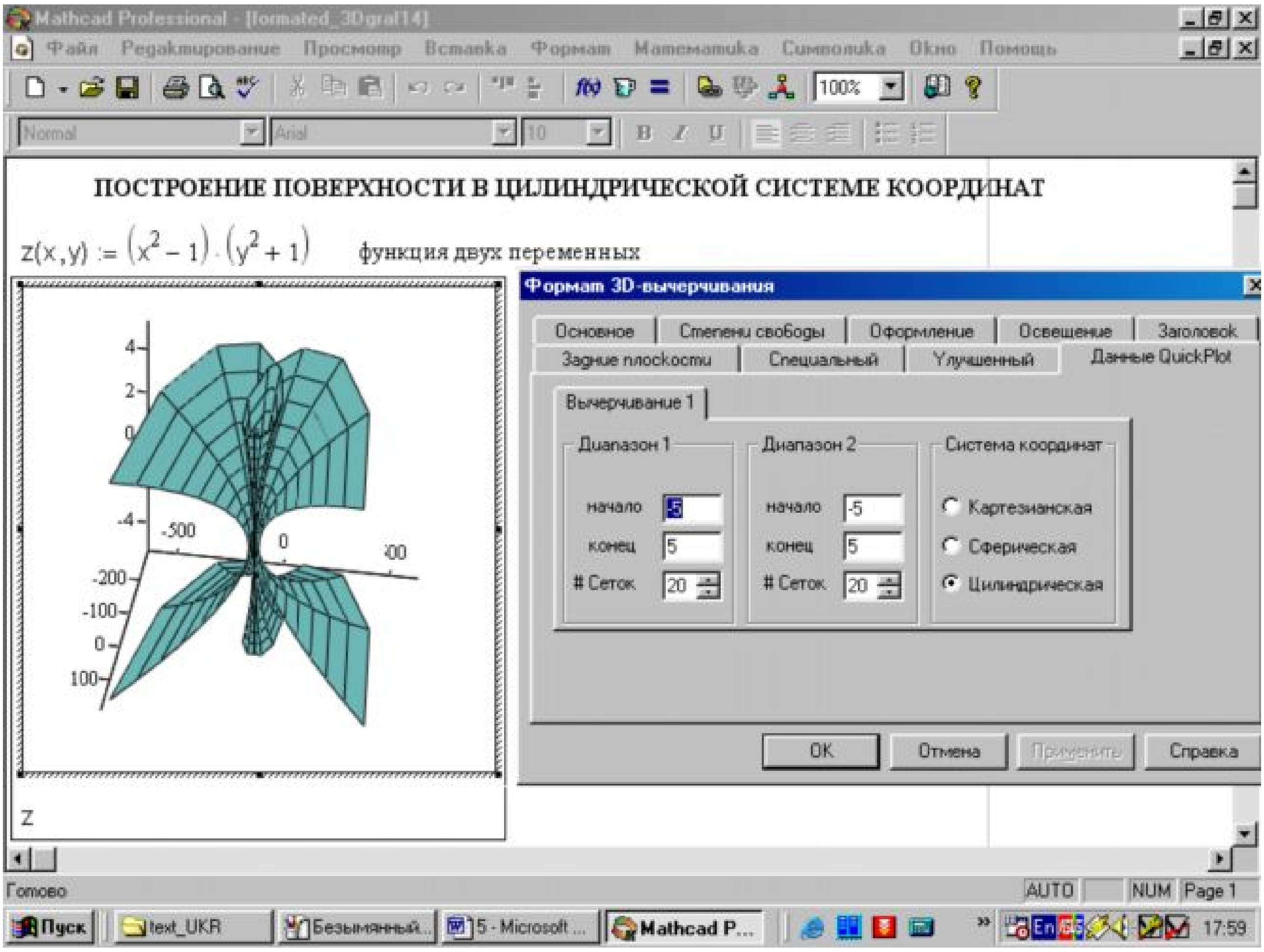


Рис. 5.26. Побудова поверхні в циліндричній системі координат

5.4. Контрольні запитання і вправи для самостійної роботи

1. Які можливості передбачені в системі MathCAD для форматування двовимірних графіків?
2. Які можливості форматування графіків у полярній системі координат?
3. Як виконується форматування тривимірних графіків у системі MathCAD?
4. Як вправу пропонуємо самостійно виконати форматування графіків функцій:
   - $y = \cos 2x$, $y = x \sin x$, $y = \cos 2x + x \sin x$ – у декартовій системі координат;
   - $r = 2 - \cos 3\phi$, $r = 1 + \sin 2\phi$ – у полярній системі координат;
   - $z = x^2 + y^2$, $z = 10 + x^2 - y^2$ – у декартовій системі координат.
5. Побудувати декартові і полярні графіки функцій:

$$X(\alpha) := \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha), \quad Y(\alpha) := 1.5 \cos(\alpha)^2 - 1, \quad P(\alpha) := \cos(\alpha).$$

Для цього необхідно визначити α як дискретний аргумент на інтервалі від 0 до $2 \cdot \pi$ з кроком $\pi/30$.

Визначити за декартовим графіком координати кожної точки перетину графіків $Y(\alpha)$ і $P(\alpha)$. Обчислити значення функцій $X(\alpha)$ і $Y(\alpha)$, якщо $\alpha := \pi / 2$.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Деякі вбудовані оператори системи MathCAD

У таблиці використано такі позначення: *X* і *Y* – змінні або вирази будь-якого типу; *x* і *y* – дійсні числа; *z* і *w* – дійсні або комплексні числа; *m* і *n* – цілі числа; *A* і *B* – масиви (вектори або матриці); *i* – дискретний аргумент; *t* – будь-яка змінна; *f* – будь-яка функція.

Оператор	**Клавіша**	**Призначення оператора**
$X := Y$	*X* : *Y*	Локальне присвоювання *X* значення *Y*
$X \equiv Y$	*X* ~ *Y*	Глобальне присвоювання *X* значення *Y*
$X =$	*X* =	Відображення значення *X*
$X + Y$	*X* + *Y*	Додавання *X* з *Y*
X $+ Y$	*X* **[Ctrl][↵]** *Y*	Те ж, що й додавання (перенесення на іншу строку чисто косметичне)
$X - Y$	*X* - *Y*	Віднімання від *X* значення *Y*
$X \cdot Y$	*X* * *Y*	Множення *X* на *Y*
$\frac{X}{z}$	*X* / *z*	Ділення *X* на *z*
z^w	*z* ^ *w*	Піднесення *z* до степеня *w*
$\sqrt{z}$	*z* \	Обчислення квадратного кореня з *z*
$\sqrt[n]{z}$	*n* **[Ctrl]** *z*	Обчислення кореня *n-ої* степеня з *z*
$n\,!$	*n* !	Обчислення факторіала
B_n	*B* [*n*	Введення нижнього індексу *n*
$A_{n,m}$	*A* [*n* , *m*	Введення подвійного індексу
$A^{<n>}$	*A* **[Ctrl]6** *n*	Введення верхнього індексу

Оператор	Клавіша	Призначення оператора
$\sum_{i=m}^{n} X$	**[Ctrl][Shift]4**	Підсумовування *X*, якщо $i = m, m + 1, \ldots n$
$\sum_{i} X$	$	Підсумовування *X* за дискретним аргументом *i*
$\prod_{i=m}^{n} X$	**[Ctrl][Shift]3**	Перемножування *X*, якщо $i = m, m + 1, \ldots n$
$\prod_{i} X$	#	Перемножування *X* за дискретним аргументом *i*
$\int_a^b f(t)dt$	&	Обчислення визначеного інтеграла $f(t)$ на інтервалі $[a, b]$
$\frac{d}{dt} f(t)$	?	Обчислення похідної $f(t)$ за *t*
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	**[Ctrl]?**	Обчислення похідної *n-го* порядку функції $f(t)$ за *t*
(▪)	‘	Введення пари круглих дужок із шаблоном
$x > y$	$x > y$	Більше ніж
$x < y$	$x < y$	Менше ніж
$x \geq y$	*x* **[Ctrl]0** *y*	Більше або дорівнює
$x \leq y$	*x* **[Ctrl]9** *y*	Менше або дорівнює
z **=** *w*	*z* **[Ctrl]=** *w*	Булева рівність повертає 1, якщо операнди рівні, в іншому разі дорівнює 0
$z \neq w$	*z* **[Ctrl]3** *w*	Не дорівнює
$\|z\|$	| *z*	Обчислення модуля комплексного числа *z*

Додаток 2

Системні змінні системи MathCAD

Системні змінні і константи MathCAD	**Опис**
π = 3.14159	**Число π**. Щоб відобразити, натисніть [Ctrl-P]
e = 2.71828	**Основа натурального логарифма**
∞	**Нескінченність (10^{307})**. Щоб відобразити, натисніть [Ctrl-Z]
%	**Відсоток.** Використовуйте його у виразах, подібних до 10·%, або як множник, що масштабується
i	**Уявна одиниця**
j	**Уявна одиниця**
TOL =10^{-3}	**Припустима похибка** за різних алгоритмів апроксимації (інтегрування, розв’язування рівнянь). Змінити значення системної змінної TOL, а також наведених нижче, можна за допомогою команди **Математика⇒Параметри**
CTOL = 10^{-3}	Встановлює **точність обмежень** у блоці розв’я-зування, щоб розв’язок був допустимим
ORIGIN = 0	Визначає **індекс першого елемента** векторів і матриць
FRAME = 0	Використовується як **лічильник** у разі створення анімації
PRNPRECISION = 4	**Число значущих цифр**
PRNCOLWIDTH = 8	**Число позицій для числа**
CWD	**Поточний робочий каталог** у формі рядка
inN	**Змінна вводу** для зв'язку MathCAD через MathConnex з іншими програмними засобами, де N – номер входу, ціле число, за замовчуванням дорівнює 0 (тільки для Mathcad Professional)
outN	**Змінна виходу** для зв'язку MathCAD через MathConnex з іншими програмними засобами, де N – номер виходу, ціле число, за замовчуванням дорівнює 0 (тільки для Mathcad Professional)

Додаток 3

Деякі вбудовані функції системи MathCAD

Тригонометричні функції

sin(*z*) – синус
csc(*z*) – косеканс
cos(*z*) – косинус
sec(*z*) – секанс
tan(*z*) – тангенс
cot(*z*) – котангенс

Гіперболічні функції

sinh(*z*) – гіперболічний синус
tanh(*z*) – гіперболічний тангенс
csch(*z*) – гіперболічний косеканс
cosh(*z*) – гіперболічний косинус
sech(*z*) – гіперболічний секанс
coth(*z*) – гіперболічний котангенс

Зворотні тригонометричні функції

asin(*z*) – зворотний тригонометричний синус
acos(*z*) – зворотний тригонометричний косинус
atan(*z*) – зворотний тригонометричний тангенс

Показникові та логарифмічні функції

exp(*z*) – експонентна функція (або e^z)
ln(*z*) – натуральний логарифм (за основою *e)*
log(*z*) – десятковий логарифм (за основою 10)

Функції роботи з частиною числа (округлення та ін.)

Re(*z*) – виділення дійсної частини комплексного числа*z*
Im(*z*) – виділення уявної частини комплексного числа *z*
arg(*z*) – обчислення аргументу (фази) комплексного числа *z*
floor(*x*) – найбільше ціле, менше або дорівнює *x*
ceil(*x*)

mod(x,y**)** –найменше ціле, більше або дорівнює x

angle(x,y**)** –залишок від ділення x/y зі знаком x

– додатний кут з віссю x для точки з координатами (x,y)

Список рекомендованої літератури

Mathcad 6.0 Plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95: Пер. с англ. – М.: Филинъ, 1996. – 712 с.

Дьяконов В.П. Справочник по MathCAD PLUS 6.0 PRO – М.: СК Пресс, 1997. – 336 с.: ил.

Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MathCAD 8 PRO в математике, физике и Internet – М.: Нолидж, 2000. – 512 с.: ил.

Дьяконов В.П. Mathcad 8/2000: специальный справочник – СПб.: Питер, 2000. – 592 с.: ил.

Кудрявцев Е.М. MathCAD 2000 Pro – М.: ДМК Пресс, 2001. – 576 с.: ил.

Очков В.Ф. Mathcad 7 Pro для студентов и инженеров – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 384 с.: ил.

Очков В.Ф. Mathcad 8 Pro для студентов и инженеров – М.: КомпьютерПресс, 1999. – 523 с.: ил.

Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Лабораторный практикум по высшей математике – М.: Высш. шк., 2000. – 716 с.: ил.

Зміст

Навчальне видання

Сясєв Андрій Валерійович

ВСТУП ДО СИСТЕМИ MathCAD

Навчальний посібник

Редактор В. П. Шиян
Художньо-технічний редактор В. А. Усенко
Коректор В. П. Шиян

Свідоцтво держ. реєстрації №289-ДК

Підписано до друку 10.03.04. Формат $60\times80^{1}/_{16}$. Папір друкарський. Друк плоский.
Ум. друк. арк. 6,27. Ум. фарбовідб. 6,27.. Обл.- вид. арк. 7,08.
Тираж 300 пр. Вид. № 1080. Замовне. Зам. №694

Видавництво Дніпропетровського університету, пр. Гагаріна, 72,
м. Дніпропетровськ, 49050

Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050